不規則励振を受ける車体の パワースペクトルの確率有限要素解析*

張 湘 偉**, 中 桐 滋***

Stochastic FEM Analysis of Vehicle Response Spectrum Due to Multiple Random Excitations

by Xiang Wei ZHANG and Shigeru NAKAGIRI

The power spectra of the internal forces in a vehicle running on an uneven road are investigated based on finite element modeling. The modeling is two-dimensional to treat the random excitations through the front and rear wheels. The damping of the suspensions and tyres is of a non-proportional type. The equation of motion is uncoupled by use of the complex eigenvalue problem. An attempt is made to apply the filtered Poisson process (FPP) to the simulation of a random road surface. The power spectrum generated by the FPP can simulate well the one published as ISO DP 8608 when the parameters are selected properly. The power spectrum of a spring reaction is evaluated regarding the effect of vehicle speed, the sensitivity of the spring constant and the deviation caused by uncertain damping, together with that of the bending moment in the model beam.

Key Words: Structural Analysis, Vehicle, Power Spectrum, Rough Road, Filtered Poisson Process, Uncertain damping, Stochastic FEM

1. 緒 言

燃料消費量低減のために自動車車体の軽量化が進められており、振動・騒音の観点から軽量化に際して従来にまして詳細な研究が必要とされている⁽¹⁾。乗り心地対策のほかに、部材疲労に対処する意味でも車体振動の解析は重要である。振動固有値解析、一質点近似の変位・加速度応答のスペクトル解析は材料疲労解析⁽²⁾には不十分であり、少なくとも発生内力の定量的推定に有効な知見が望まれる。

本研究では、自動車車体を前後輪からの2点不規則励振をうけるはりとする有限要素モデルを用い、発生内力推定のためのスペクトル解析を行う。サスペンションとタイヤの減衰はダンパ要素としてモデル化され、その強さは減衰定数の形で与えられている⁽³⁾。この場合、減衰マトリックスは剛性または質量に比例しない。本研究では、非比例形減衰が存在する場合のスペクトル解析の定式を示す。さらに確率有限要素法を応用した不確定な減衰定数に対する内力スペクトルの変

動解析、サスペンション剛性の確定的変化に対する感度解析を行う。

上記解析においては、不規則な路面凹凸のパワースペクトルが入力として必要となる。路面入力パワースペクトルには両対数目盛において直線近似によるISO案⁽⁴⁾が存在する。ISO案は直線近似のため、少波数領域でスペクトルが過大になり、通常は何らかの形で上限打ち切りが行われる。本研究では、フィルタードポアソン過程(以下FPPと略記する)を不規則表面評価に利用する手法⁽⁵⁾を応用し、0.1~5 cycle/mの路面入力パワースペクトルの注目領域でISO案とほぼ一致するスペクトルの創成を行い不規則振動解析の入力とする。

2. スペクトル解析の定式

2.1 運動方程式のモード分解 本節では、不確定なダンパ形非比例減衰の介在する振動系に関するスペクトル解析の定式化を行う。この場合は減衰マトリックス $[C]$ は実モーダルマトリックスの左右乗積により対角化されない。したがって運動方程式を複素固有値解析に基づく複素固有モードによりモード分解する。剛性、質量マトリックスを $[K]$, $[M]$ とし、減衰のみが不確かで式(1)で表される場合、境界条件処理後

* 昭和60年12月4日 第935回講演会において講演、原稿受付 昭和60年6月12日。

** 正員、東京大学大学院 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

*** 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

の運動方程式は式(2)と書き表される⁽⁶⁾.

$$[C] = [\bar{C}] + \sum_{j=1}^N [C_j] \alpha_j \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$[A]\{\dot{u}(t)\} - \left([\bar{B}] + \sum_{j=1}^N [B_j] \alpha_j \right) \{u(t)\} \\ = - \begin{bmatrix} [0] \\ [M][R] + [M_g] \end{bmatrix} \{\ddot{v}_g(t)\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし,

$$[A] = \begin{bmatrix} -[K][0] \\ [0] [M] \end{bmatrix}, \quad [\bar{B}] = \begin{bmatrix} [0] - [K] \\ -[K] - [\bar{C}] \end{bmatrix} \\ [B_j] = \begin{bmatrix} [0] [0] \\ [0] - [C_j] \end{bmatrix}, \quad \{u(t)\} = \begin{Bmatrix} \{v(t)\} \\ \{\dot{v}(t)\} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで, $v(t)$ は実変位, $\{\ddot{v}_g(t)\}$ は入力加速度, $\bar{\cdot}$ は時間微分を意味し, $[R] = -[K]^{-1}[K_g]$ である⁽⁶⁾. 複素固有モードは式(4)から定める. $i=1 \sim 2n$ は固有次数である. $u(t)$ は i 次固有ベクトルに対する一般化座標 $q^i(t)$ を用いて式(5)により表される. また, $[C]$ の不確かさによる $u(t)$ の不確かさは $q^i(t)$ の変動により表し, $q^i(t)$ の変動は確率変数 α_i に関する二次までのテイラー展開により表現する.

$$[\bar{B}]\{\bar{\phi}\}^i = \bar{\lambda}^i [A]\{\bar{\phi}\}^i \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\{u(t)\} = \sum_{i=1}^{2n} \{\bar{\phi}\}^i q^i(t) \equiv [\bar{\phi}]\{q(t)\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$q^i(t) = \bar{q}^i(t) + \sum_{j=1}^N q_j^{iI}(t) \alpha_j \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N q_j^{iII}(t) \alpha_j \alpha_l \quad \dots\dots\dots (6)$$

以後, $\bar{\cdot}$ は確定項, I, II は一次・二次変動率を意味する. 第 p 自由度の実変位 $v_p(t)$ は式(6)を式(5)に代入し式(6)と同形の式(7)により求められる.

$$v_p(t) = \bar{v}_p(t) + \sum_{j=1}^N v_{pj}^I(t) \alpha_j \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N v_{pjl}^{II}(t) \alpha_j \alpha_l \quad \dots\dots\dots (7)$$

さらに式(5)を式(2)に代入し, $\{\bar{\phi}\}^T [A] \{\bar{\phi}\}^j = \delta_{ij} a_i$ (δ_{ij} : クロネッカーのデルタ)の直交性を利用すると, 式(2)の $q^i(t)$ に関するモード分解が可能となり, 各未知数の決定方程式は以下のように得られる.

$$\bar{q}^i(t) = - \sum_{r=1}^M b_r^i \int_0^t e^{\lambda^i(t-\tau)} \ddot{v}_{gr}(\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$q_j^{iI}(t) = \sum_{k=1}^{2n} d_k^{ij} \int_0^t e^{\lambda^i(t-\tau)} \bar{q}^k(\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$q_j^{iII}(t) = \sum_{k=1}^{2n} d_k^{ij} \int_0^t e^{\lambda^i(t-\tau)} q_i^{kI}(\tau) d\tau \\ + \sum_{k=1}^{2n} d_k^{il} \int_0^t e^{\lambda^i(t-\tau)} q_j^{kI}(t) d\tau \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで

$$[b^i \dots b_M^i] = \frac{1}{a_i} [\bar{\phi}]^i \begin{bmatrix} [0] \\ [M][R] + [M_g] \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$[d^{ij} \dots d_{2n}^{ij}] = \frac{1}{a_i} [\bar{\phi}]^i [B_j] [\bar{\phi}] \quad \dots\dots\dots (12)$$

また, M は複数加振入力の数であり, $\ddot{v}_{gr}(t)$ は第 r 番目の入力加速度である.

2.2 パワースペクトルとその変動評価 路面形状は凹凸の集合平均が零である定常空間確率過程であるとする. 十分長時間経過後の車体振動の変位クロススペクトルは第 p, m 自由度の絶対変位 $z_p(t), z_m(t)$ の相互相関関数式(13)

$$R_z(\tau) = E[z_p(t) z_m(t+\tau)] \quad \dots\dots\dots (13)$$

のフーリエ変換として求められる. 式(7)の動的変位と準静的変位⁽⁶⁾の和として得られる絶対変位が変動を含むことを考慮して, 変位のクロススペクトルの確定項とその変動率は二次近似で式(14)および式(15)~(17)の形で得られる. これに, 確率変数 α_j の統計的性質を示すデータを入力すれば, クロススペクトルの統計的性質を定量的に評価し得る.

$$S^{pm}(\omega) = \bar{S}^{pm}(\omega) + \sum_{j=1}^N S_j^{pmI}(\omega) \alpha_j \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N S_{jl}^{pmII}(\omega) \alpha_j \alpha_l \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\bar{S}^{pm}(\omega) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \bar{\phi}_{pi} \bar{\phi}_{mk} \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^M b_r^i b_s^k S_g^{rs}(\omega) z_i^1(\omega) z_k^2(\omega) - \sum_{i=1}^{2n} \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^M b_r^i R_{ms} S_g^{rs}(\omega) z_i^1(\omega) \\ - \sum_{i=1}^{2n} \bar{\phi}_{mi} \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^M R_{pr} b_s^i S_g^{rs}(\omega) z_i^2(\omega) + \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^M R_{pr} R_{ms} S_g^{rs}(\omega) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$S_j^{pmI}(\omega) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \bar{\phi}_{pi} \bar{\phi}_{mk} \sum_{q=1}^{2n} \sum_{s=1}^M d_q^{ij} b_s^k S_g^{qs}(\omega) z_i^1(\omega) z_k^2(\omega) z_q^2(\omega) \\ - \sum_{i=1}^{2n} \sum_{r=1}^M \bar{\phi}_{mi} R_{pr} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{s=1}^M d_k^{ij} b_s^k S_g^{rs}(\omega) z_i^2(\omega) z_k^2(\omega) \\ + \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \bar{\phi}_{pi} \bar{\phi}_{mk} \sum_{q=1}^{2n} \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^M d_q^{ij} b_r^k S_g^{qs}(\omega) z_i^1(\omega) z_q^1(\omega) z_k^2(\omega) \\ - \sum_{i=1}^{2n} \sum_{r=1}^M \bar{\phi}_{pi} R_{mr} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{s=1}^M d_k^{ij} b_s^k S_g^{rs}(\omega) z_i^1(\omega) z_k^2(\omega) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned}
S_{j_l}^{p_{ll}}(\omega) = & \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \bar{\phi}_{p_i} \bar{\phi}_{m_k} \sum_{q=1}^{2n} \sum_{u=1}^{2n} \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^M b_i^t b_s^u d_q^{k^j} d_u^{q^j} s_g^{rs}(\omega) z_i^1(\omega) z_k^2(\omega) z_q^3(\omega) z_u^4(\omega) \\
& + \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \bar{\phi}_{p_i} \bar{\phi}_{m_k} \sum_{q=1}^{2n} \sum_{u=1}^{2n} \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^M b_i^t b_s^u d_q^{k^j} d_u^{q^j} s_g^{rs}(\omega) z_i^1(\omega) z_k^2(\omega) z_q^3(\omega) z_u^4(\omega) \\
& - \sum_{i=1}^{2n} \sum_{r=1}^M \bar{\phi}_{m_i} R_{pr} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{q=1}^{2n} \sum_{s=1}^M b_s^j d_k^{ij} d_q^{k^j} s_g^{rs}(\omega) z_i^2(\omega) z_k^2(\omega) z_q^3(\omega) \\
& - \sum_{i=1}^{2n} \sum_{r=1}^M \bar{\phi}_{m_i} R_{pr} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{q=1}^{2n} \sum_{s=1}^M b_s^j d_k^{ij} d_q^{k^j} s_g^{rs}(\omega) z_i^2(\omega) z_k^2(\omega) z_q^3(\omega) \\
& + 2 \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \bar{\phi}_{p_i} \bar{\phi}_{m_k} \sum_{q=1}^{2n} \sum_{u=1}^{2n} \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^M b_i^t b_s^u d_q^{k^j} d_u^{q^j} s_g^{rs}(\omega) z_i^1(\omega) z_k^1(\omega) z_u^1(\omega) z_q^2(\omega) \\
& + S^* \dots\dots\dots(17)
\end{aligned}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
z_i^1 &= \{-\operatorname{Re}(\bar{\lambda}^i) + \operatorname{Im}(\bar{\lambda}^i) + \omega\} / G_1 \\
z_i^2 &= \{-\operatorname{Re}(\bar{\lambda}^i) + \operatorname{Im}(\bar{\lambda}^i) - \omega\} / G_2 \\
G_1 &= \{\operatorname{Re}(\bar{\lambda}^i)\}^2 + \{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}^i) + \omega\}^2 \\
G_2 &= \{\operatorname{Re}(\bar{\lambda}^i)\}^2 + \{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}^i) - \omega\}^2
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

また、 S^* は式(17)右辺前4項の $z_i^1(\omega)$, $z_k^2(\omega)$ を置き換えて得られるものである。 s_g^{rs} などは第 r 、第 s 番の入力加速度のクロススペクトルなどである。

3. FPPによる路面形状のスペクトル表示

式(15)などにおいては路面形状による入力スペクトルが必要となる。本研究においては、不規則路面をFPPとして表現し、入力スペクトルを創成する。すなわち、路面形状をポアソン分布に従って発生している正弦波形状の凹所の集合として式(19)により表されると仮定する。

$$w(x) = \sum_{m=1}^{N(x)} a_m \sin \frac{\pi}{b_m} (x - \xi_m) \dots\dots\dots(19)$$

ここで、 $N(x)$ は距離 x 間の凹所の発生個数でポアソン分布に従うとし、単位長さあたりの平均発生個数を K とする。また、 m 番めの凹所の振幅 a_m は平均を $\bar{a}$ とする指数分布するものとし、波長 b_m は最大値と最小値を L 分割した離散的な値で一様分布とする。 ξ_m は凹所の発生位置である。この時、路面凹凸のパワースペクトル $S(n)$ は式(19)に基づく式(20)と求められる⁽⁵⁾⁽⁷⁾。

$$S(n) = \sum_{m=1}^L 4K\bar{a}^2 \left(\frac{b_m}{\pi} \right)^2 \frac{(1 + \cos 2b_m n \pi)}{(1 - 4b_m^2 n^2)} P(b_m) \dots\dots\dots(20)$$

ここで、 n は空間周波数(cycle/m)、 $P(b_m)$ は b_m の確率分布関数であり、本計算では $L=20$ とした。

本研究では、上述の仮定に基づき、路面のパワースペクトルを創成するが、そのパラメータは数回の試行の後、表1の値に設定した。2種類の路面に対し表1のパラメータによるパワースペクトルとISO案の比較を図1に示す⁽⁴⁾。

両者は $n=0.5 \sim 5$ cycle/mの範囲でよく一致している。FPPによるパワースペクトルが $n \leq 0.1$ で一定値に漸近する傾向はISO案の直線表示と異なる。 $n \approx 1$ において、パワースペクトルが有限値をとるほうが、両対数目盛で直線的に増大するよりも自然であろう。凹所の形状、パラメータの設計を変えて、ISO案の直線により近づけることも可能であるが、注目される空間周波数領域 $n=0.5 \sim 5$ での一致は満足すべきものであるので、式(20)を入力パワースペクトルに用いる。

4. 自動車車体の内力応答解析

4.1 解析モデル 図2に本研究で用いる自動車車体の解析モデルを示す。その諸元は文献(3)所載の小形乗用車のものである。重量分布と剛性分布は不明であるので、総重量1240 kgfに対して図示のごとくに仮定し、後者は曲げ剛性 $EI=1.3182 \times 10^4$ kgf $\cdot$ m²の一定であるはり要素で表現する。サスペンションとタイヤのばね定数と減衰定数は $k_1=3.57$ kgf/mm, $k_2=2.14$ kgf/mm, $k_3=k_4=84.0$ kgf/mm, $C_1=0.536$ kgf $\cdot$ s/mm, $C_2=0.322$ kgf $\cdot$ s/mm, $C_3=C_4=0.09$ kgf $\cdot$ s/mmである。不規則路面からの入力3章の所論に従って創成されるパワースペクトルの引数を励振周波数へ車速度に基づき補正した $s^{11}(\omega)$, $s^{22}(\omega)$ および車速とホイールベース s_0 で定められるクロススペクトル $s^{12}(\omega)$, $s^{21}(\omega)$ である。

図3は図2の諸元を用いて2章の複素固有値解析確定解と減衰を無視した実固有値解析の比較を示す。はり近似された車体の複素固有モードの絶対値(実線)

表1 FPPの各パラメータの値

ROAD CLASS	K (1/M)	$\bar{a}$ (M)	b(M)
VERY POOR	8	0.08	0.20~1.5
AVERAGE	4	0.04	0.05~1.0

は減衰が小さいので実固有モードに類似している。実固有振動数は一次が1.0 Hz, 二次が4.6 Hz, 三次が12.9 Hzである。図3中のSはサスペンション位置を示す。本解析モデルは車体をより近似しているので振動モードはトラックのそれに近い。

4.2 前サスペンション内力 不規則励振による車体応答の一つの力学量として前サスペンションの内力 F に注目する。本解析では簡単なモデルを用いているので、サスペンション様式、形状に依存する応力の評価には立ち入らない。したがって、前サスペンションと車体連結点Sの振動変位 $v_s(t)$ と前タイヤ中心点振動変位 $v_t(t)$ の差に基づく $F = k_1 \{v_s(t) - v_t(t)\}$ を F の評価量とする。この時、 F のパワースペクトル $S_F(f)$ は自己相関関数のフーリエ変換により式(21)と得られる。なお、本評価は確定項に関するものである。

$$S_F(f) = k_1^2 [s_{ss}(f) + s_{tt}(f) - 2 \operatorname{Re}\{s_{st}(f)\}] \quad \dots\dots\dots(21)$$

この定式に基づき図1のvery poorに対応する路面データを入力として求めた内力スペクトルを図4に示す。車速度増加に伴うスペクトル増加の定量的関係とスペクトルピーク周波数の増加が示されている。

4.3 サスペンション剛性の内力への影響 本研究においては内力をばね定数と振動変位差の積として評価している。ばね定数の変化は固有振動モードひいては振動変位差にも変化を及ぼす。図5に前サスペンションのばね定数 k_1 を確定的に変化させた場合の前

サスペンション内力スペクトルの変化をvery poor路面、車速 $V = 20 \text{ km/h}$ に対して示す。その他のばね定数 $k_2, k_3 = k_4$ の変化が前サスペンション内力パワースペクトルに及ぼす影響は固有振動モードの変化を通じてのみであるので、 k_1 の影響に比べて約10%と小さい計算結果も得られている。

4.4 不確かな減衰定数の内力に及ぼす影響 ばね定数は設定し得るものであるが、サスペンションの減衰定数は減衰機構が摩擦である場合の例のように不確定量として取扱われるべきものである。したがって、減衰定数の影響に関しては、図2の各減衰定数を確率変数 α_j を用いて式(22)と仮定し、不確定量に関する影響評価は2章の所論による。

$$c_j = \bar{c}_j(1 + \alpha_j), \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad \dots\dots\dots(22)$$

さらに、確率変数 α_j はその期待値が零、分散が $\sigma^2 = 0.3^2$ である互いに独立な正規確率変数としてパワースペクトルの分散評価を行う。図6にvery poor路面に関しばね定数には前述の確定諸元を与えた場合の前サスペンション内力パワースペクトルの期待値(実線)と $\pm 1\sigma$ (破線等)の解析結果を示す。この内力の分散計算は一次近似法によっている。

4.5 内力曲げモーメントのパワースペクトル 本解析モデルは図3に示すように顕著な曲げが三次

図1 FPPによるパワースペクトルとISO案の比較

図2 自動車の解析モデル

図3 複素固有モードと実固有モードの比較

モードに現れている。一般に、車体振動による内力曲げモーメントのパワースペクトルと周波数の関係がどのようなものであるかを推量するために、はり要素モデルの曲げ剛性 EI と変位関数から内力曲げモーメントを解析し、その結果を図7に示す。モーメント評価点は図2の左から第2要素の左端から要素長さの5/6の点で解析モデルのほぼ中央点である。本計算ではばね定数と減衰定数ともに前述の確定諸元を用いている。本計算では曲げモーメントパワースペクトルは前サスペン

ション内力と異なり、高次側で減少していない。はり要素による近似に基づいているので、図7の結果を実際の子体には引きうつして定量的に論ずることは無意味である。しかし、図7は曲げモーメントについては、より実用に近いモデル化と実際のな曲げモーメントまたはそれにより発生する応力の評価法を用いて高次側でも評価する必要を示唆していると考えられる。

6. 結 言

本研究においては、減衰が減衰定数の形で与えられ、剛性または質量に比例しない非比例形減衰が存在する振動系の不規則励振に対するスペクトル解析を複素固

図4 内力パワースペクトルの車速依存性

図5 前サスペンション剛性変化と内力変化の関係

図6 内力パワースペクトルの期待値と $\pm 1\sigma$ 限界

図7 車体中央点近傍の曲げモーメントスペクトルの推定

有値問題に基づいて定式化した。さらに減衰が不確かである場合のスペクトルの変動率の定式も行い、スペクトル変動の定量的評価を可能にした。この定式を不整路面を走行する自動車車体の内力解析に適用した。不整路面に関しては、FPPによる路面表示を試み、路面水準についてのISO案をよく近似し得るパラメータを選定した。車体ははり要素で曲げ剛性を表現した簡単な有限要素でモデル化し、前後論からの2点励振をうける二次元の数値解析を行った。得られた知見は以下のとおりである。

(1) 不整路面走行時の前サスペンション内力のパワースペクトルと車速の関係が明らかとなった(図4)。

(2) 同上のスペクトルに及ぼす前サスペンションばね定数の影響が明らかとなった(図5)。

(3) 不確定な減衰定数に対する同上のスペクトルの期待値と $\pm 1\sigma$ 限界が求められた(図6)。

(4) はり要素近似の範囲内であるが、発生曲げモーメントは高周波側でも減少せず、これは曲げモーメントまたはそれに対応する応力はより詳細なモデルを用いて高次振動においても検討する必要があることを示唆している。

本研究に際しては、東京大学工学部 久田俊明助教授より種々有益な助言を賜った。深甚な謝意を表する。

文 献

- (1) 江頭・西岡・富田・猪田, 自動車技術会学術講演会前刷集, 842 (昭和59-5), 119.
- (2) Landgraf, R.W. and Conle, A, *Proc. XX FISITA Congr.*, (1984), 4, 124.
- (3) Levy, S. and Wilkinson, J.P.D., *The Component Element Method in Dynamics*, (1976), 184, McGraw-Hill.
- (4) 山川, 自動車技術会学術講演会前刷集, 851 (昭60-5), 135.
- (5) 辻・久田・北川, 機論, 49-439, A (昭58), 331.
- (6) 中桐・久田・利光, 機論, 51-472, C (昭60), 掲載予定.
- (7) 星谷, 確率論手法による振動解析, (昭54), 67, 鹿島出版会.