体積力法によるき裂の弾塑性解析*

(き裂をもつ無限板の引張り)

西 谷 弘 信**, 陳 玳 珩***

Elastic-Plastic Analysis of a Crack by the Body Force Method (Tension of an Infinite Plate with a Crack)

by Hironobu NISITANI and Dai-Heng CHEN

This paper is concerned with the elastic-plastic analysis of an infinite plate with a crack under von Mises' and Tresca's yield condition. The method of analysis is by the body force method extended to the elastic-plastic problems. In this method, the solutions are obtained by superposing the stress fields of a pair of point forces in an infinite plate with a crack, so as to satisfy the constitutive equation of plasticity. The main results obtained are as follows: (1) If Tresca's yield condition is used for the strain hardening material under the plane stress state, the plastic zone near a crack tip is found to be "←" shape, i. e. one part satisfying the yield condition $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s$ extends slenderly along the x axis, and another part satisfying the yield condition $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s$ extends at about 60° to the x axis. When the rate of strain hardening is very low, the plastic zone becomes a line shape similar to when the Dugdale model is applied to a non-hardening material. (2) If the stress intensity factors under the combinations of several loads and crack lengths are equal, the distributions of elastic-plastic stress and strain are nearly the same, independently of crack length, within the range where the plastic zone is smaller than half of the respective crack lengths.

Key Words: Plasticity, Elastic-Plastic Analysis, Boundary Element Method, Body Force Method, Plane Stress, Plane Strain, Infinite Plate, Mode I Crack, Mises' Yield Condition, Tresca's Yield Condition

1. 緒 言

き裂の拡大に先立って、一般にき裂先端近傍に塑性変形が生じる。したがって、破壊機構を検討するためには、き裂先端の弾塑性解析を行う必要がある。

き裂の弾塑性解析をモードIII以外の問題に対して理論的に閉じた形で行うことは一般に難しい。したがって、実用上重要なモードI形き裂の解析は、ほとんどの場合有限要素法などの数値解析によってなされている⁽¹⁾。これまでの有限要素法による数値解析は、大部分き裂と自由縁が干渉する有限幅の平板を対象とし、Misesの降伏条件を用いた解析であり、材料特性、応力状態などによるき裂先端の弾塑性挙動の影響を系統的に検討したものはみあたらないようである。本研究では、き裂の影響を純粹に評価するため、き裂をもつ無限板の弾塑性解析を行った。解法は著者がき裂に提案した、弾塑性問題における体積力法⁽²⁾⁽³⁾である。体積力法は、塑性域が広がると予想される部分しか分割しないので、有限要素法と比較して、より小さい方程式系で注目したい領域をより精度よく解析できること

や無限板の問題の解析も可能であることなどの特徴をもっている。また、降伏条件としては、Misesの降伏条件のほかに、Trescaの降伏条件をも採用する。これによって、降伏条件、加工硬化率、応力状態(平面応力状態と平面ひずみ状態)などがき裂先端の弾塑性挙動に及ぼす影響を検討する。

2. 解 析 方 法

解析の対象は、図1に示すような、遠方で一軸引張応力をうける、き裂を有する無限板である。一軸引張りの応力-ひずみ関係として、図2で表される直線硬化則を仮定する。すなわち、塑性応力-ひずみ関係を式(1)のように仮定する。

図 1 き裂をもつ無限板

* 昭和60年10月2日 第63期全国大会講演会において講演。
原稿受付 昭和60年1月17日。

** 正員, 九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

*** 正員, 九州大学大学院。

$$\sigma_x = \sigma_s + H' \int d\epsilon_x^p \dots\dots\dots (1)$$

(σ_s : 降伏応力, H' : 加工硬化率)

式(1)と対応して, Misesの説を採用する場合, 相当応力-相当塑性ひずみ関係は

$$\bar{\sigma} = \sigma_s + H' \int d\bar{\epsilon}^p \dots\dots\dots (2)$$

($\bar{\sigma}$: 相当応力, $d\bar{\epsilon}^p$: 相当塑性ひずみ増分)

となり, Trescaの説を採用する場合, 最大せん断応力-せん断塑性ひずみ関係は

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_s + \frac{H'}{3} \int d\gamma_{\max}^p \dots\dots\dots (3)$$

($\tau_{\max}$: 最大せん断応力, $d\gamma_{\max}^p$: 最大せん断塑性ひずみ増分)

となる。

加工硬化率の影響を調べるため, H'/E を主に 0.01 および 0.3 として解析を行った。前者は弾完全塑性体に近く, 後者は加工硬化率が十分高い場合に相当している。また, 計算の便宜上, 降伏応力 $\sigma_s = 196$ MPa, 縦弾性係数 $E = 1.96 \times 10^5$ MPa, ポアソン比 $\nu = 0.3$ とした。

解析方法は弾塑性問題における体積力法⁽²⁾である。本研究では, き裂の縁での応力自由条件を自動的に満足させるため, 基本解としてき裂が存在する無限板中に集中力が作用するときの解を用いる。

体積力法では, 塑性域の存在によって付加される変位場, 応力場が, 完全弾性体中の塑性域に相当する領域中にうめこまれた体積力対による変位場, 応力場でおきかえられることに基づいて, 塑性域が生じると予想されるき裂先端付近に, 適当な密度の引張形体積力対 f_x, f_y およびせん断形体積力対 f_{xy} を分布させる。

問題の対称性により第一象限だけのき裂先端付近を三角形要素に分割し, 分割された各三角形内での体積力対の密度を一定とする。すなわち, 離散化した $\{f\}$ で, 塑性域に分布させるべき体積力対の密度を表す。図3にその分割の一例を示す。

図2 解析に仮定した一軸の応力-ひずみ関係

ひずみ増分理論に基づいて, 三角形要素を一つずつ降伏させていく方法を採用している。各荷重増分に対して, 体積力対の密度の変化 $\{f\}$ は, 次の三つの方程式から求まる⁽²⁾。

(1) 塑性域内における応力増分 $\{\delta\}$ の式:

$$\{\delta\} + \{f\} = [\sigma^*] \{f\} + \{\sigma_\infty\} \cdot \sigma_\infty \dots\dots\dots (4)$$

ここで, $[\sigma^*]$ はき裂が存在する無限板中の集中力対の基本解を各三角領域で積分して得られる各三角形領域の中心点での応力成分の影響係数マトリックスであり, $\{\sigma_\infty\}$ は遠方荷重による各三角形領域の中心点での応力成分である。

(2) 体積力対密度の増分と塑性ひずみ増分との関係式:

$$\{f\} = [D^e] \{\epsilon^p\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで, $[D^e]$ は弾性体の Hooke の法則を表す弾性マトリックスである。

(3) 塑性ひずみ増分と応力増分とを関係づける構成方程式:

$$\{\epsilon^p\} = [S] \{\delta\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで, $[S]$ は応力増分と塑性ひずみ増分を結ぶ塑性マトリックスである。Misesの降伏条件を採用する場合, $[S]$ の表示式は文献(2)に示してある。Trescaの降伏条件を採用する場合, $[S]$ の表示式は付録に示すようになる。

3. 解析結果および考察

図4, 5は, Misesの降伏条件を採用する場合の平面応力と平面ひずみ状態での負荷応力 σ_∞ の増加に伴うき裂先端付近の塑性域の成長状態を示すものである。図には, 弾性応力分布から得た, き裂先端近傍で Mises の降伏条件を満たしている範囲も示してある。モードIII形の場合の弾完全塑性体に関する厳密解によれば, 塑性域は, 弾性解において降伏条件が満たされている範囲をそのままき裂の前方に動かしたものとなっている⁽⁴⁾。しかし, 図4, 5からわかるように, モー

図3 要素の分割例

ドI形の場合、数値解析で得られた塑性域は、弾性応力分布において降伏条件が満たされる範囲と比較して、その寸法・形状はそれほど異なっていないが、それをき裂の延長線に向かって少し倒したようになっている。加工硬化率が高い材料の場合 ($H'/E=0.3$)、その倒す角度が小さい。また、平面ひずみ状態では、 σ_z の存在により、塑性域が平面応力状態でのそれより小さいが、その差は、よく示されている。弾性応力の特異項だけから得た、両応力状態での Mises の降伏条件を満足する範囲の差⁽⁵⁾より小さい。

図6は、Trescaの降伏条件に基づく、平面応力状態での塑性域の広がりを示すものである ($H'/E=0.01$)。数値解析で得られた塑性域は、弾性解で得られるそれと大きく異なっている。この場合、塑性域は“←”状となる。すなわち、塑性域には二つの部分がある。部分1は

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s, \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{array} \right\}$$

によるもので、き裂の延長線にそって帯状のように伸びており、部分2は $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s$ によるもので、 x 軸

図 7 Tresca の降伏条件を採用する場合の平面応力状態でのき裂先端の塑性域 ($\sigma_\infty/\sigma_s=0.45$)

と約 60° をなす帯状となっている。また、図 6 の (b) と比較するため、同じ負荷応力のもとでの、加工硬化率 $H'/E=0.001$ と $H'/E=0.3$ の場合の塑性域の広がりを図 7 に示す。これらの図の比較からわかるように、塑性域に $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s$ による部分が存在することと $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s$ による部分が有限幅をもつことは、材料の加工硬化特性に基づいている。すなわち、図 6 の場合、き裂の延長線にそって塑性域が生じて、材料の加工硬化特性によって、塑性域の両側は負荷の増加に伴って応力が大きくなり降伏状態に達することができる。加工硬化率が低くなると〔図 7 (a)〕、 $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s$ による塑性域の幅がせまくなり、また $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s$ による塑性域の部分も小さくなる。したがって、弾完全塑性体の場合 ($H'/E=0$)、とくに明りょうな上、下降伏点をもつ材料では、き裂先端の塑性域が細長くなり、 $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s$ によるものだけとなる。すなわち、この場合、Dugdale モデルは非常にいい近似であると思われる。しかし、ひずみ硬化材の場合、Dugdale モデルではその加工硬化特性を考慮し塑性域にそって $\sigma_y = \sigma(\delta_y)$ (δ_y : 線状塑性域に集中する塑性変位) と仮定しても、 $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s$ による塑性域を表すことができないので、その適用性には限界がある。また、線状塑性域に仮定する $\sigma_y = \sigma(\delta_y)$ なる関係と実際の材料の加工硬化特性との対応にも問題がある。

平面ひずみの場合の Tresca の降伏条件による塑性域は、図 8 に示すように、 $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s$ によるもので、 x 軸と約 60° をなしている。

次に塑性域の x 軸への投影長さを塑性域長さ l として検討する。図 9 に $H'/E=0.01$ の場合の塑性域長さの相対値 l/a と負荷応力の相対値 σ_∞/σ_s との関係を示す。数値解析で得られた塑性域長さと Dugdale モデルによるそれとの比は、図 10 に示すように、加工硬化率が低いほど、1 に近く、 $H'/E=0.01$ の場合では約 0.85 であり、 $\sigma_\infty/\sigma_s=0.1 \sim 0.5$ の範囲でその比がほぼ変化しない。また、Mises の降伏条件による塑性域長さは、Tresca の降伏条件によるそれより小さく、そ

図 8 Tresca の降伏条件を採用する場合の平面ひずみ状態でのき裂先端の塑性域 ($\sigma_\infty/\sigma_s=0.45$, $H'/E=0.01$)

図 9 塑性域長さの相対値 l/a と σ_∞/σ_s との関係

図 10 平面応力場合の、Tresca の降伏条件による塑性域長さと Dugdale モデルによるそれとの比および Tresca, Mises の降伏条件による塑性域長さの比

の比は、本計算での負荷応力の範囲では加工硬化率とあまり関係せず、約 0.8 である。さらに、図 11 に、各種条件下における、平面ひずみ状態と平面応力状態での塑性域長さの比を示す。 $\sigma_\infty/\sigma_s=0.1 \sim 0.6$ の範囲でその比は約 0.4~0.7 である。

図 12~15 は、平面応力の場合について、き裂長さを a として、き裂先端からの距離 r と、 x 軸上の応力

図 11 平面ひずみ，平面応力状態での塑性域長さの比

図 12 平面応力場合のき裂先端の塑性域における \$\sigma_y\$ の分布 (Tresca の降伏条件)

\$\sigma_y\$ または相当塑性ひずみ \$\int d\bar{\epsilon}^p\$ (Tresca の降伏条件を採用する場合には \$\int d\gamma_{max}^p\$) との関係を図対数線図で示したものである。横軸は \$r\$ と Dugdale モデルによる塑性域長さの近似値 \$\{(\pi^2 \sigma_s^2) / (8 \sigma_s^2)\} a\$ との比で表してある。したがって，き裂長さを 1 として求めた，図 12～15 の各負荷応力 \$\sigma_{\infty} / \sigma_s\$ のもとでの応力，ひずみ分布は，塑性域長さがほぼ一定のもとで，き裂長さが \$1 / \{(\pi^2 \sigma_s^2) / (8 \sigma_s^2)\}\$ なる関係で変化し，一方弾性応力拡大係数は揃っているときの，応力，ひずみ分布とみなすこともできる。そのことを考慮すれば，各負荷応力のもとでの計算点がき裂先端近傍 (\$r \leq 0.3a\$，塑性域長さ \$< 0.5a\$) でほぼ一つの帯に集まっていることが

図 14 平面応力場合のき裂先端の塑性域における \$\sigma_y\$ の分布 (Mises の降伏条件)

図 13 平面応力場合のき裂先端の塑性域における \$\int d\gamma_{max}^p\$ の分布 (Tresca の降伏条件)

図 15 平面応力場合のき裂先端の塑性域における \$\int d\bar{\epsilon}^p\$ の分布 (Mises の降伏条件)

ら、塑性域長さがき裂長さの約半分以下となる負荷応力のもとでの応力、ひずみ分布は、応力拡大係数のみによってほぼ一義的に決まることがわかる。このことは、かなりの塑性変形(き裂長さの約半分以下)が生じるき裂問題においても、線形破壊力学のパラメータである応力拡大係数が非常に有効であることを示している。この原因は、著者の一人が提唱した“線形切欠力学”⁽⁶⁾の考え方によって理解される。すなわち、き裂先端に小さい塑性域が発生したためのき裂近傍の応力の再分布は、塑性域の各点での体積力対のうめこみに対するき裂の response によって定められるが、き裂先端近傍に限れば、その response はき裂の長さにほとんど関係しない⁽⁷⁾。したがって、弾性応力拡大係数が同じなら、塑性変形が生じて、き裂先端近傍では同じ弾塑性挙動がみられることになる。そしてこの response の等価性が保証されるための制限は、生じた塑性域の寸法が、応力が $r^{-1/2}$ に比例する領域より十分小さいというきびしい制限よりもはるかにゆるい。

本研究の範囲では、き裂先端での塑性応力、ひずみの特異性を考慮した特別な工夫はしていないので、き裂先端のごく近傍での応力、ひずみを高精度で求めることは難しく、また塑性応力、ひずみの特異性に関する議論も十分にはできない。しかし、図 12~15 から認められるように、応力、相当塑性ひずみの両対数線図でのこの配は、き裂先端に近づくに従って $-1/2$ に近づくようである。このことは、折線で近似した応力-ひずみ関係を採用する場合の塑性応力、ひずみの特異性が $-1/2$ になるとする Hutchinson の指摘⁽⁸⁾と同一傾向を示すものである。

なお、平面ひずみ状態と平面応力状態における、き裂近傍の同じ点 ($r=0.02a$) での応力 σ_y の比 (これは両応力状態での応力場の“きびしさ”の比とみなされ

る)を図 16 に示す。 $H'/E=0.01$ の場合、その比は約 1.8 である。この結果は、うすい板の破壊靱性が厚い板のそれより大きくなること⁽⁹⁾と関連していると思われる。

4. 結 論

著者らが提案した弾塑性問題に対する体積力法を用い、Mises の降伏条件および Tresca の降伏条件に基づいて、き裂をもつ無限板の引張りにおける弾塑性解析を行った。解析結果より次の結論が得られた。

(1) ひずみ硬化材の平面応力状態では、Tresca の降伏条件による塑性域の形は“ $\leftarrow$ ”状となる。すなわち、それは $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s$ による、き裂の延長線にそう帯状域と $|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s$ による、約 60° の斜線にそう帯状域とからなる。加工硬化率が低くなると、塑性域がだんだん Dugdale モデルで仮定する線状領域に近づく。

(2) 負荷応力 σ_∞ が $0.6 \sigma_s$ 以下の場合、き裂先端からの距離を $(\sigma_\infty/\sigma_s)^2$ に比例してとれば、その点での応力、ひずみはほぼ等しくなる。すなわち、応力拡大係数をそろえれば、き裂先端に $0.5a$ 以下の塑性域が生じて、き裂先端の弾塑性応力、ひずみの分布はほぼ同じである。

付 録

Tresca の塑性材料に対する [S] の表示式。

ひずみ硬化に関して

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max} &= F \left(\int d\gamma_{\max}^p \right) \\ d\tau_{\max}/d\gamma_{\max}^p &= F' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

と仮定する。この場合、ひずみ増分理論に従えば、一点の応力増分と塑性ひずみ増分とは次式のように塑性マトリックス [S] で結ばれる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x^p \\ \dot{\varepsilon}_y^p \\ \dot{\gamma}_{xy}^p \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_y \\ \dot{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

[S] はこの時点の応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ によって次のように計算される。

(1) $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ の場合：

$$\left\{ \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right\}$$

平面応力状態では、

$$[S] = \frac{1}{4F'} \begin{bmatrix} s_1^2 & & \text{sym} \\ s_2 s_1 & s_2^2 & \\ s_3 s_1 & s_3 s_2 & s_3^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

平面ひずみ状態では、

図 16 平面ひずみ状態と平面応力状態でのき裂近傍の同じ点 ($r=0.02a$) における応力 σ_y の比

$$[S] = \frac{1}{(4F' + E)} \begin{bmatrix} s_1(s_1 - \nu) & s_1(s_2 - \nu) & s_1 s_3 \\ s_2(s_1 - \nu) & s_2(s_2 - \nu) & s_2 s_3 \\ s_3(s_1 - \nu) & s_3(s_2 - \nu) & s_3^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(10)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \right\} \\ s_2 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{(\sigma_y - \sigma_x)/2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \right\} \\ s_3 &= \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

(2) $\sigma_1 > \sigma_x > \sigma_2$ の場合:

平面応力状態, 平面ひずみ状態ともに,

$$[S] = \frac{1}{4F'} \begin{bmatrix} m_1^2 & \text{sym} \\ m_2 m_1 & m_2^2 \\ m_3 m_1 & m_3 m_2 & m_3^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(12)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \\ m_2 &= \frac{(\sigma_y - \sigma_x)/2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \\ m_3 &= \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(13)$$

(3) $\sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2$ の場合

平面応力状態では,

$$[S] = \frac{1}{4F'} \begin{bmatrix} n_1^2 & \text{sym} \\ n_2 n_1 & n_2^2 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(14)$$

平面ひずみ状態では,

$$[S] = \frac{1}{(4F' + E)} \begin{bmatrix} n_1(n_1 - \nu) & n_1(n_2 - \nu) & n_1 n_3 \\ n_2(n_1 - \nu) & n_2(n_2 - \nu) & n_2 n_3 \\ n_3(n_1 - \nu) & n_3(n_2 - \nu) & n_3^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(15)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \right\} \\ n_2 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{(\sigma_y - \sigma_x)/2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \right\} \\ n_3 &= \frac{-\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

文 献

- (1) 宮本, 有限要素法と破壊力学, コンピュータによる構造工学講座 II-3 B, (昭 45), 45, 培風館.
- (2) 陳・西谷, 機論, 51-462, A (昭 60), 571.
- (3) 西谷・陳, 機論, 51-465, A (昭 60), 1471.
- (4) Rice, J. R., *Int. J. Fract. Mech.*, 2-2 (1966), 426.
- (5) Rooke, D. P., *Royal Aircr. Est., Farnborough, Tech. Note CPM*, 29 (1963), 1.
- (6) 西谷, 機論, 49-447, A (昭 58), 1353.
- (7) 西谷・ほか 2 名, 機論, 50-451, A (昭 59), 341.
- (8) Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 16 (1968), 13.
- (9) Winne, D. H. and Wundt, B. M., *Trans. ASME*, 80 (1958), 1643.

討 論

〔質問〕 岸本 喜久雄〔東京工業大学〕

(1) 図 3 のような比較的粗い要素分割を用いて解析されているが, 本手法ではこの程度の要素分割で十分な精度の結果が得られるのか.

(2) き裂先端近傍の塑性域における応力やひずみは J 積分によって代表されるので, 図 12~15 は横軸を J 積分で無次元化すると σ_∞/σ_s のさらに大きな値まで同様の整理が可能になると思われる. したがって, 図 12~15 の結果は, σ_∞/σ_s が 0.6 以下の範囲では, J 積分の値と応力拡大係数から弾性変形を仮定して換算される J 値とがほとんど等しいことに対応していると考えられるがどうか.

〔回答〕 (1) 解析精度を検討するため, 他の研究者の付図 1 に示すようなき裂をもつ大きい板 (平面応力) の有限要素法による計算結果 (付 1) と比較したことがある. この場合, 基準となる引張りの応力-ひずみ関係としては, 有限要素法の解析条件に合わせて, 次式を用いた.

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sigma}{E} + \beta \frac{\sigma_s}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} \right)^n \\ \sigma_s &= 100 \text{ MPa} \\ E &= 10^5 \text{ MPa} \\ \beta &= 0.02 \end{aligned}$$

(付 1) 村上・多比良, 機論, 51-463, A (昭 60), 883.

付図1 有限要素法での解析対象

付図2 有限要素法でのき裂先端部の分割の詳細

$\eta=5$

また有限要素法でのき裂先端近傍の要素分割では、最小三角形要素の一边の長さをき裂半長 a の $1/400$ にとっている (付図2)。これに対して、体積力法ではき裂先端の三角形要素の一边の長さをき裂半長 a の $1/80$ にとっています (図3)。このようにして得られたき裂先端近傍の x 軸にそった応力 σ_y の分布の比較を付図3に示す。付図3から本解析の精度が十分であることが理解していただけると思う。

なお、図3に示した分割は本解析の一例である。負

付図3 有限要素法との比較

荷応力が小さい場合 ($\sigma_\infty/\sigma_s \leq 0.4$) については、本解析ではき裂先端の三角形要素の一边長さをき裂半長 a の $1/160$ にとった。

(2) ご指摘のとおりである。しかし、線形破壊力学における応力拡大係数 K の適用範囲に関しては、一般にき裂先端近傍の応力分布が大きく乱されなければいいという考え方に基づいて、生じた塑性域の寸法が、応力が $r^{-1/2}$ に比例する領域より十分小さいというきびしい制限がつけられている。これに対して、著者らは“線形切欠力学”の考え方に基づいて、小規模降伏条件下で K が使える理由を、response の等価性によって説明してきた。この response の等価性が保証されるための制限は、上述の制限よりはるかにゆるくなっている。本研究の図12~15は、以上のことを示すためのものである。