一次近似二次モーメント法による信頼性指標の
次元普遍性に関する研究*

真下 雅 浩**, 久 田 俊 明***, 中 桐 滋****

A Study of the Dimensional Invariance of the Reliability Index in
Advanced First-Order Second-Moment Method

by Masahiro MASHIMO, Toshiaki HISADA, and Shigeru NAKAGIRI

The dimensional invariance related to the reliability index is examined. The reliability indices β , based on the Advanced First-Order Second-Moment (AFOSM) method by use of the stochastic finite element method, are evaluated in the cases of bars and square plates under tension, whose Young's modulus is regarded as spatial homogeneous stochastic process. The reliability index for the bars is obtained by means of the analytical formulation for continuum. The numerical results show that the reliability indices for several autocorrelation functions converge well with the increase of the finite element division, and the index for the bar agrees well with the analytical one. This suggests strongly that the dimensional invariance holds for the reliability index evaluated by the finite element discretization and AFOSM method.

Key Words: Reliability Engineering, Stochastic Process, Advanced First-Order Second-Moment Method, Reliability Index, Dimensional Invariance, FEM.

1. 緒 言

機械・構造物の設計に際して、従来の経験的に与えられていた安全率に加えて、種々の不確定性を考慮して信頼性指標により構造物の安全性・信頼性を評価する試みが構造信頼性工学の分野でなされている。線形化二次モーメント法に基づき構造応答の期待値と分散を用いて信頼性指標 β_c を評価する考えが Cornell⁽¹⁾により提案された。この指標 β_c は破壊のクライテリオンの定義式に依存する(普遍性の欠如)ので、これを改善した Advanced First-Order Second-Moment 法(以下 AFOSM 法と略記する)による信頼性指標⁽²⁾ β が提案されている。しかし、この信頼性指標 β についても、同一の事象に対して評価に用いる確率変数の個数に依存する次元普遍性の欠如 (lack of dimensional invariance)の問題が指摘されている。構造を有限要素により離散化して解析を行うとき、不確定性を表すために用いられる確率変数の個数は離散化における要素分割

数に支配される場合がある。したがって、有限要素法を用いて信頼性指標 β の解析を行うとき、その次元普遍性の有無を検討しておくことが重要である。

本研究はかかる観点から β の次元普遍性の検討を行うものである。すなわち、ヤング率が一次元および二次元の空間確率過程として変動する棒および正方形板の引張りという簡単な線形弾性問題を取り上げる。まず要素等長、および不等長の有限要素近似に基づく β を数値的に求め、次いで棒を連続体として取扱うときの信頼性指標 β を解析的に求める。そして前者の要素数を増加させると信頼性指標が後者の解析解に収束することを示す。さらに、正方形板の例についても有限要素法による β が分割数を増すに従って一定値に収束することを確認する。この結果は、次元普遍性が成立する場合が存在することを示すとともに、離散化近似解により信頼性指標 β を求める際の分割数についての示唆を与えるものである。

2. AFOSM 法による信頼性指標の評価

2.1 離散系における信頼性指標とその探索アルゴリズム 本節では AFOSM 法における信頼性指標 β の探索法について述べる。AFOSM 法では基本的には考慮の対象とする確率変数についての情報はたかだ

* 昭和60年12月4日 第935回講演会において講演、原稿受付 昭和60年5月13日。

** 学生員、東京大学大学院 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)。

*** 正員、東京大学工学部。

**** 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

か二次までのモーメントであるとする。いま、離散系の n 個の確率変数を期待値が零となるように定義し直して $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$ と表した後、次式⁽³⁾の関係で定められる標準化された確率変数 $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}^T$ ($E[Y_i] = 0, \text{Var}[Y_i] = 1, \text{cov}[Y_i, Y_j] = 0; \forall i, j (i \neq j)$) に変換する。

$$X = (\Phi \text{diag}[\sqrt{\lambda_i}] \Phi^T) Y = DY \dots \dots \dots (1)$$

ここで T は転置を意味し、 λ_i および Φ は X の共分散マトリックス C_X の固有値およびモーダルマトリックスである。 Φ は $\Phi^{-1} = \Phi^T$ となるように規準化する。評価目的に応じて定められる破壊のクライテリオンに従い状態関数 (performance function) を定義する。 $G(Y) > 0$ で安全、 $G(Y) \leq 0$ で破壊 (所定の機能を果たさない) するとして、特に $G(Y) = 0$ により定められる超曲面は破損表面 (failure surface) と呼ばれる。破損表面上で原点から最短距離にある点を設計点 (design point)、その最短距離を信頼性指標 (reliability index) β と定義する⁽²⁾。図 1 に 2 変数の場合の破損表面と β の概念図を示す。仮に Y の結合確率密度関数の等高線が原点を中心とする同心円であるならば設計点は破損領域で確率密度が最も大きい点となる。

$G(Y) = 0$ は一般に Y の非線形関数であり、 β の探索は下式の反復解法による⁽⁴⁾。

$$Y_i^{m+1} = \frac{-G(Y^m) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial G(Y)}{\partial Y_j} \big|_{Y^m} Y_j^m}{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial G(Y)}{\partial Y_j} \big|_{Y^m} \right)^2} \times \frac{\partial G(Y)}{\partial Y_i} \big|_{Y^m} \dots \dots \dots (2)$$

$$\beta = \sqrt{(Y^{m+1})^T Y^{m+1}} \dots \dots \dots (3)$$

ここで m は反復の回数を示し、上式の反復の結果収束した β を信頼性指標とする。

図 1 2 変数の場合の破損表面と β の概念図

2.2 AFOSM 法の連続体への適用

本節ではヤング率が一次元空間確率過程である棒の例を取り、連続体としての β 相当値を求める定式を示す。これは 2.1 節で 1 要素 1 確率変数とし、要素分割数 n を無限大として得られるものである。ヤング率の変動を示す空間確率過程 $X(x) (0 \leq x \leq L, L \text{ は棒の全長})$ を式 (1) に対応する式 (4) を満たす標準化空間確率過程 $Y(u) (0 \leq u \leq L)$ に変換する。

$$X(x) = \int_0^L D(x, u) Y(u) du \dots \dots \dots (4)$$

ここで $D(x, u)$ は $X(x)$ の自己相関関数 $R_X(x_1, x_2) (0 \leq x_1, x_2 \leq L)$ の固有値解析により得られる固有値 $\lambda(t) (0 \leq t \leq L)$ と固有ベクトル $\phi(t, u)$ より式 (5) として得られる。

$$D(x, u) = \int_0^L \phi(t, u) \sqrt{\lambda(t)} \phi(t, x) dt \dots \dots (5)$$

ここで $\lambda(t), \phi(t, u)$ は式 (6) のフレドホルム形同次積分方程式で表される固有値問題より定められる。

$$\int_0^L R_X(x_1, x_2) \phi(x_2) dx_2 - \lambda \phi(x_1) = 0 \dots \dots \dots (6)$$

$\phi(x)$ は $t = t_1$ における固有値 $\lambda(t_1)$ に対応する固有ベクトル $\phi(t_1, x)$ を意味し、式 (6) の一般解は式 (7) で与えられる⁽⁵⁾。

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-\lambda')^r}{r!} \int_0^L \int_0^L \dots \int_0^L \text{Ker} \left(\begin{matrix} \xi_1 \xi_2 \dots \xi_r \\ \xi_1 \xi_2 \dots \xi_r \end{matrix} \right) \times d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_r + 1 = 0 \dots \dots \dots (7)$$

式 (7) より求められる $\lambda' = 1/\lambda$ より $\phi(t)$ は式 (8) と定められる。

$$\phi(t) = R_X(t, \xi) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-\lambda')^r}{r!} \int_0^L \int_0^L \dots \int_0^L \text{Ker} \left(\begin{matrix} t \xi_1 \xi_2 \dots \xi_r \\ \xi_1 \xi_2 \dots \xi_r \end{matrix} \right) \times d\xi_1 \dots d\xi_r \dots \dots \dots (8 \cdot a)$$

$$\text{Ker} \left(\begin{matrix} \xi_1 \xi_2 \dots \xi_r \\ \xi_1 \xi_2 \dots \xi_r \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} R_X(\xi_1, \xi_1) \dots R_X(\xi_1, \xi_r) \\ R_X(\xi_2, \xi_1) \quad \vdots \\ \vdots \\ R_X(\xi_r, \xi_1) \dots R_X(\xi_r, \xi_r) \end{vmatrix} \dots \dots \dots (8 \cdot b)$$

式 (8) 右辺の ξ は $\phi(t)$ の直交性を満たすように決定する。

次いで、 $Y(u)$ を用いて状態関数 $G(Y(u))$ を定義する。このとき 2.1 節の式 (2), (3) を n が無限大の場合に拡張して式 (9), (10) が構成される。したがってこれらの 2 式に基づき、やはり反復手法により設計点と β が評価される。

$$Y_{(u)}^{m+1} = \frac{-G(Y_{(u)}^m) + \int_0^L \left\{ \frac{\partial G(Y(u))}{\partial Y(v)} \right\} Y(v)^m dv}{\int_0^L \left\{ \frac{\partial G(Y(u))}{\partial Y(v)} \right\} Y(v)^m dv} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\beta = \sqrt{\int_0^L \{Y(v)^{m+1}\}^2 dv} \quad \dots\dots\dots (10)$$

3. ヤング率が不確かな棒の解析

3・1 有限要素解析 図2に示すような2種類の一端固定弾性棒の引張りの問題を考える。外力 F は確定的であると、棒のヤング率が次元、すなわち x 軸に沿っての空間確率過程 $E(x)$ により与えられているものとする。ヤング率の期待値 $\bar{E}$ 、棒の長さはともに1とし、 $X(x) = \{E(x)/\bar{E}\} - 1$ で与えられる確率過程の自己相関関数として5種類(表1の5ケース)の関数を選定し、また状態関数を式(11)と設定する。ただし U は自由端変位であり、 $E(x) \equiv \bar{E}$ の場合の U 値は、モデルA, Bについてそれぞれ1.0および0.75である。

$$G = U_c - U \quad \dots\dots\dots (11)$$

U_c はモデルAで1.2、モデルBでは0.9とする。2・1節の定式に従い、棒を有限要素分割して信頼性指標を求める。棒を N 等分し、第 i 要素のヤング率 E_i は要素中央点の x 座標 x_i を用いて $E_i = E(x_i)$ として与える。

$X(x)$ の5ケースの自己相関関数について要素分割

図2 ヤング率が不確かな棒の引張り

数を増加させたときの β の収束状況を表1に示す。 N は要素(等長)分割数、 m は β 探索の際の反復回数を示す。また Var は一次近似法による変位の分散値である。すべてのケースについて分散値は N の増加とともに収束していることがわかる。各要素分割数において、 m に対して収束した β の値には*印を付けてある。これらも N の増加とともに収束していることが確認される。この傾向は要素を不等長に分割しても変わらず、例えばケース2の場合について図3の不等長分割を行うと表2に示す結果を得る。分散値は無論、最終的な β の収束値もケース2の場合にほぼ一致する。

以上の数値計算により、連続体を有限要素分割することによって確率過程を離散化して信頼性指標を求めても、要素分割数を増せば問題はなく、この意味において β が次元普遍性を有している可能性が高いことが一次元確率過程の場合に示された。

3・2 連続体解析 β に次元普遍性があるとすれば3・1節で求めた各反復回数 m においての N に対する β の最終的な収束値が、2・2節において定式化した

表1 ヤング率が不確かな棒の引張りの自由端変位の分散および信頼性指標(等長要素分割)

N	2	4	8	20	40	80
CASE 1 ; $R_X(x) = 0.1^2$, Model A						
Var (x10 ⁻³)	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000
m=1	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
2	1.6800	1.6800	1.6800	1.6800	1.6800	1.6800
3	1.6667*	1.6667*	1.6667*	1.6667*	1.6667*	1.6667*
4	-----	-----	-----	-----	-----	-----
5	-----	-----	-----	-----	-----	-----
CASE 2 ; $R_X(x) = 0.1^2 \exp(- x)$, Model A						
Var (x10 ⁻³)	8.0327	7.5273	7.4001	7.3644	7.3593	7.3580
m=1	2.2315	2.3052	2.3249	2.3306	2.3314	2.3316
2	1.8745	1.9355	1.9317	1.9564	1.9570	1.9572
3	1.8596*	1.9200*	1.9361	1.9406*	1.9413*	1.9415
4	-----	-----	1.9360*	-----	-----	1.9414*
5	-----	-----	-----	-----	-----	-----
CASE 3 ; $R_X(x) = 0.1^2 \sin 2\pi x / 2\pi x$, Model A						
Var (x10 ⁻³)	5.0000	4.6221	4.5404	4.5183	4.5152	4.5144
m=1	2.8284	2.9418	2.9681	2.9754	2.9764	2.9767
2	2.3759	2.4462	2.4644	2.4695	2.4702	2.4704
3	2.3571	2.4236	2.4413	2.4462	2.4469	2.4470*
4	2.3570*	2.4235*	2.4412*	2.4461*	2.4468*	-----
5	-----	-----	-----	-----	-----	-----
CASE 4 ; $R_X(x) = 0.1^2 (1- x) (x \leq 1)$; otherwise 0, Model A						
Var (x10 ⁻³)	7.5000	6.8750	6.7188	6.6750	6.6688	6.6672
m=1	2.3094	2.4121	2.4400	2.4480	2.4491	2.4494
2	1.9399	2.0232	2.0456	2.0520	2.0529	2.0531
3	1.9245*	2.0067*	2.0287	2.0349*	2.0358*	2.0361
4	-----	-----	2.0286*	-----	-----	2.0360*
5	-----	-----	-----	-----	-----	-----
CASE 5 ; $R_X(x) = 0.1^2 \cos 2\pi x$, Model B						
Var (x10 ⁻³)	0.6275	0.3125	0.2667	0.2554	0.2538	0.2534
m=1	5.9999	8.4853	9.1844	9.3861	9.4151	9.4223
2	4.3277	6.1203	7.9180	8.5757	8.6424	8.6570
3	3.2388	4.5803	6.2447	7.1960	7.2971	7.3195
4	2.9407	4.1588	4.7963	5.5515	5.6485	5.6705
5	2.9234*	4.1344	4.2033	4.4536	4.4976	4.5080
6	-----	4.1343*	4.1371	4.1720	4.1792	4.1810
7	-----	-----	4.1364*	4.1583	4.1614*	4.1622*
8	-----	-----	-----	4.1582*	-----	-----

手法により求めた β に一致すると推測される。本節ではこの確認をまず表 1 のケース 5 について行う。

棒の自由端の変位 U は次式により与えられる。

$$U = \int_0^{L/2} \left(\frac{1}{2(1+X(x))} \right) dx + \int_{L/2}^L \left(\frac{1}{1+X(x)} \right) dx \quad (12)$$

U は $X(x)$ のはん関数であり、その $X(x)$ による微分は次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial X(x)} = \frac{-1}{k(1+X(x))^2} \quad (13)$$

$$[k=1 \quad (0 \leq x \leq L/2), k=2 \quad (L/2 \leq x \leq L)]$$

式(13)に基づき U の一次近似法による分散は次のように計算される。

$$\begin{aligned} \text{Var}[U] &= 0.1^2 \left\{ \frac{1}{4} \left[\int_0^{L/2} \int_0^{L/2} \right] + \frac{1}{2} \left[\int_0^{L/2} \int_{L/2}^L \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\int_{L/2}^L \int_0^{L/2} \right] + \left[\int_{L/2}^L \int_{L/2}^L \right] \right\} \\ &\quad \left(\text{ただし} \left[\int_a^b \int_c^d \right] \equiv \int_a^b \int_c^d \cos 2\pi(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \right) \\ &= 0.1^2 / 4\pi^2 \approx 2.533 \times 10^{-4} \quad (14) \end{aligned}$$

次に式(6)を解くことになるが、一般解である式(7)は $Rx(x) = 0.1^2 \cos 2\pi x$ という自己相関関数に関して式(15)の簡単な二次方程式となり、 λ が重根として求められる。

$$1 - 0.01\lambda' + \frac{0.01^2}{4}\lambda'^2 = 0 \quad (15)$$

$$\lambda = 1/\lambda' = 0.005 \quad (\text{重根})$$

この二重根に対応する固有ベクトルは次のように定められる。ただし $\phi(t)$ の規準化は $\|\phi(t)\| = 1$ による。

$$\phi(t) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos 2\pi t & (0 \leq t \leq 1) \\ \sqrt{2} \sin 2\pi t & (0 \leq t \leq 1) \end{cases} \quad (16)$$

式(5)に式(15)、(16)を代入することにより、 $D(x, u)$ は次式のように求められる。

$$D(x, u) = \frac{\sqrt{2}}{10} \cos 2\pi(x - u) \quad (17)$$

図 3 棒の不等長要素分割

$Y(t)$ を $X(x)$ に変換する $D(x, u)$ は、 $\partial G\{X(x)\} / \partial Y(t)$ を求めるときにも次のように用いられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial G\{X(x)\}}{\partial Y(t)} &= \int_0^L \frac{\partial G\{X(x)\}}{\partial X(v)} \cdot \frac{\partial X(v)}{\partial Y(t)} dv \\ &= \int_0^L \left[-\frac{\partial U\{X(x)\}}{\partial X(v)} \right] D(v, t) dv \quad (18) \end{aligned}$$

第 1 回の反復においては $X(x)^0 = 0$, $Y(t)^0 = 0$ であるので、諸関数が以下のように求まる。

$$\frac{\partial G\{X(x)\}}{\partial Y(t)} = -\frac{\sqrt{2}}{20\pi} \sin 2\pi t \quad (19)$$

$$(0 \leq t \leq 1)$$

$$Y(t)^1 = 3\sqrt{2}\pi \sin 2\pi t \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (20)$$

$$\beta^1 = 3\pi \approx 9.4248 \quad (21)$$

$$X(x)^1 = \frac{3\pi}{10} \sin 2\pi x \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (22)$$

以後同様の反復計算により得られる β の値を表 3 の右欄に示す。反復回数 m に対して β の値が収束することが示されている。また、この結果は表 1 のケース 5 における、各反復回数での N に対する β の収束線上にあることも認められる。これは、少なくともケース 5 に関しては解析的にも信頼性指標の次元普遍性が存在していることを示す。

一般に式(7)を解くことは困難であるが、ケース 5 と同様ケース 1 に関しても計算を進めることができる。自己相関関数は

表 2 ヤング率が不確かな棒の引張りの自由端変位の分散および信頼性指標 (不等長要素分割)

N	2	4	8	20	40	80
CASE 2' : $R_X(x) = 0.1^2 \exp(- x)$, Model A						
$\text{Var}_{(x \times 10^{-3})}$	8.3702	7.7364	7.4970	7.3941	7.3708	7.3623
$m=1$	2.1861	2.2738	2.3099	2.3259	2.3296	2.3309
2	1.8336	1.9088	1.9395	1.9527	1.9557	1.9567
3	1.8187*	1.8935*	1.9240	1.9371	1.9400	1.9410*
4	----	----	1.9239*	1.9370*	1.9339*	----
5	----	----	----	----	----	----

表 3 ヤング率が不確かな棒の引張りの自由端変位の分散および信頼性指標 (解析的手法による)

CASE	1	5
$\text{Var}_{(x \times 10^{-3})}$	10.0000	0.2533
$m=1$	2.0000	9.4248
2	1.6800	8.6619
3	1.6667*	7.3270
4	----	5.6779
5	----	4.5115
6	----	4.2054
7	----	4.1628
8	----	4.1625*

$$Rr(x_1, x_2) = 0.1^2 \text{ (一定値)} \quad (23)$$

と与えられており、諸量は以下のように求められる。

$$\lambda(t) = 1 \quad (24)$$

$$\phi(t, u) = 0.01 \quad (25)$$

$$D(x, u) = 0.1 \quad (26)$$

反復計算を行った結果を表3の中央欄に示す。ケース5と同様、 m に対して β は収束している。これは本例の場合確率過程 $X(x)$ を一つの確率変数 X に置きなおしても物理的に等価な問題となっていることによる。すなわち、前述のアルゴリズムによらなくても、次の一次方程式を解くことにより、 $\beta = 10/6$ を容易に求めることができる。

$$1.2 - 1/(1+X) = 0 \quad (27)$$

4. ヤング率が不確かな平板の引張り

本章では、ヤング率が二次元空間確率過程として変動する正方形弾性板の引張りを取り上げ、3・1節と同様に有限要素法による β を求めて次元普遍性の数値的な検討を加える。任意点 (x, y) でのヤング率 $E(x, y)$ の変動が式(28)で与えられる、図4に示す平面応力状態下の正方形板(寸法1m×1m)を検討対象とする。

$$E(x, y) = \bar{E}\{1 + X(x, y)\} \quad (28)$$

$\bar{E}$ は $E(x, y)$ の期待値であり、 $X(x, y)$ は期待値零の均質な二次元空間確率過程であるとする。解析に用いた要素は同一寸法の正方形双一次要素であり、第 k 要素のヤング率(要素内一定) E_k を次式のように与える。ただし (x_k, y_k) は第 k 要素の図心点の座標である。

$$E_k = \bar{E}\{1 + X(x_k, y_k)\} = \bar{E}(1 + X_k) \quad (29)$$

負荷状態と幾何学的境界条件は図4に示すとおりであ

図4 ヤング率が二次元的に変動する正方形板の有限要素モデル

る。破壊のクライテリオンとして正方形板中央要素図心点の y 方向ひずみを取扱う。ひずみの限界値を ε_c 、 $\mathbf{L}\mathbf{q}$ を節点変位ベクトルと上記のひずみを結びつける行ベクトル、 $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ を境界条件処理後の全体剛性マトリックス、 $\mathbf{F}$ を節点力ベクトルとして、状態関数は次式で与えられる。

$$G(\mathbf{X}) = \varepsilon_c - \mathbf{L}\mathbf{q}[\mathbf{K}(\mathbf{X})]^{-1}\{\mathbf{F}\} \quad (30)$$

$X(x, y)$ の自己相関関数として、式(32)のケース6と式(33)のケース7を与える。

$$R_x(\chi_x, \chi_y) = 0.25^2 \exp\{-(\chi_x^2 + \chi_y^2)\} \quad (31)$$

$$R_x(\chi_x, \chi_y) = 0.25^2 \cos 4\pi\chi_x \cos 4\pi\chi_y \quad (32)$$

ひずみの期待値 $\bar{\varepsilon}$ は 1.429×10^{-5} である。 $\varepsilon_c = 2.5 \times 10^{-5}$ として有限要素解析で求めた信頼性指標と要素分割数の関係を図5に示す。縦軸は反復計算後収束した β 、横軸は要素分割数である。棒の引張りの場合同様、要素分割数の増加に伴い β は一定値に収束しているので、信頼性指標の次元普遍性が認められる。

ケース6と比較して、ケース7は要素分割数の増加による β の収束が遅いことが図5に示されている。これはケース6の指数関数形単調減少に対し、ケース5の自己相関関数は余弦関数形であるために、同じ要素分割数ではケース7は確率過程の離散化近似度が低いためと考えられる。要素分割数を大きくとることにより充分な精度を有する解が得られるが、自己相関関数の形状が比較的平滑であれば少ない要素分割によっても β の精度を保持し得る。図5は信頼性指標を評価する際に必要となる有限要素分割数に関して示唆を与えるものである。

5. 結 言

ヤング率が一次元および二次元の空間確率過程として変動する棒および正方形板の引張りの例題において

図5 ヤング率が不確かな平板の引張りにおける信頼性指標

AFOSM 法により求められる信頼性指標が種々の自己相関関数に関して次元普遍性を有していることを示した。連続体としての信頼性指標を解析的に求める定式を棒の引張りについて行い、この解析的に得られた信頼性指標に有限要素解析で得られる信頼性指標が収束することを示した。

文 献

- (1) Cornell, C. A., *ACI J.*, 66-12 (1969), 974.

- (2) Hasofer, A. M. and Lind, N., *Proc. Am. Soc. Civ. Eng., J. Eng. Mech. Div.*, Vol. 100, (1974), 111.
(3) Ditlevsen, O., *Uncertainty Modeling*, (1981), 81, McGraw-Hill.
(4) Hisada, T. and Nakagiri, S., Role of the Stochastic Finite Element Method in Structural Safety and Reliability, *Proc. 4th Int. Conf. Struct. Safety Reliability*, (1985), I-385.
(5) 近藤, 積分方程式とその応用, (昭 34), 64, コロナ社.