端面に偏心円形加熱を受ける横等方性有限円柱の 非定常熱応力*

芦 田 文 博**, 野 田 直 剛***

Transient Thermal Stress in a Transversely Isotropic Finite Circular Cylinder under Eccentric Partial Heating on an End Surface

by Fumihiro ASHIDA and Naotake NODA

The present paper is concerned with the three-dimensional transient thermal stress problem in a transversely isotropic finite circular cylinder subjected to an eccentric partial heat source on an end surface, and the convective heat losses into the surrounding medium from the surfaces. This problem is analyzed by means of the transversely isotropic potential function method to stresses. For numerical examples, the temperature and thermal stresses were calculated for a graphite which belongs under a transverse isotropy and compared with those of isotropy. The effects of the length of the circular cylinder on the temperature and thermal stresses were researched.

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Transverse Isotropy, Transient State, Finite Circular Cylinder, Eccentric Partial Heat Source

1. 緒 言

原子炉減速材として必要不可欠な黒鉛、高温状態で作動する機械構造物に広く用いられている繊維強化複合材料などの横等方性体に属する材料に生じる熱応力を正確に把握することは、工業上の重要問題となっている。したがって、横等方性体の熱応力問題に関する研究は数多いが、その多くは定常問題に関する報告である。三次元非定常熱応力の軸対称問題に関しては菅野ら^{(1)~(4)}、竹内ら⁽⁵⁾、野田ら^{(6)~(9)}など、いくつかの報告がある。しかし、非定常熱応力の非軸対称問題に関しては野田および野田らの側面に部分加熱を受ける半無限円柱⁽¹⁰⁾と有限円柱⁽¹¹⁾、端面に部分加熱を受ける半無限円柱⁽¹²⁾などの報告が見られる程度である。一方の端面に非軸対称加熱を受ける有限円柱の非定常熱応力問題は軸方向に対しても非対称となり、解析がかなり複雑になるためか、解析例は見当たらないようである。

そこで本報は一方の端面に偏心した円形熱源が作用し、表面に熱放散を有する有限円柱の非定常熱応力問

題を横等方性体に関するポテンシャル関数法を用いて解析した。さらに、黒鉛について温度と熱応力の数値計算を実行した。

2. 解 析

2・1 温度場 図 1 に示すような円柱座標系において、半径 a 、長さ $2l$ の横等方性有限円柱の一方の端面に持続点熱源 Q が作用している状態を考える。この場合の熱伝導基礎方程式は

$$T_{,rr} + r^{-1} T_{,r} + r^{-2} T_{,\theta\theta} + \lambda^2 T_{,zz} = \kappa^{-1} T \quad \dots\dots\dots (1)$$

である。また、この場合の初期条件と境界条件は

$$t=0 \text{ で } T=0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$r=a \text{ で } T_{,r} + h_r T = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

図 1 端面に持続点熱源の作用する横等方性有限円柱

* 昭和 60 年 11 月 4 日 中国四国支部・九州支部合同徳島地方講演会において講演、原稿受付 昭和 60 年 3 月 27 日。

** 正員、津山工業高等専門学校 (〒708 津山市沼 624 の 1)。

*** 正員、静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北 3)。

$$\begin{aligned}
 z=l \text{ で } T, z+h_z T &= a Q_0 f(t) q(r_0, \theta_0) \\
 &\times \delta[(r-r_0)/a] \delta(\theta-\theta_0) / (r \lambda_z) \cdots \cdots (4) \\
 z=-l \text{ で } T, z-h_z T &= 0 \cdots \cdots (5)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 T, i &= \partial T / \partial i, (i=r, \theta, z, t) \\
 \lambda^2 &= \lambda_z / \lambda_r, Q = a^2 Q_0 f(t) q(r_0, \theta_0)
 \end{aligned}$$

であり、 T は温度、 t は時間、 λ_r, λ_z は r, z 方向の熱伝導率、 h_r, h_z は円柱の側面、端面の相対熱伝達率、 Q_0 は単位時間、単位面積当たりの一定な発熱量、 $\delta(\quad)$ はディラックのデルタである。

式(2)~(5)の諸条件を満足する式(1)の解で、本題に適する温度分布は

$$T = q(r_0, \theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \cos\{n(\theta-\theta_0)\} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_n(\alpha_{nm} r_0) J_n(\alpha_{nm} r) \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ T_{enmj} \cos\left(\frac{\beta_j z}{\lambda}\right) + T_{onmj} \sin\left(\frac{\gamma_j z}{\lambda}\right) \right\} \cdots \cdots (6)$$

によって表される。ここで、

$$A_{nm} = 2a^2 Q_0 \alpha_{nm}^2 / \{(1+\delta_{n0}) \pi \lambda_z (\alpha_{nm}^2 a^2 + h_z^2 a^2 - n^2) J_n^2(\alpha_{nm} a)\} \cdots \cdots (7)$$

$$\begin{aligned}
 T_{enmj} &= \frac{\kappa \lambda^2 (\lambda^2 h_z^2 + \beta_j^2) \cos(\beta_j l / \lambda)}{(\lambda^2 h_z^2 + \beta_j^2) l + \lambda^2 h_z} \int_0^t f(t-\tau) \exp\{-\kappa(\alpha_{nm}^2 + \beta_j^2) \tau\} d\tau \\
 T_{onmj} &= \frac{\kappa \lambda^2 (\lambda^2 h_z^2 + \gamma_j^2) \sin(\gamma_j l / \lambda)}{(\lambda^2 h_z^2 + \gamma_j^2) l + \lambda^2 h_z} \int_0^t f(t-\tau) \exp\{-\kappa(\alpha_{nm}^2 + \gamma_j^2) \tau\} d\tau
 \end{aligned} \cdots \cdots (8)$$

である。ただし、 δ_{n0} はクロネッカのデルタである。また、 α_{nm} は次式を満足する第 m 番めの正根である。

$$(n + a h_r) J_n(\alpha_{nm} a) - \alpha_{nm} a J_{n+1}(\alpha_{nm} a) = 0 \cdots \cdots (9)$$

β_j と γ_j は次式を満足する第 j 番めの正根である。

$$\beta_j \sin(\beta_j l / \lambda) - \lambda h_z \cos(\beta_j l / \lambda) = 0, \quad \gamma_j \cos(\gamma_j l / \lambda) + \lambda h_z \sin(\gamma_j l / \lambda) = 0 \cdots \cdots (10)$$

ここで、図2に示すような円柱軸と r_1 離れた新しい座標系 (ξ, v) を考え、 (r_0, θ_0) と (ξ, v) の間にベッセルの加法定理を適用すると

$$\begin{aligned}
 \cos(n\theta_0) J_n(\alpha_{nm} r_0) &= \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(\alpha_{nm} r_1) J_k(\alpha_{nm} \xi) \frac{\cos(kv)}{\sin}, & (r_1 > \xi) \\ (-1)^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\alpha_{nm} r_1) J_{n+k}(\alpha_{nm} \xi) \frac{\cos\{-(n+k)v\}}{\sin}, & (r_1 < \xi) \end{cases} \cdots \cdots (11)
 \end{aligned}$$

なる関係式を導くことができる。また、点熱源 $q(r_0, \theta_0)$ を

$$q(r_0, \theta_0) = g(\xi, v) \xi d\xi dv / a^2 \cdots \cdots (12)$$

とおく。このとき、一般性を失うことなく、 $g(\xi, v) = g(\xi, -v)$ であると仮定する。式(6)に式(11)と式(12)を代入し、区間 $0 \leq \xi \leq r_2, 0 \leq v \leq 2\pi$ で、 v についての対称性を考慮して積分する。ただし、 r_2 は加熱源の半径である。したがって、一方の側面に偏心円形熱源が作用する横等方性有限円柱の温度分布は次式によって表される。

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} J_n(\alpha_{nm} r) \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ T_{enmj} \cos\left(\frac{\beta_j z}{\lambda}\right) + T_{onmj} \sin\left(\frac{\gamma_j z}{\lambda}\right) \right\} \cdots \cdots (13)$$

ここで、 B_{nm} は次に示すとおりである。

$$\begin{aligned}
 B_{nm} &= \frac{1}{a^2} A_{nm} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left[J_{n+k}(\alpha_{nm} r_1) \int_0^{r_1} \xi g(\xi, v) J_k(\alpha_{nm} \xi) \cos(kv) d\xi \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^n J_k(\alpha_{nm} r_1) \int_{r_1}^{r_2} \xi g(\xi, v) J_{n+k}(\alpha_{nm} \xi) \cos\{(n+k)v\} d\xi \right] dv \cdots \cdots (14)
 \end{aligned}$$

2.2 熱応力 横等方性体の応力-ひずみ関係式は

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= C_{11} \varepsilon_{rr} + C_{12} \varepsilon_{\theta\theta} + C_{13} \varepsilon_{zz} - \bar{\beta}_1 T, \quad \sigma_{\theta\theta} = C_{12} \varepsilon_{rr} + C_{11} \varepsilon_{\theta\theta} + C_{13} \varepsilon_{zz} - \bar{\beta}_1 T \\
 \sigma_{zz} &= C_{13} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + C_{33} \varepsilon_{zz} - \bar{\beta}_3 T, \quad \sigma_{rz} = C_{44} \varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{z\theta} = C_{44} \varepsilon_{z\theta}, \quad \sigma_{\theta r} = (C_{11} - C_{12}) \varepsilon_{\theta r} / 2
 \end{aligned} \cdots \cdots (15)$$

と表される。ただし、 σ_{ij} は応力、 ε_{ij} はひずみ、 C_{ij} と $\bar{\beta}_i$ は材料定数である。

図2 端面に作用する偏心円形熱源

ここで、変位 u_i と次の関係にある変位ポテンシャル関数 $\phi_1, \phi_2, \psi, \mathcal{Q}, \chi^{(5)}$ を導入する。

$$u_r = (\phi_1 + \phi_2), r + r^{-1}\psi, \theta + \mathcal{Q}, r, \quad u_\theta = r^{-1}(\phi_1 + \phi_2), \theta - \psi, r + r^{-1}\mathcal{Q}, \theta, \quad u_z = (k_1\phi_1 + k_2\phi_2), z + \chi, z \quad (16)$$

上式をつり合い方程式に代入すると、変位ポテンシャル関数の満足すべき基礎式

$$c_{11}\Delta_1\mathcal{Q} + c_{44}\mathcal{Q},_{zz} + (c_{13} + c_{44})\chi,_{zz} = \bar{\beta}_1 T, \quad (c_{13} + c_{44})\Delta_1\mathcal{Q} + c_{44}\Delta_1\chi + c_{33}\chi,_{zz} = \bar{\beta}_3 T \quad (17)$$

$$\Delta_1\phi_i + \mu_i\phi_i,_{zz} = 0, \quad (i=1, 2), \quad \Delta_1\psi + \mu_3\psi,_{zz} = 0 \quad (18)$$

を得る。ただし、 $\Delta_1 = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2$ であり、 $\mu_i (i=1, 2)$ は

$$c_{11}c_{44}\mu^2 + (2c_{13}c_{44} + c_{13}^2 - c_{11}c_{33})\mu + c_{33}c_{44} = 0 \quad (19)$$

を満足する根である。また、 μ_3, k_1, k_2 は次に示すとおりである。

$$\mu_3 = 2c_{44}/(c_{11} - c_{12}), \quad k_i = (c_{11}\mu_i - c_{44})/(c_{13} + c_{44}), \quad (i=1, 2) \quad (20)$$

ひずみ-変位関係式に式(16)を代入し、さらに式(15)を代入すると、各応力成分は次式によって表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= (c_{11} - c_{12})(\phi_1 + \phi_2),_{rr} - \{(c_{12}\mu_1 - c_{13}k_1)\phi_1 + (c_{12}\mu_2 - c_{13}k_2)\phi_2\},_{zz} \\ &\quad + (c_{11} - c_{12})r^{-1}(\psi,_{r} - r^{-1}\psi,_{\theta}) + c_{11}\mathcal{Q},_{rr} + c_{12}r^{-1}(\mathcal{Q},_{r} + r^{-1}\mathcal{Q},_{\theta\theta}) + c_{13}\chi,_{zz} - \bar{\beta}_1 T \\ \sigma_{\theta\theta} &= -(c_{11} - c_{12})(\phi_1 + \phi_2),_{rr} - \{(c_{11}\mu_1 - c_{13}k_1)\phi_1 + (c_{11}\mu_2 - c_{13}k_2)\phi_2\},_{zz} \\ &\quad - (c_{11} - c_{12})r^{-1}(\psi,_{r} - r^{-1}\psi,_{\theta}) + c_{12}\mathcal{Q},_{rr} + c_{11}r^{-1}(\mathcal{Q},_{r} + r^{-1}\mathcal{Q},_{\theta\theta}) + c_{13}\chi,_{zz} - \bar{\beta}_1 T \\ \sigma_{zz} &= -\{(c_{13}\mu_1 - c_{33}k_1)\phi_1 + (c_{13}\mu_2 - c_{33}k_2)\phi_2\},_{zz} + c_{13}\Delta_1\mathcal{Q} + c_{33}\chi,_{zz} - \bar{\beta}_3 T \\ \sigma_{rz} &= c_{44}\{[(1+k_1)\phi_1 + (1+k_2)\phi_2],_{rz} + r^{-1}\psi,_{\theta z} + \{\mathcal{Q} + \chi\},_{rz}\} \\ \sigma_{z\theta} &= c_{44}\{r^{-1}\{(1+k_1)\phi_1 + (1+k_2)\phi_2\},_{z\theta} - \psi,_{rz} + r^{-1}\{\mathcal{Q} + \chi\},_{z\theta}\} \\ \sigma_{\theta r} &= (c_{11} - c_{12})[r^{-1}\{(\phi_1 + \phi_2),_{r} - r^{-1}(\phi_1 + \phi_2)\},_{\theta} - \psi,_{rr} - \mu_3\psi,_{zz}/2 + r^{-1}\{\mathcal{Q},_{r} - r^{-1}\mathcal{Q}\},_{\theta}] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここで、熱弾性変位ポテンシャル関数 $\mathcal{Q}$ と χ を式(13)を考慮して

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Q} &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{nm}^2} J_n(\alpha_{nm}r) \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ D_{enmj} \cos\left(\frac{\beta_j z}{\lambda}\right) + D_{onmj} \sin\left(\frac{\gamma_j z}{\lambda}\right) \right\} \\ \chi &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{nm}^2} J_n(\alpha_{nm}r) \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ E_{enmj} \cos\left(\frac{\beta_j z}{\lambda}\right) + E_{onmj} \sin\left(\frac{\gamma_j z}{\lambda}\right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

とおく。 $D_{enmj}, E_{enmj}, D_{onmj}, E_{onmj}$ は上式を式(17)に代入すると、次式のように決定される。

$$\begin{aligned} \{D_{enmj}, E_{enmj}\} &= \{[-\bar{\beta}_1(c_{33}\beta_j^2 + c_{44}\alpha_{nm}^2\lambda^2) + \bar{\beta}_3(c_{13} + c_{44})\beta_j^2], \\ &\quad \{\bar{\beta}_1(c_{13} + c_{44})\alpha_{nm}^2\lambda^2 - \bar{\beta}_3(c_{11}\alpha_{nm}^2\lambda^2 + c_{44}\beta_j^2)\}\} \\ &\quad \times \alpha_{nm}^2\lambda^2 B_{nm} T_{enmj} / \{(c_{11}\alpha_{nm}^2\lambda^2 + c_{44}\beta_j^2)(c_{33}\beta_j^2 + c_{44}\alpha_{nm}^2\lambda^2) - (c_{13} + c_{44})^2\alpha_{nm}^2\lambda^2\beta_j^2\} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \{D_{onmj}, E_{onmj}\} &= \{[-\bar{\beta}_1(c_{33}\gamma_j^2 + c_{44}\alpha_{nm}^2\lambda^2) + \bar{\beta}_3(c_{13} + c_{44})\gamma_j^2], \\ &\quad \{\bar{\beta}_1(c_{13} + c_{44})\alpha_{nm}^2\lambda^2 - \bar{\beta}_3(c_{11}\alpha_{nm}^2\lambda^2 + c_{44}\gamma_j^2)\}\} \\ &\quad \times \alpha_{nm}^2\lambda^2 B_{nm} T_{onmj} / \{(c_{11}\alpha_{nm}^2\lambda^2 + c_{44}\gamma_j^2)(c_{33}\gamma_j^2 + c_{44}\alpha_{nm}^2\lambda^2) - (c_{13} + c_{44})^2\alpha_{nm}^2\lambda^2\gamma_j^2\} \end{aligned} \quad (24)$$

基礎式(18)を満足する変位ポテンシャル関数 ϕ_1, ϕ_2, ψ で本題に適する関数形として、次式を採用する。

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \left[W_e \left\{ \frac{r^2}{4} - \frac{z^2}{2\mu_1} \right\} + W_0 \left\{ \frac{r^2 z}{4} - \frac{z^3}{6\mu_1} \right\} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_i^2} J_0(\delta_i r) \left\{ L_e \cosh\left(\frac{\delta_i z}{\sqrt{\mu_1}}\right) + L_o \sinh\left(\frac{\delta_i z}{\sqrt{\mu_1}}\right) \right\} \right] \delta_{n0} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{nm}^2} J_n(\alpha_{nm}r) \left\{ \{F_{en} + H_{en}(1 - \delta_{n0})\} \cosh\left(\frac{\alpha_{nm}z}{\sqrt{\mu_1}}\right) + \{F_{on} + H_{on}\} \sinh\left(\frac{\alpha_{nm}z}{\sqrt{\mu_1}}\right) \right\} \right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left[P_{en} \frac{\lambda^2}{\beta_j^2} \text{In}\left(\frac{\beta_j \sqrt{\mu_1} r}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{\beta_j z}{\lambda}\right) + P_{on} \frac{\lambda^2}{\gamma_j^2} \text{In}\left(\frac{\gamma_j \sqrt{\mu_1} r}{\lambda}\right) \sin\left(\frac{\gamma_j z}{\lambda}\right) \right] \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \left[S_{en} \frac{1}{\eta_s^2} \text{In}(\eta_s \sqrt{\mu_1} r) \cos(\eta_s z) + S_{on} \frac{1}{\omega_s^2} \text{In}(\omega_s \sqrt{\mu_1} r) \sin(\omega_s z) \right] \right] \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \left[X_e \left\{ \frac{r^2}{4} - \frac{z^2}{2\mu_2} \right\} + X_0 \frac{1}{a} \left\{ \frac{r^2 z}{4} - \frac{z^3}{6\mu_2} \right\} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_i^2} J_0(\delta_i r) \left\{ M_e \cosh\left(\frac{\delta_i z}{\sqrt{\mu_2}}\right) + M_o \sinh\left(\frac{\delta_i z}{\sqrt{\mu_2}}\right) \right\} \right] \delta_{n0} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{nm}^2} J_n(\alpha_{nm}r) \left\{ \{G_{en} + K_{en}(1 - \delta_{n0})\} \cosh\left(\frac{\alpha_{nm}z}{\sqrt{\mu_2}}\right) + \{G_{on} + K_{on}\} \sinh\left(\frac{\alpha_{nm}z}{\sqrt{\mu_2}}\right) \right\} \right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left[Q_{en} \frac{\lambda^2}{\beta_j^2} \text{In}\left(\frac{\beta_j \sqrt{\mu_2} r}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{\beta_j z}{\lambda}\right) + Q_{on} \frac{\lambda^2}{\gamma_j^2} \text{In}\left(\frac{\gamma_j \sqrt{\mu_2} r}{\lambda}\right) \sin\left(\frac{\gamma_j z}{\lambda}\right) \right] \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \left[U_{en} \frac{1}{\eta_s^2} \text{In}(\eta_s \sqrt{\mu_2} r) \cos(\eta_s z) + U_{on} \frac{1}{\omega_s^2} \text{In}(\omega_s \sqrt{\mu_2} r) \sin(\omega_s z) \right] \right] \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi = & \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta) \left[Y_n \frac{r^n}{a^{n-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_{nk}^2} J_n(\varepsilon_{nk}r) \left[N_{en} \cosh\left(\frac{\varepsilon_{nk}z}{\sqrt{\mu_3}}\right) + N_{on} \sinh\left(\frac{\varepsilon_{nk}z}{\sqrt{\mu_3}}\right) \right] \right. \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left[R_{en} \frac{\lambda^2}{\beta_j^2} \operatorname{In}\left(\frac{\beta_j \sqrt{\mu_3} r}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{\beta_j z}{\lambda}\right) + R_{on} \frac{\lambda^2}{\gamma_j^2} \operatorname{In}\left(\frac{\gamma_j \sqrt{\mu_3} r}{\lambda}\right) \sin\left(\frac{\gamma_j z}{\lambda}\right) \right] \\ & \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \left[V_{en} \frac{1}{\eta_s^2} \operatorname{In}(\eta_s \sqrt{\mu_3} r) \cos(\eta_s z) + V_{on} \frac{1}{\omega_s^2} \operatorname{In}(\omega_s \sqrt{\mu_3} r) \sin(\omega_s z) \right] \right] \quad \cdots \cdots \cdots (27) \end{aligned}$$

ここで, $W_e, W_o, F_{en}, F_{on} \cdots$ は未定係数である。また, $\delta_i, \varepsilon_{nk}$ は

$$J_1(\delta_i a) = 0, \quad J_n(\varepsilon_{nk} a) = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (28)$$

を満足する第 i, k 番めの正根であり, η_s と ω_s は次式のとおりである。

$$\eta_s = (2s-1)\pi/2l, \quad \omega_s = s\pi/l, \quad (s=1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots \cdots \cdots (29)$$

熱応力は式(13), (22), (25)~(27)を式(21)に代入することによって決定される。一例として, $\sigma_{\theta\theta}$ のみを示す。

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & \{ (W_e + W_o z/a) \{ (c_{11} + c_{12})/2 - c_{13}k_1/\mu_1 \} + (X_e + X_o z/a) \{ (c_{11} + c_{12})/2 - c_{13}k_2/\mu_2 \} \\ & - \sum_{i=1}^{\infty} [\{ L_e \cosh(\delta_i z/\sqrt{\mu_1}) + L_o \sinh(\delta_i z/\sqrt{\mu_1}) \} \{ (c_{12} - c_{13}k_1/\mu_1) J_0(\delta_i r) + (c_{11} - c_{12}) J_1(\delta_i r)/\delta_i r \} \\ & + \{ M_e \cosh(\delta_i z/\sqrt{\mu_2}) + M_o \sinh(\delta_i z/\sqrt{\mu_2}) \} \{ (c_{12} - c_{13}k_2/\mu_2) J_0(\delta_i r) + (c_{11} - c_{12}) J_1(\delta_i r)/\delta_i r \}] \} \delta_{n0} \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \left[Y_n (c_{11} - c_{12}) (n^2 - n) z r^{n-2} / a^{n-1} \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [\{ \{ F_{en} + H_{en}(1 - \delta_{n0}) \} \cosh(\alpha_{nm} z/\sqrt{\mu_1}) + \{ F_{on} + H_{on} \} \sinh(\alpha_{nm} z/\sqrt{\mu_1}) \} \\ & \times [\{ (c_{11} - c_{12}) (n^2 - n) / \alpha_{nm}^2 r^2 + c_{12} - c_{13}k_1/\mu_1 \} J_n(\alpha_{nm} r) + (c_{11} - c_{12}) J_{n+1}(\alpha_{nm} r) / \alpha_{nm} r] \\ & + \{ \{ G_{en} + K_{en}(1 - \delta_{n0}) \} \cosh(\alpha_{nm} z/\sqrt{\mu_2}) + \{ G_{on} + K_{on} \} \sinh(\alpha_{nm} z/\sqrt{\mu_2}) \} \\ & \times [\{ (c_{11} - c_{12}) (n^2 - n) / \alpha_{nm}^2 r^2 + c_{12} - c_{13}k_2/\mu_2 \} J_n(\alpha_{nm} r) + (c_{11} - c_{12}) J_{n+1}(\alpha_{nm} r) / \alpha_{nm} r] \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} [\{ \{ (c_{11} - c_{12}) (n^2 - n) D_{enmj} / \alpha_{nm}^2 r^2 + c_{12} D_{enmj} + c_{13} E_{enmj} \beta_j^2 / \alpha_{nm}^2 \lambda^2 + \bar{\beta}_1 B_{nm} T_{enmj} \} J_n(\alpha_{nm} r) \\ & + (c_{11} - c_{12}) D_{enmj} J_{n+1}(\alpha_{nm} r) / \alpha_{nm} r \} \cos(\beta_j z/\lambda) \\ & + \{ \{ (c_{11} - c_{12}) (n^2 - n) D_{onmj} / \alpha_{nm}^2 r^2 + c_{12} D_{onmj} + c_{13} E_{onmj} \gamma_j^2 / \alpha_{nm}^2 \lambda^2 + \bar{\beta}_1 B_{nm} T_{onmj} \} J_n(\alpha_{nm} r) \\ & + (c_{11} - c_{12}) D_{onmj} J_{n+1}(\alpha_{nm} r) / \alpha_{nm} r \} \sin(\gamma_j z/\lambda)]] \\ & + n(c_{11} - c_{12}) \sum_{k=1}^{\infty} [(n-1) J_n(\varepsilon_{nk} r) / \varepsilon_{nk} r - J_{n+1}(\varepsilon_{nk} r)] [N_{en} \cosh(\varepsilon_{nk} z/\sqrt{\mu_3}) + N_{on} \sinh(\varepsilon_{nk} z/\sqrt{\mu_3})] / \varepsilon_{nk} r \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} [\{ P_{en} [\{ (c_{11} - c_{12}) (n^2 - n) \lambda^2 / \beta_j^2 r^2 - c_{12} \mu_1 + c_{13} k_1 \} \operatorname{In}(\beta_j \sqrt{\mu_1} r/\lambda) \\ & - (c_{11} - c_{12}) \lambda \sqrt{\mu_1} \operatorname{In}_{n+1}(\beta_j \sqrt{\mu_1} r/\lambda) / \beta_j r] \\ & + Q_{en} [\{ (c_{11} - c_{12}) (n^2 - n) \lambda^2 / \beta_j^2 r^2 - c_{12} \mu_2 + c_{13} k_2 \} \operatorname{In}(\beta_j \sqrt{\mu_2} r/\lambda) - (c_{11} - c_{12}) \lambda \sqrt{\mu_2} \operatorname{In}_{n+1}(\beta_j \sqrt{\mu_2} r/\lambda) / \beta_j r] \\ & + R_{en} n \lambda (c_{11} - c_{12}) [(n-1) \lambda \operatorname{In}(\beta_j \sqrt{\mu_3} r/\lambda) / \beta_j r + \sqrt{\mu_3} \operatorname{In}_{n+1}(\beta_j \sqrt{\mu_3} r/\lambda)] / \beta_j r \} \cos(\beta_j z/\lambda) \\ & + [P_{on} [\{ (c_{11} - c_{12}) (n^2 - n) \lambda^2 / \gamma_j^2 r^2 - c_{12} \mu_1 + c_{13} k_1 \} \operatorname{In}(\gamma_j \sqrt{\mu_1} r/\lambda) - (c_{11} - c_{12}) \lambda \sqrt{\mu_1} \operatorname{In}_{n+1}(\gamma_j \sqrt{\mu_1} r/\lambda) / \gamma_j r] \\ & + Q_{on} [\{ (c_{11} - c_{12}) (n^2 - n) \lambda^2 / \gamma_j^2 r^2 - c_{12} \mu_2 + c_{13} k_2 \} \operatorname{In}(\gamma_j \sqrt{\mu_2} r/\lambda) - (c_{11} - c_{12}) \lambda \sqrt{\mu_2} \operatorname{In}_{n+1}(\gamma_j \sqrt{\mu_2} r/\lambda) / \gamma_j r] \\ & + R_{on} n \lambda (c_{11} - c_{12}) [(n-1) \lambda \operatorname{In}(\gamma_j \sqrt{\mu_3} r/\lambda) / \gamma_j r + \sqrt{\mu_3} \operatorname{In}_{n+1}(\gamma_j \sqrt{\mu_3} r/\lambda)] / \gamma_j r \} \sin(\gamma_j z/\lambda)] \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} [\{ S_{en} [\{ (c_{11} - c_{12}) (n^2 - n) / \eta_s^2 r^2 - c_{12} \mu_1 + c_{13} k_1 \} \operatorname{In}(\eta_s \sqrt{\mu_1} r) - (c_{11} - c_{12}) \sqrt{\mu_1} \operatorname{In}_{n+1}(\eta_s \sqrt{\mu_1} r) / \eta_s r] \\ & + U_{en} [\{ (c_{11} - c_{12}) (n^2 - n) / \eta_s^2 r^2 - c_{12} \mu_2 + c_{13} k_2 \} \operatorname{In}(\eta_s \sqrt{\mu_2} r) - (c_{11} - c_{12}) \sqrt{\mu_2} \operatorname{In}_{n+1}(\eta_s \sqrt{\mu_2} r) / \eta_s r] \\ & + V_{en} n (c_{11} - c_{12}) [(n-1) \operatorname{In}(\eta_s \sqrt{\mu_3} r) / \eta_s r + \sqrt{\mu_3} \operatorname{In}_{n+1}(\eta_s \sqrt{\mu_3} r)] / \eta_s r \} \cos(\eta_s z) \\ & + [S_{on} [\{ (c_{11} - c_{12}) (n^2 - n) / \omega_s^2 r^2 - c_{12} \mu_1 + c_{13} k_1 \} \operatorname{In}(\omega_s \sqrt{\mu_1} r) - (c_{11} - c_{12}) \sqrt{\mu_1} \operatorname{In}_{n+1}(\omega_s \sqrt{\mu_1} r) / \omega_s r] \\ & + U_{on} [\{ (c_{11} - c_{12}) (n^2 - n) / \omega_s^2 r^2 - c_{12} \mu_2 + c_{13} k_2 \} \operatorname{In}(\omega_s \sqrt{\mu_2} r) - (c_{11} - c_{12}) \sqrt{\mu_2} \operatorname{In}_{n+1}(\omega_s \sqrt{\mu_2} r) / \omega_s r] \\ & + V_{on} n (c_{11} - c_{12}) [(n-1) \operatorname{In}(\omega_s \sqrt{\mu_3} r) / \omega_s r + \sqrt{\mu_3} \operatorname{In}_{n+1}(\omega_s \sqrt{\mu_3} r)] / \omega_s r \} \sin(\omega_s z)]] \quad \cdots \cdots \cdots (30) \end{aligned}$$

応力境界条件は外力が作用しない場合を考えると, 次式によって表される。

$$r=a \text{ で } \sigma_{rr} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{zr} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (31)$$

$$z = \pm l \text{ で } \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zz} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (32)$$

式(32)において, $F_{en}, G_{en}, F_{on}, G_{on}$ 以外の未定係

数をすべて零とおくと, 四つの連立一次方程式を得る。したがって, $F_{en}, G_{en}, F_{on}, G_{on}$ を決定することができる。この四つの係数のみによって応力を計算すると, 式(32)は満足するが, 式(31)は満足しない, 近似解を得ることができる。他の未定係数は式(31)を満足

するように決定することができるが、ここでは省略する。

3. 数値計算結果と考察

数値計算は熱源の状態を表す関数が

$$f(t)=1.0, \quad g(\xi, \nu)=1.0$$

の場合について実行した。

ここで、次に示すような無次元量を導入する。

$$\rho=r/a, \quad \xi=z/a, \quad t'=xt/a^2,$$

$$\rho_1=r_1/a, \quad \rho_2=r_2/a, \quad \xi_l=l/a,$$

$$\bar{T}=\lambda_z T/(aQ_0), \quad \bar{\rho\rho}=\sigma_{rr}/\sigma_0, \quad \bar{\theta\theta}=\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0,$$

$$E=E_z/E_r, \quad G=G_{rz}/E_r, \quad \alpha=\alpha_z/\alpha_r,$$

$$B_{i1}=ah_r, \quad B_{i2}=ah_z$$

図3 $\theta=0^\circ, \xi=\xi_l$ における温度の時間的変化

図4 $\theta=0^\circ, \xi=\xi_l$ における半径応力の時間的変化

図5 $\theta=0^\circ, \xi=\xi_l$ における円周応力の時間的変化

ただし、 $\sigma_0=\alpha_r E_r a Q_0/\lambda_z$, E_r, E_z は r, z 方向の縦弾性係数, G_{rz} は横弾性係数, α_r, α_z は r, z 方向の線膨張率である。

数値計算には横等方性材料として、黒鉛を用いた。その材料定数は以下のとおりである。

$$E_r=10.4 \text{ GPa}, \quad E_z=11.8 \text{ GPa}, \quad G_{rz}=4.14 \text{ GPa},$$

$$\alpha_r=3.9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \quad \alpha_z=3.5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1},$$

$$\lambda_r=1.172 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}, \quad \lambda_z=1.340 \text{ W/(m}\cdot\text{K)},$$

$$\nu_{rz}=\nu_{r\theta}=0.11$$

ここで、 $\nu_{rz}, \nu_{r\theta}$ は rz 面, $r\theta$ 面のポアソン比である。

また、比較のため

$$E=\alpha=\lambda^2=1.0, \quad \nu_{rz}=\nu_{r\theta}=0.11$$

のような等方性体を導入した。

熱源の位置と大きさおよびポアソン比は

$$\rho_1=0.3, \quad \rho_2=0.1, \quad B_{i1}=B_{i2}=0.1$$

として、数値計算を実行した。

図3～5には、 $\xi_l=1.0$ の場合の $\theta=0^\circ$, $\xi=\xi_l$ における温度、半径応力および円周応力の半径方向分布をフーリエ数 t' をパラメータにして、黒鉛と等方性体の値を比較して示した。図3～5より、黒鉛の温度および圧縮の熱応力はともに等方性体の値より大きくなっている。これは、黒鉛の熱伝導率は半径方向より軸方向のほうが大きいためであると考えられる。

図6と図7には、 $\xi_l=1.0$ の場合の熱源中心上の半

図6 熱源中心上の半径応力の厳密解と近似解の比較

図7 熱源中心上の円周応力の厳密解と近似解の比較

図 8 熱源中心上の温度に及ぼす ζ_1 の影響 図 10 熱源中心上の円周応力に及ぼす ζ_1 の影響 図 9 熱源中心上の半径応力に及ぼす ζ_1 の影響

径応力と円周応力の厳密解と近似解の時間的変化を黒鉛と等方性体の場合について示した。図 6, 7 より、フーリエ数が大きくなるのに従って、厳密解と近似解の差は多くなっている。これは、近似解が側面の応力境界条件を満足していないためであると思われる。

図 8~10 には熱源中心上の温度、半径応力および円周応力の時間的変化を円柱の長さ ζ_1 をパラメータにして示した。図中の $\zeta_1 = \infty$ は半無限円柱⁽¹²⁾の値である。図 8~10 より、円柱が長くなると、温度はわずかに低くなっているが、熱応力はほとんど変化していない。これは、円柱の長さが 1.0 以上に長くなると、 $\zeta = -\zeta_1$ 面の影響をあまり受けなくなるためであると思われる。また、圧縮の半径応力と円周応力の最大値は、フーリエ数が 0.1 付近で生じている。

以上の数値計算を実行するうえで、温度および応力関数に含まれている無限級数は $n=0 \sim 15$, $m, i, j, k, s=1 \sim 30$ の有限で打ち切った。このとき、解の精度はフーリエ数などによって異なるが、境界上で零となるべき応力の最大誤差は最大応力に対して 3% 以内となった。したがって、応力境界条件はほぼ満足しているものと思われる。

4. 結 言

端面に偏心円形熱源が作用し、表面に熱放散を有す

る横等方性有限円柱の非定常熱応力問題の解析を行い、実行した数値計算内において、以下のことが判明した。

(1) 一方の端面に偏心円形熱源が作用し、表面に熱放散を有する横等方性有限円柱の非定常熱応力問題は、横等方性体に関するポテンシャル関数法を用いて解析することが可能である。

(2) 圧縮の半径応力と円周応力は、フーリエ数 t が 0.1 付近で最大となっている。

(3) 黒鉛の温度と圧縮の熱応力は等方性の値より大きい。

(4) 黒鉛の厳密解と近似解の差は、フーリエ数 t が大きくなるのに従って、多くなる。

(5) 円柱の長さ ζ_1 が 1.0 から長くなると、温度はわずかに低くなるが、熱応力はほとんど変化しない。

最後に、この研究の遂行にあたり、多大なる援助をいただいた津山工業高等専門学校教授 小橋義郎先生に深謝する次第である。また、数値計算には岡山大学総合情報処理センターを利用した。

文 献

- (1) 菅野・斉藤・鶴留, 機論, 45-396, A(昭 54), 884.
- (2) Sugano, Y., Nucl. Eng. Des., 53-1(1979), 39.
- (3) 菅野・中西, 機論, 46-410, A(昭 55), 1110.
- (4) 菅野, 機論, 47-419, A(昭 56), 730.
- (5) Takeuti, Y. and Noda, N., J. Thermal Stress, 1-1(1978), 25.
- (6) Noda, N. and Sugano, Y., Nucl. Eng. Des. 65-2(1981), 205.
- (7) Noda, N. and Takeuti, Y., Theoret. Appl. Mech., 30(1981), 383.
- (8) 野田・竹内・小畑・植村, 機論, 49-437, A(昭 58), 180.
- (9) 野田・竹内・植村, 機論, 48-436, A(昭 57), 1536.
- (10) 野田・芦田・竹内, 機論, 51-465, A(昭 60), 1335.
- (11) 野田, 機論, 50-452, A(昭 59), 618.
- (12) 野田・芦田, 機論, 51-464, A(昭 60), 1034.

討 論

〔質問〕 渋谷 剛〔秋田大学鉱山学部〕

有限円柱の複雑な非定常熱応力問題を解析されたことに敬意を表する。以下の点についてご教示いただきたい。

(1) 式(32)において、 F_{en} , G_{en} , F_{on} , G_{on} 以外の未知係数をすべて零とおいて近似解を得ているが、式(32)を満足するためには六つの未知係数が必要ではないか。また、この四つの未知係数に着目されたのは経験によるものかあるいはなにか物理的要請を考慮しているのか。

(2) 図4, 5の圧縮の熱応力において、黒鉛のほうが等方性体より大きくなっているが、これに与える影響は黒鉛の線膨張係数や弾性係数の横等方性より熱伝導率の横等方性の効果のほうがかなり大きいと解釈してもよいのか。

〔回答〕 (1) 式(32)において、未定係数 F_{en} , G_{en} , F_{on} および G_{on} を決定するための方程式は、 $[\sigma_{rz}]_{z=\pm l}=0$ と $[\sigma_{\theta z}]_{z=\pm l}=0$ の場合には同一となるため、式(32)からは四つの方程式が得られる。したがって、四つの未定係数で式(32)は満足することになる。また、 F_{en} , G_{en} , F_{on} および G_{on} の四つの未定係数は、加熱面の温度の項に着目して決定したものである。他の未定係数をすべて零とおき、この四つの未定係数のみで応力を決定し、さらに α_{nm} に関する無限級数とを半無限区間積分に置き換えれば、無限広さの厚板の応力となる。したがって、式(32)のみ満足する近似解は、厳密解の信頼性を表す一つの指標になるものと思われたからである。

(2) 材料定数の横等方性が熱応力に及ぼす影響を調査するために、付表1に示すような熱伝導率、縦弾性係数、横弾性係数および線膨張率の中の一つの材料定数のみが黒鉛と同様の横等方性を示し、他の材料定数はすべて等方性を示す材料を考える。これらの四つの材料の熱源中心上の半径応力と円周応力を付図1と2に示す。熱応力は縦弾性係数と横弾性係数の力学的な横等方性の影響はほとんど受けていないが、熱伝導

付表1 一つの材料定数のみが横等方性を示す材料
($\nu_{rs} = \nu_{rz} = 0.11$)

Material	Material Constant†			
	λ^2	E	G	α
I	1.143	1	0.4504	1
II	1	1.135	0.4504	1
III	1	1	0.3981	1
IV	1	1	0.4504	0.8974

付図1 材料定数の横等方性が半径応力に及ぼす影響

付図2 材料定数の横等方性が円周応力に及ぼす影響

率と線膨張率の熱的な横等方性の影響をかなり受けていることがわかる。したがって、図4と5の黒鉛の圧縮の熱応力が等方性体のそれより大きくなっているのは、熱伝導率と線膨張率の横等方性の影響を受けたためであると思われる。