衝撃接触二体問題のための ペナルティ関数形仮想仕事の原理*

浅 野 直 輝**

A Penalty Function Type of Virtual Work Principle for Impact Contact Problems of Two Bodies

by Naoki ASANO

This paper presents that an impact contact force can be expressed as the product series of penalty functions and subsidiary contact conditions having relative movement components between two bodies on a contact surface. A penalty function type of virtual work principle for various contact and separate states of two bodies is formulated by using the expression of the impact force. This principle is most effective for solving a general impact response of the alternation between contact and separation, and a stress wave propagation response of cracked structures with open and/or closed states on a cracked surface. This is because of both the use of the relative components and the relaxation of all the subsidiary conditions in this principle. A finite element method (FEM) based on this principle is applied to a two-dimensional analysis for longitudinal impact of two uniform rods. The mean value of impact force by FEM results coincides well with the value from the theory of one-dimensional elastic stress wave propagation.

Key Words: Shock, Structural Analysis, Virtual Work Principle, Penalty Function Method, Impact Contact Problem, FEM

1. 緒 言

近年、繊維強化したプラスチック(FRP)や金属材料(FRM)などの複合材料が工業材料として用いられている。しかし、母材や母材と繊維の間にき裂が発生しやすいために、き裂の挙動を中心に、複合材料の機械的性質に関する調査や研究が活発化している。き裂の発生・進展を除く、き裂開閉挙動に関する動力学的検討、例えばき裂面の接触・分離による波動伝ば挙動などは複合材料ばかりでなく、一般のき裂構造物を対象にしても、重要な検討課題と考えられる。

構造形状が複雑で、種々な挙動を示すき裂構造物の運動方程式の構成は難しい課題であるが、衝撃接触二体問題の変分原理を用いると、き裂面上の接触・分離に関する運動方程式は有限要素法(FEM)によって、容易に定式化できる^{(1)~(8)}。

本論文では、き裂開閉を伴う構造物のFEM解析に最適な衝撃二体問題の仮想仕事の原理を、ペナルティ関数法によって構成する。また、本原理に基づいたFEM運動方程式を用いて、2個の縦衝突弾性棒の衝

撃挙動を二次元解析し、本原理の妥当性を検証する。さらに、表1に示した各種仮想仕事の原理から導かれる、き裂開閉時のFEM運動方程式について検討し、本原理によるFEM運動方程式がき裂開閉構造物の波動伝ば挙動の解析に最適であることを示す。

2. 衝撃接触力の表現形式

2個の物体(1),(2)が接触面積 S_c 上で、衝撃的に接触・分離する両状態について考える。物体(α), $\alpha=1,2$ の接触面上の局部座標は、図1に示すように、 S_c 上に垂直な n 方向、 S_c に沿った t_a, t_b の方向の三次元直交座標系とする。いま、物体(α)の S_c 上の変位、速度、加速度の各テンソルを $u_c^{(\alpha)}, \dot{u}_c^{(\alpha)}, \ddot{u}_c^{(\alpha)}$ とすると、物体(1)と(2)の間には、変位の連続性から、次のような条件が成立する^{(1)~(5)}。

$$u_c^{(1)} = u_c^{(2)} + r_c \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\dot{u}_c^{(1)} = \dot{u}_c^{(2)} + \dot{r}_c \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\ddot{u}_c^{(1)} = \ddot{u}_c^{(2)} + \ddot{r}_c \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c$$

ここで、 r_c は2物体間のすきまに相当する相対移動成分を意味する。ただし、2個の物体がすべりを起こさず、一体となって運動する固着状態の場合、式(1)~(3)の r_c 成分は次のようになる。

* 昭和60年12月4日 第935回講演会において講演、原稿受付 昭和60年2月18日。

** 正員、玉川大学工学部 (〒194 町田市玉川学園6-1-1)。

$$r_c = \dot{r}_c = \ddot{r}_c = 0, c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c \dots\dots\dots (4)$$

2・1 ペナルティ法による衝撃接触力の表現 固着状態における衝撃接触力のテンソル R_c は次のように表される⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾.

$$R_c = \beta_c(u_c^{(1)} - u_c^{(2)}) + \psi_c(\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)}) + \gamma_c(\ddot{u}_c^{(1)} - \ddot{u}_c^{(2)}), c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c \dots\dots\dots (5)$$

ここで, $\beta_c, \psi_c, \gamma_c$ はペナルティ係数を表す.

式(1)~(4)を用いると, 式(5)は次のようになる.

$$R_c = G_c + P_c \dots\dots\dots (6)$$

$$G_c = \beta_c(u_c^{(1)} - u_c^{(2)} - r_c) + \psi_c(\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c) + \gamma_c(\ddot{u}_c^{(1)} - \ddot{u}_c^{(2)} - \ddot{r}_c),$$

$$P_c = \xi_c \cdot r_c + \eta_c \cdot \dot{r}_c + \zeta_c \cdot \ddot{r}_c, c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c$$

ここで, ξ_c, η_c, ζ_c はペナルティ係数を表し, $\xi_c = \beta_c, \eta_c = \psi_c, \zeta_c = \gamma_c$ のとき, 式(6)は式(5)になる.

2・2 接触・分離の状態における仮想仕事の原理 表1に2物体の種々な接触・分離の状態に適用できる仮想仕事の原理を示す. 取扱いを簡単にするために, 2物体の減衰効果を無視すると, 固着・分離の両状態における仮想仕事の原理は次のようになる.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \sum_{a=1}^2 (\delta T^{(a)} + \delta E^{(a)} - \delta W^{(a)}) + \delta Q_c \right\} d\tau = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここで, τ_1, τ_2 は時刻, δ は変分演算子, δQ_c は固着・分離の両状態における接触面, または接触予定面上の仮想仕事を示す. $\delta T^{(a)}, \delta E^{(a)}, \delta W^{(a)}$ は仮想の慣性仕事, 内部仕事, 外部仕事で, 次式で求められる^{(1)~(6)}.

$$\left. \begin{aligned} \delta T^{(a)} &= \int_{V^{(a)}} \rho^{(a)} \cdot \ddot{u}_c^{(a)} \cdot \delta u_c^{(a)} dV, \\ \delta E^{(a)} &= \int_{V^{(a)}} \sigma_{ij}^{(a)} \cdot \delta \varepsilon_{ij}^{(a)} dV, \\ \delta W^{(a)} &= \int_{V^{(a)}} F_i^{(a)} \cdot \delta u_i^{(a)} dV + \int_{S^{(a)}} P_i^{(a)} \cdot \delta u_i^{(a)} ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで $V^{(a)}, \rho^{(a)}$ は物体(a)の体積と密度, $\sigma_{ij}^{(a)}$ は応力テンソル, $\delta \varepsilon_{ij}^{(a)}$ は仮想ひずみテンソル, $\ddot{u}_c^{(a)}, \delta u_c^{(a)}$ は加速度と仮想変位のテンソル, $F_i^{(a)}, P_i^{(a)}$ は物体力と表面力のテンソル, $S^{(a)}$ は $P_i^{(a)}$ が作用する表面積を示す.

式(7)における δQ_c は次のように表される.

$$\delta Q_c = \int_{S_c} G_c (\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c) ds + \int_{S_c} P_c \cdot \delta r_c ds,$$

$$c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c, \text{ in a stick state } \dots\dots\dots (9)$$

$$\delta Q_c = \int_{S_c} G_c (\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c) ds,$$

$$c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c, \text{ in a separate state } \dots\dots\dots (10)$$

なお, 式(9), (10)の誘導は付録に示す. また, 式(9), (10)の詳細は式(17), (25)に示す.

2・3 ペナルティ法による仮想仕事の原理の特徴

式(7)をペナルティ係数 Q_c で割ると, 次のようになる.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} (\delta Q_c / Q_c) d\tau = - \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \sum_{a=1}^2 (\delta T^{(a)} + \delta E^{(a)} - \delta W^{(a)}) \right\} d\tau \right] / Q_c,$$

$$c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c \dots\dots\dots (11)$$

ここで, $Q_c \rightarrow \infty$ のとき, 式(11)の右辺は零になり, 次式が得られる.

$$\delta Q_c / Q_c = 0, c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c \dots\dots\dots (12)$$

式(12)は固着状態の場合, 次のようになる.

$$G_c / Q_c = 0, P_c / Q_c = 0, c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c \dots\dots\dots (13)$$

分離状態の場合,

$$G_c / Q_c = 0, c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c \dots\dots\dots (14)$$

式(6)の各種ペナルティ係数が $Q_c \rightarrow \infty$ のとき, 式(13), (14)から, 2物体の接触・分離に関する付帯条件式(1)~(4)が得られる. それ故, 式(9), (10)を用いる式(7)は, 付帯条件式を全て緩和した衝撃接触・

図1 接触面上の局所座標系

表1 衝撃接触二体問題に適用できる変分原理

Methods	Non-hybrid type of displacement method		A hybrid type of displacement method with a Lagrange multiplier
	Method without a penalty function	Method with a penalty function	
Variational principles			
Virtual work principle	Asano ^{(2),(3)}	Asano ⁽⁵⁾ , Yagawa et. al. ⁽⁸⁾ Present method	Asano ^{(1),(4)}
Hamilton's principle	Doi and Asano ⁽¹⁵⁾	—	—

分離状態の仮想仕事の原理になることが証明される。

3. ペナルティ関数形仮想仕事の原理

本章では、2物体の各種接触・分離の状態における付帯条件を、ペナルティ係数で緩和した非増分形仮想仕事の原理を誘導する。なお取扱いを容易にするために、2物体の粘性や衝突による熱的影響などは無視する。接触面上の局所座標は図1に従い、各種の仮想仕事は式(8)を用いる。

接触構造において、2物体間の固着、すべり接触、混合接触、分離の各領域を C_{st} , C_s , C_m , C_0 とすると、全接触領域 S_c は次のように表される。

$$S_c = C_{st} + C_s + C_m + C_0 \quad (15)$$

各種接触・分離の仮想仕事を C_{st} 上で δQ_{st} , C_s 上で δQ_s , C_m 上で δQ_m , C_0 上で δQ_0 とすると、衝撃二体問題の仮想仕事の原理は、式(7)から次のようになる^{(1)~(5)}。

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{a=1}^2 (\delta T^{(a)} + \delta E^{(a)} - \delta W^{(a)}) + \delta Q_{st} + \delta Q_s + \delta Q_m + \delta Q_0 \right\} d\tau = 0 \quad (16)$$

ここで δQ_{st} , δQ_s , δQ_m , δQ_0 は3・1~3・4節で詳細に述べる。

3・1 固着状態 接触構造の2物体が接触領域 C_{st} 上ですべりを起こさず、一体となって運動する状態を考える。固着状態はクーロン摩擦の条件によって判定されるものとする^{(1)(3)~(5)(7)}。接触面上の付帯条件は式(1)~(4)となり、式(16)の δQ_{st} は式(9)から、次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta Q_{st} &= \delta Q_n + \delta Q_{ta} + \delta Q_{tb} \quad (17) \\ \delta Q_c &= \int_{C_{st}} \beta_c (u_c^{(1)} - u_c^{(2)} - r_c) \\ &\quad \times (\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c) ds \\ &\quad + \int_{C_{st}} \psi_c (\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c) (\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c) ds \\ &\quad + \int_{C_{st}} \gamma_c (\ddot{u}_c^{(1)} - \ddot{u}_c^{(2)} - \ddot{r}_c) (\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c) ds \\ &\quad + \int_{C_{st}} \xi_c \cdot r_c \cdot \delta r_c ds + \int_{C_{st}} \eta_c \cdot \dot{r}_c \cdot \delta r_c ds \\ &\quad + \int_{C_{st}} \zeta_c \cdot \ddot{r}_c \cdot \delta r_c ds, \quad c = n, ta, tb \text{ on } C_{st} \end{aligned}$$

ここで δQ_n , δQ_{ta} , δQ_{tb} は C_{st} 上の n , ta , tb 方向における仮想の接触仕事を意味する。

3・2 すべり接触状態 2物体が接触領域 C_s 上の2方向 ta , tb で互いにすべる状態を考える。すべり接触状態はクーロン摩擦の条件から、次式で与えられる^{(1)(3)~(5)(7)}。

$$\begin{aligned} |R_{ta}| &= |\mu_{ta} \cdot R_n| \\ |R_{tb}| &= |\mu_{tb} \cdot R_n| \end{aligned} \quad (18)$$

ここで R_n , R_{ta} , R_{tb} は図1の n , ta , tb 方向における衝撃接触力を示し、 μ_{ta} , μ_{tb} は ta , tb 方向のすべり摩擦係数を意味する。

n 方向における接触変位系の連続性から、接触面上の付帯条件は式(1)~(4)から、次のようになる。

$$\begin{aligned} u_n^{(1)} &= u_n^{(2)} + r_n, \quad \dot{u}_n^{(1)} = \dot{u}_n^{(2)} + \dot{r}_n \\ \ddot{u}_n^{(1)} &= \ddot{u}_n^{(2)} + \ddot{r}_n, \quad r_n = \dot{r}_n = \ddot{r}_n = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

ta , tb 方向における接触面上の付帯条件は、すべりによる相対移動量成分を導入すると、分離状態と同じ扱いになるので^{(1)~(5)}、次のように表される。

$$\begin{aligned} u_c^{(1)} &= u_c^{(2)} + r_c, \quad \dot{u}_c^{(1)} = \dot{u}_c^{(2)} + \dot{r}_c \\ \ddot{u}_c^{(1)} &= \ddot{u}_c^{(2)} + \ddot{r}_c, \quad c = ta, tb \text{ on } C_s \end{aligned} \quad (20)$$

式(19)を用いると、 n 方向の衝撃接触力 R_n は、式(6)から次のようになる。

$$\begin{aligned} R_n &= G_n + P_n \quad (21) \\ G_n &= \beta_n (u_n^{(1)} - u_n^{(2)} + r_n) + \psi_n (\dot{u}_n^{(1)} - \dot{u}_n^{(2)} - \dot{r}_n) \\ &\quad + \gamma_n (\ddot{u}_n^{(1)} - \ddot{u}_n^{(2)} - \ddot{r}_n) \\ P_n &= \xi_n \cdot r_n + \eta_n \cdot \dot{r}_n + \zeta_n \cdot \ddot{r}_n \end{aligned}$$

ここで β_n , ψ_n , γ_n , ξ_n , η_n , ζ_n は n 方向のペナルティ係数を意味する。

すべり接触状態における仮想の摩擦仕事は次のようになる^{(3)~(5)}。

$$\begin{aligned} \int_{C_s} R_{ta} (\delta u_{ta}^{(1)} - \delta u_{ta}^{(2)} - \delta r_{ta}) ds \\ + \int_{C_s} R_{tb} (\delta u_{tb}^{(1)} - \delta u_{tb}^{(2)} - \delta r_{tb}) ds \quad (22) \end{aligned}$$

すべりの ta , tb 方向には、式(22)のほかに、式(10)の相対移動成分による仮想仕事追加される。したがって、式(10), (18)~(22)を用いると、式(16)の δQ_s は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta Q_s &= \delta Q_n + \delta Q_{ta} + \delta Q_{tb} \quad (23) \\ \delta Q_n &= \int_{C_s} \beta_n (u_n^{(1)} - u_n^{(2)} - r_n) \\ &\quad \times (\delta u_n^{(1)} - \delta u_n^{(2)} - \delta r_n) ds \\ &\quad + \int_{C_s} \psi_n (\dot{u}_n^{(1)} - \dot{u}_n^{(2)} - \dot{r}_n) (\delta u_n^{(1)} - \delta u_n^{(2)} - \delta r_n) ds \\ &\quad + \int_{C_s} \gamma_n (\ddot{u}_n^{(1)} - \ddot{u}_n^{(2)} - \ddot{r}_n) (\delta u_n^{(1)} - \delta u_n^{(2)} - \delta r_n) ds \\ &\quad + \int_{C_s} \xi_n \cdot r_n \cdot \delta r_n ds + \int_{C_s} \eta_n \cdot \dot{r}_n \cdot \delta r_n ds \\ &\quad + \int_{C_s} \zeta_n \cdot \ddot{r}_n \cdot \delta r_n ds \\ \delta Q_c &= \int_{C_s} \{ \mu_c \cdot \beta_n (u_n^{(1)} - u_n^{(2)} - r_n) + \mu_c \cdot \xi_n \cdot r_n \\ &\quad + \beta_c (u_c^{(1)} - u_c^{(2)} - r_c) \} (\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c) ds \\ &\quad + \int_{C_s} \{ \mu_c \cdot \psi_n (\dot{u}_n^{(1)} - \dot{u}_n^{(2)} - \dot{r}_n) + \mu_c \cdot \eta_n \cdot \dot{r}_n \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \phi_c(\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c)(\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c)ds \\
& + \int_{C_s} \{ \mu_c \cdot \gamma_n(\dot{u}_n^{(1)} - \dot{u}_n^{(2)} - \dot{r}_n) + \mu_c \cdot \xi_n \cdot \dot{r}_n \} \\
& + \gamma_c(\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c)(\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c)ds \\
& c = t_a, t_b \text{ on } C_s
\end{aligned}$$

ここで、式中 $\mu_c \cdot \xi_n \cdot r_n, \mu_c \cdot \eta_n \cdot \dot{r}_n, \mu_c \cdot \xi_n \cdot \dot{r}_n$ の項は式(19)から $r_n = \dot{r}_n = \ddot{r}_n = 0$ となるので、省略できる。

3・3 混合接触状態 2物体が接触領域 C_m 上で t_a 、または t_b の一方方向で固着状態、他方向ですべり接触状態となる混合接触状態を考える。一例として、 t_a 方向で固着状態、 t_b 方向ですべり接触状態の場合^{(1)~(5)}、式(16)の δQ_m は紙数の関係上、結果のみを示すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta Q_m &= \delta Q_n + \delta Q_{t_a} + \delta Q_{t_b} \dots\dots\dots (24) \\
\delta Q_c &= \int_{C_m} \beta_c(u_c^{(1)} - u_c^{(2)} - r_c) \\
&\quad \times (\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c)ds \\
&+ \int_{C_m} \phi_c(\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c)(\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c)ds \\
&+ \int_{C_m} \gamma_c(\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c)(\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c)ds \\
&+ \int_{C_m} \xi_c \cdot r_c \cdot \delta r_c ds + \int_{C_m} \eta_c \cdot \dot{r}_c \cdot \delta r_c ds \\
&+ \int_{C_m} \xi_c \cdot \dot{r}_c \cdot \delta r_c ds, c = n, t_a \\
\delta Q_{t_b} &= \int_{C_m} \{ \mu_{t_b} \cdot \beta_n(u_n^{(1)} - u_n^{(2)} - r_n) + \mu_{t_b} \cdot \xi_n \cdot r_n \} \\
&\quad + \beta_{t_b}(u_{t_b}^{(1)} - u_{t_b}^{(2)} - r_{t_b})(\delta u_{t_b}^{(1)} - \delta u_{t_b}^{(2)} - \delta r_{t_b})ds \\
&+ \int_{C_m} \{ \mu_{t_b} \cdot \phi_n(\dot{u}_n^{(1)} - \dot{u}_n^{(2)} - \dot{r}_n) + \mu_{t_b} \cdot \eta_n \cdot \dot{r}_n \} \\
&\quad + \phi_{t_b}(\dot{u}_{t_b}^{(1)} - \dot{u}_{t_b}^{(2)} - \dot{r}_{t_b})(\delta u_{t_b}^{(1)} - \delta u_{t_b}^{(2)} - \delta r_{t_b})ds \\
&+ \int_{C_m} \{ \mu_{t_b} \cdot \gamma_n(\dot{u}_n^{(1)} - \dot{u}_n^{(2)} - \dot{r}_n) + \mu_{t_b} \cdot \xi_n \cdot \dot{r}_n \} \\
&\quad + \gamma_{t_b}(\dot{u}_{t_b}^{(1)} - \dot{u}_{t_b}^{(2)} - \dot{r}_{t_b})(\delta u_{t_b}^{(1)} - \delta u_{t_b}^{(2)} - \delta r_{t_b})ds \\
&\text{on } C_m
\end{aligned}$$

3・4 分離状態 2物体が分離すると、各物体は独立に運動するので、各物体毎に仮想仕事の原理が適用される。しかし、分離状態から各種接触状態に至る過程は、両物体間のすきまによって判別されるので〔例えば、式(4)の成否〕、分離状態を二体問題として扱うと、都合がよい。また演算時間の節約にもなる⁽²⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾。両物体間の付帯条件は式(1)~(3)によって表されるので、式(16)の δQ_0 は式(10)になる。詳細は次のとおりである。

$$\begin{aligned}
\delta Q_0 &= \delta Q_n + \delta Q_{t_a} + \delta Q_{t_b} \dots\dots\dots (25) \\
\delta Q_c &= \int_{C_0} \beta_c(u_c^{(1)} - u_c^{(2)} - r_c)(\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c)ds \\
&\quad + \int_{C_0} \phi_c(\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c)(\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c)ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{C_0} \gamma_c(\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c)(\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c)ds, \\
& c = n, t_a, t_b \text{ on } C_0
\end{aligned}$$

4. 数値計算例

衝撃接触力の式(6)、および接触・分離の仮想仕事の式(9)、(10)を確かめるために、3章に示した二体問題の仮想仕事の原理に基づいて誘導した FEM 運動方程式を、2個の縦衝突弾性棒に適用し、衝撃接触力の挙動を調べる。なお、FEM 運動方程式の誘導は多くの紙数を必要とするので、割愛させていただく。

4・1 解析モデル 縦衝突弾性棒の二次元 FEM 解析モデルを図2に示す。材質は軟鋼とし、取扱いを簡単にするために、弾性挙動に限定し、粘性などによる減衰効果は無視する。

長さの異なる二次元弾性棒(1)、(2)は平坦な端面で縦衝突する。両棒の接触面積は弾性挙動において、衝突速度に影響されないので、棒(2)は単位速度 $V = 1 \text{ m/s}$ で固定棒(1)に衝突し、塑性変形を生じないものとする。接触面上のすべり摩擦係数は、各節点予定節点対ですべて0.2と仮定する。接触予定節点は衝撃による接触面形状の変化や応力分布の計算に追従できる程度の間隔で、節点を接触面に離散化する。

異なる寸法の要素を用いると、応力波伝ばにおいて干渉や反射を起こすおそれがあるので⁽³⁾、両棒は同一寸法の定応力形三角形要素を使用する。また、両棒は形状の対称性から、上半分を解析対象とする。

積分の時分割は $0.1 \mu\text{s}$ とし、FEM 運動方程式の数値解法にルンゲ・クッタ・ギルの四次法を用いる。演算時間の節約のために、集中質量を用いる⁽⁷⁾。

4・2 各種ペナルティ係数の数値について 2物体の減衰効果を省略すると、固着状態の FEM 運動方程式は、概括的に次のように表される⁽⁵⁾。

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_c & -\Gamma_c & -\Gamma_c \\ -\Gamma_c & \Gamma_c & \Gamma_c \\ -\Gamma_c & \Gamma_c & \Gamma_c + Z_c \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{\Delta} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \Phi_c & -\Phi_c & -\Phi_c \\ -\Phi_c & \Phi_c & \Phi_c \\ -\Phi_c & \Phi_c & \Phi_c + Y_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{\Delta} \end{bmatrix} \\
& + \left\{ \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_c & -B_c & -B_c \\ -B_c & B_c & B_c \\ -B_c & B_c & B_c + \Xi_c \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \Delta \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (26)
\end{aligned}$$

ここで、 M, K は質量と剛性の行列、 $\dot{X}, \ddot{X}, X, \Delta, F$

はそれぞれ加速度, 速度, 変位, 相対移動量, 外力の各行列を示す. 添字 1, 2 は図 2 の棒 (1), (2) に対応する. また $\Gamma, \Phi, B, Z, Y, \Xi$ は各種ペナルティ係数に基づく行列を表し, 添字 c は接触節点領域を意味する.

式 (26) の各種ペナルティ行列の要素の諸値が無限大に近づくとき, 式 (13), (14) からわかるように, 付帯条件式 (1) ~ (4) が自動的に満足される. しかしながら, 数値解析において, 各種ペナルティ行列要素の諸値は, 電子計算機の打ち切り誤差を考慮して設定する必要がある⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾. そこで, 次のように与える⁽⁵⁾.

$$\Gamma_c = M_1 \cdot a, B_c = K_1 \cdot a, \Phi_c = B_c, \dots \dots \dots (27)$$

ここで, a はペナルティ行列要素の M_1, K_1 に対する比を表す. 分離状態の場合, 式 (26) の Z_c, Y_c, Ξ_c は式 (10), (25) からわかるように, 零になる. 固着状態の場合, 式 (26) の Z_c, Y_c, Ξ_c は式 (5), (6), (9) の関係から, 次のように設定される.

$$Z_c = \Gamma_c, Y_c = \Phi_c, \Xi_c = B_c \dots \dots \dots (28)$$

以上のことから, 接触・分離の状態は, 式 (26) において, Z_c, Y_c, Ξ_c が式 (28) か, 零かによって決定されることになる.

4.3 衝撃接触力の挙動 式 (27) の $a=10^6$ の条件のもとで, 図 2 の全接触節点に作用する衝撃接触力の総和を, 一次元弾性応力波伝ば理論値⁽²⁾⁽⁷⁾とともに, 図 3 に示す. 本 FEM による衝撃接触力は理想化された一次元理論値を中心に変動している. 矢川らの調査からも明らかなように⁽⁸⁾, 大きなうねりは二次元波動伝ばによる横慣性の影響によるものであり, 周期約 $1 \mu s$ の高次振動は離散化による誤差である. また図 3 の衝撃接触力は $a=10^2 \sim 10^{70}$ の範囲において成立する.

図 2 縦衝撃弾性棒の二次元 FEM 解析モデル

図 3 衝撃接触力の時間変化

本 FEM による衝撃接触力は文献 (5) のペナルティ法 FEM による計算結果や, 文献 (4), (7) による FEM 計算値に一致する. また, 接触・分離を示す時刻は幅広い解析モデルにもかかわらず, 一次元理論値に近い値となっている. さらに, FEM による接触時間や衝撃端から離れた表面の応力は, 実験による値にほぼ一致するので⁽¹⁷⁾, 本 FEM による計算結果の妥当性が認められる.

5. き裂開閉時の FEM 運動方程式の検討

き裂を含む構造物の剛性は, き裂面の開閉で変わる. 取扱いを簡単にするため, 図 4 のようなき裂構造を考える. き裂棒の自由端で変動荷重 $F(t)$, または変位 $U(t)$ を受けて, き裂が開閉するものとする. 図 5 にき裂部近傍を示す. いま, 棒全体を三つの領域に分類する.

5.1 き裂開閉時の FEM 運動方程式の問題点

き裂面が閉じた接触状態において, 図 5 の衝撃接触節点力 R_i ($i=1, 2, \dots$) は領域 (1), (2) のき裂面上で, 互いに逆向きに作用する. き裂面はすべりを起こさず, 構造物の減衰効果が無視できる場合, き裂構造物の運動方程式は次のようになる⁽²⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾⁽¹⁵⁾⁽¹⁸⁾.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} \\ 0 & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R \\ R \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (29)$$

ここで M, K は質量と剛性の行列, $X, \ddot{X}, F$ は変位,

図 4 二次元き裂構造のモデル

図 5 き裂面上の接触節点力

加速度, 荷重の行列である。添字 1~3 は図 5 の領域を示し, 二重の添字は各領域との連成関係を意味する。 R は未知の衝撃接触力の行列で, き裂面上の R_i から構成される。

式(29)から未知の R 行列を消去すると, き裂開口時の運動方程式は次のようになる⁽⁷⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{11}+M_{22} & M_{13}+M_{23} \\ M_{13}+M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_{12} \\ \ddot{X}_3 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_{11}+K_{22} & K_{13}+K_{23} \\ K_{13}+K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_3 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} F_1+F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}, \ddot{X}_{12}=\ddot{X}_1=\ddot{X}_2, X_{12}=X_1=X_2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (30)$$

き裂開口時の運動方程式は式(29)で $R=0$ とおくと, 求められる。しかしながら, 運動方程式の行列サイズはき裂開閉時において, 常に変化する。その結果, き裂面上の接触状態の変化によって, 質量と剛性の行列を逐次再構成しながら, 運動方程式を解くことになる。したがって, 電算機のプログラム構造が複雑になり, かつ長時間にわたる演算が必要になる。それ故, 運動方程式の行列サイズは, き裂開閉時において, 常に一定であることが望ましい。さらに, 運動方程式の質量と剛性の行列は, き裂開閉時において変化するが, これらの行列内の変更要素ができるかぎり少ないと, 能率的な演算が可能になる。また, 対称行列になると, 電子計算機の使用記憶容量が半分近く減少するので, いっそう効率的になる。

5・2 各種仮想仕事の原理によるき裂開閉時の FEM 運動方程式の比較 き裂開閉時の運動方程式を次のように表現する。

$$[M][\ddot{X}] + [K][X] = [F] \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここで M, K は質量と剛性の行列, $X, \ddot{X}, F$ は変位, 加速度, 荷重の行列である。

5・2・1 ハイブリッド形の原理⁽⁴⁾による場合 式(31)の各種行列は次のようになる⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned} [M] &= [L]_{(L=M)}, [K] = [L]_{(L=K)}, \\ [\ddot{X}] &= \frac{d^2}{dt^2}[X] \\ \text{き裂開口時:} \\ [L] &= \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & I_c & L_{13} \\ 0 & L_{22} & -I_c & L_{23} \\ I_c^T & -I_c^T & 0 & 0 \\ L_{13} & L_{23} & 0 & L_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} [X] &= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ R \\ X_3 \end{bmatrix}, [F] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} \\ \text{き裂開口時:} \\ [L] &= \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & L_{13} \\ 0 & L_{22} & 0 & L_{23} \\ I_c^T & -I_c^T & -I_c & 0 \\ L_{13} & L_{23} & 0 & L_{33} \end{bmatrix}, \\ [X] &= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \Delta \\ X_3 \end{bmatrix}, [F] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここで I_c は接触節点全域の単位行列, Δ はすきまの成分を表す。き裂開閉時において, $[L]$ 内の 3 列めの点線枠内の要素が変化する。なお $[]^T$ は転置行列を示す。

5・2・2 ペナルティ形の原理⁽⁵⁾による場合 式(31)の各種行列は次のようになる⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned} [X] &= [X_1, X_2, X_3]^T, \\ [F] &= [F_1, F_2, F_3]^T, \\ [\ddot{X}] &= \frac{d^2}{dt^2}[X], \\ [L] &= \begin{bmatrix} L_{11}+H & -H & L_{13} \\ & L_{22}+H & L_{23} \\ \text{SYM.} & & L_{33} \end{bmatrix} \\ \text{き裂開口時:} \\ [M] &= [L]_{(L=M, H=I_c)}, [K] = [L]_{(L=K, H=B_c)} \\ \text{き裂開口時:} \\ [M] &= [L]_{(L=M, H=0)}, [K] = [L]_{(L=K, H=0)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

ここで, H はペナルティ係数による成分を表す。き裂開閉時において, $[L]$ はともに対称行列になるが, 点線枠内の変更要素は多くなる。

5・2・3 本原理による場合 式(7)~(10)を用いると, 式(31)の各種行列は次のようになる⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned} [L] &= \begin{bmatrix} L_{11}+H & -H & -H & L_{13} \\ & L_{22}+H & H & L_{23} \\ & & H+J & 0 \\ \text{SYM.} & & & L_{33} \end{bmatrix}, \\ [X] &= [X_1, X_2, \Delta, X_3]^T \\ [F] &= [F_1, F_2, 0, F_3]^T, [\ddot{X}] = \frac{d^2}{dt^2}[X] \end{aligned} \right\}$$

き裂閉口時:

$$[M]=[L]_{(L=M, H=\Gamma_c, J=Z_c)}, [K]=[L]_{(L=K, H=B_c, J=Z_c)}$$

き裂開口時:

$$[M]=[L]_{(L=M, H=\Gamma_c, J=0)}, [K]=[L]_{(L=K, H=B_c, J=0)}$$

.....(34)

き裂開閉時において, $[L]$ はともに対称行列になり, 点線枠内の変更要素は式(32), (33)に比べて, 最も少ない。ただし, 運動方程式の行列サイズは多くなる。したがって, 本原理に基づく FEM 運動方程式がき裂開閉時の挙動解析に最適であることがわかる。

なお, き裂開閉を伴う構造物のシミュレーションの結果は紙数不足のため, 省略し, 別の機会に報告させていただく。

6. 結 言

本論文では, 次のような結論を得た。

(1) 衝撃接触・分離を伴う二体問題に適用できる仮想仕事の原理をペナルティ関数法によって構成した。本原理には, 先に提唱したペナルティ関数法による原理⁽⁵⁾に比べて, 相対移動成分系が導入されている。

(2) 本原理に基づく FEM 運動方程式によって, 2 個の縦衝突弾性棒の衝撃挙動を二次元解析した。衝撃接触力および接触・分離の時間変化から, 本原理の妥当性が検証された。

(3) 接触・分離をくり返すき裂開閉構造物の波動伝ば解析に必要な FEM 運動方程式について検討した。き裂面上の接触・分離の両状態において, 本原理に基づく FEM 運動方程式の質量と剛性の両行列内の変更要素は, 他の原理⁽⁴⁾⁽⁵⁾による場合の行列の変更要素に比べて, 最も少ない。したがって, 本原理はき裂開閉構造物の波動伝ば挙動の FEM 解析に対して, 最適な原理であることがわかった。

付録. 式(9), (10)の誘導

(I) 2 物体の分離状態におけるハミルトンの原理
2 物体の衝撃接触に関するハミルトンの原理は, 固着状態の場合, 次のようになる⁽⁴⁾。

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \{T_c - \Pi_c\} d\tau = 0 \quad \text{.....(35)}$$

$$T_c = \sum_{a=1}^2 T^{(a)} + \int_{S_c} \dot{\lambda}_c (\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c) ds,$$

$$\Pi_c = \sum_{a=1}^2 \Pi^{(a)} + \int_{S_c} \lambda_c (u_c^{(1)} - u_c^{(2)} - r_c) ds,$$

$$\dot{\lambda}_c = \frac{d}{dt}(\lambda_c), \Pi^{(a)} = E^{(a)} - W^{(a)},$$

$$c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c$$

ここで, λ_c はラグランジュ乗数, $T^{(a)}, \Pi^{(a)}$ は物体 (a) の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを表す。 T_c, Π_c の右辺最後の項は文献(4)(13)で検討したように, 衝撃接触による両物体の各種エネルギーの差である。 $T^{(a)}, E^{(a)}, W^{(a)}$ は式(8)に準じ求められる。

相対移動成分系 $r_c, \dot{r}_c$ を導入すると, 式(35)は次のように書きかえられる。

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \{T_c - \Pi_c\} d\tau = 0 \quad \text{.....(36)}$$

$$T_c = \sum_{a=1}^2 T^{(a)} + \int_{S_c} \dot{\lambda}_c (\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c) ds$$

$$+ \int_{S_c} \dot{p}_c \cdot \dot{r}_c ds,$$

$$\Pi_c = \sum_{a=1}^2 \Pi^{(a)} + \int_{S_c} \lambda_c (u_c^{(1)} - u_c^{(2)} - r_c) ds$$

$$+ \int_{S_c} p_c \cdot r_c ds,$$

$$\Pi^{(a)} = E^{(a)} - W^{(a)}, \dot{\lambda}_c = \frac{d}{dt}(\lambda_c), \dot{p}_c = \frac{d}{dt}(p_c),$$

$$c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c$$

ここで p_c はラグランジュ乗数で, $p_c = \lambda_c$ である。固着状態において, 相対移動成分系は式(4)からわかるように, $r_c = \dot{r}_c = 0$ になる。したがって, 式(36)の T_c, Π_c の右辺最後の項は, $\dot{p}_c$ と p_c によって, $r_c = \dot{r}_c = 0$ を緩和したことになる。

分離状態では, $r_c \neq 0, \dot{r}_c \neq 0$ になる。そこで, 式(36)の T_c, Π_c の右辺最後の項が省略できる。したがって, 分離状態における二体問題のハミルトンの原理は次のようになる。

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \{T_c - \Pi_c\} d\tau = 0 \quad \text{.....(37)}$$

$$T_c = \sum_{a=1}^2 T^{(a)} + \int_{S_c} \dot{\lambda}_c (\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c) ds,$$

$$\Pi_c = \sum_{a=1}^2 \Pi^{(a)} + \int_{S_c} \lambda_c (u_c^{(1)} - u_c^{(2)} - r_c) ds,$$

$$\Pi^{(a)} = E^{(a)} - W^{(a)}, \dot{\lambda}_c = \frac{d}{dt}(\lambda_c),$$

$$c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c$$

変分操作は次の条件に従う⁽¹³⁾。

$$\delta u_c^{(a)}(\tau) = \delta \dot{u}_c^{(a)}(\tau) = \delta \lambda_c(\tau) = \delta \dot{\lambda}_c(\tau) = 0,$$

$$\tau = \tau_1, \tau_2, \alpha = 1, 2, c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c \quad \text{.....(38)}$$

式(38)を用いて, 式(37)を仮想仕事の原理の表現形式に改めると, 文献(4)の式(35)が得られる。それ故, 式(37)が分離状態における二体問題のハミルトンの原理になることが証明される。

(II) 式(9)の誘導 ペナルティ法は最小二乗法の概念に属する。ペナルティ法を適用すると, 式(36)は次のようになる。

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \{T_c - \Pi_c\} d\tau = 0 \quad \text{.....(39)}$$

$$T_c = \sum_{a=1}^2 T^{(a)} + \int_{S_c} \frac{\gamma_c}{2} (\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c)^2 ds \\ + \int_{S_c} \frac{\xi_c}{2} \dot{r}_c^2 ds,$$

$$\Pi_c = \sum_{a=1}^2 \Pi^{(a)} + \int_{S_c} \frac{\beta_c}{2} (u_c^{(1)} - u_c^{(2)} - r_c)^2 ds \\ + \int_{S_c} \frac{\xi_c}{2} r_c^2 ds,$$

$$\Pi^{(a)} = E^{(a)} - W^{(a)}, \quad c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c$$

ここで, $\beta_c, \gamma_c, \xi_c, \zeta_c$ はペナルティ係数である。

式(38)を用いて, 式(39)を変分すると, 次のような仮想仕事の原理の表現形式が得られる。

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \sum_{a=1}^2 (\delta T^{(a)} + \delta E^{(a)} - \delta W^{(a)}) + \delta Q'_c \right\} d\tau = 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$\delta Q'_c = \int_{S_c} G'_c (\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c) ds + \int_{S_c} P'_c \delta r_c ds,$$

$$G'_c = \gamma_c (\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c) + \beta_c (u_c^{(1)} - u_c^{(2)} - r_c),$$

$$P'_c = \zeta_c \cdot \dot{r}_c + \xi_c \cdot r_c, \quad R'_c = G'_c + P'_c,$$

$$c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c$$

R'_c からわかるように, 衝撃接触力は両物体の接触変位差, 速度差, 加速度差から構成される⁽¹⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽¹⁴⁾。そこで, 両物体の接触速度差に関する衝撃接触力の成分は, 次のように表される⁽⁵⁾⁽¹⁴⁾。

$$\psi_c (\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c) + \eta_c \cdot \dot{r}_c, \quad c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c \quad \dots\dots\dots (41)$$

式(41)を式(40)の G'_c, P'_c に導入すると, 式(6)が得られる。式(40)の G'_c, P'_c の代わりに, 式(6)の G_c, P_c を式(40)に適用すると, 式(9)が得られる。

(III) 式(10)の誘導 式(37)にペナルティ法を適用すると, 次のようになる。

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \{ T_c - \Pi_c \} d\tau = 0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$T_c = \sum_{a=1}^2 T^{(a)} + \int_{S_c} \frac{\gamma_c}{2} (\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c)^2 ds,$$

$$\Pi_c = \sum_{a=1}^2 \Pi^{(a)} + \int_{S_c} \frac{\beta_c}{2} (u_c^{(1)} - u_c^{(2)} - r_c)^2 ds,$$

$$\Pi^{(a)} = E^{(a)} - W^{(a)}, \quad c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c$$

式(38)を用いて, 式(42)を変分すると, 次のような仮想仕事の原理の表現形式が得られる。

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \sum_{a=1}^2 (\delta T^{(a)} + \delta E^{(a)} - \delta W^{(a)}) + \delta Q'_c \right\} d\tau = 0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$\delta Q'_c = \int_{S_c} G'_c (\delta u_c^{(1)} - \delta u_c^{(2)} - \delta r_c) ds,$$

$$G'_c = \gamma_c (\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c) + \beta_c (u_c^{(1)} - u_c^{(2)} - r_c),$$

$$c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c$$

式(43)の G'_c は両物体間の接触変位差, 加速度差の成分から成り立っている。そこで, 次のような接触速度差の成分を考える⁽⁵⁾⁽¹⁴⁾。

$$\psi_c (\dot{u}_c^{(1)} - \dot{u}_c^{(2)} - \dot{r}_c), \quad c = n, t_a, t_b \text{ on } S_c \quad \dots\dots\dots (44)$$

式(44)を式(43)の G'_c 成分に導入すると, 式(6)の G_c が得られる。式(43)の G'_c の代わりに, 式(6)の G_c を用いると, 式(10)が得られる。

文 献

- (1) 浅野, 機論, 49-439, A (昭58), 322.
- (2) 浅野, 機論, 46-411, A (昭55), 1249.
- (3) 浅野, 機論, 49-438, A (昭58), 215.
- (4) 浅野, 機論, 51-470, A (昭60), 2317.
- (5) 浅野, 機論, 51-467, A (昭60), 1893.
- (6) 浅野, 機論, 47-420, A (昭56), 841.
- (7) 土肥・浅野, 機論, 46-407, A (昭55), 826.
- (8) 矢川・ほか2名, 機論, 49-448, A (昭58), 1581.
- (9) 矢川・ほか2名, 機論, 46-411, A (昭55), 1220.
- (10) 矢川・ほか3名, 機論, 48-428, A (昭57), 454.
- (11) 浅野, 玉川学園学術教育研究所報, No. 4 (昭59), 23.
- (12) 浅野, 機論, No. 852-1 (昭60-3), 28.
- (13) 浅野, 機論, No. 840-1, (昭59-3), 89.
- (14) Do. C., *Proc. IUTAM Symp.*, (1978), 237.
- (15) 土肥・浅野, 機論, No. 760-17 (昭51-10), 141.
- (16) 土肥・浅野, 機論, No. 760-17 (昭51-10), 144.
- (17) 浅野, 機論, No. 800-9 (昭55-7), 95.