主として全体的 J スカラーの使用による有限要素三次元 J 積分解析*大 路 清 嗣**, 久 保 司 郎**
末 広 祥 三***, 西 村 一 彦†Three-Dimensional J -Integral Analysis Using the Global J Scalar Methodby Kiyotsugu OHJI, Shiro KUBO,
Shozo SUEHIRO, and Kazuhiko NISHIMURA

The local J -vector, J_{local} , can be defined for three-dimensional cracks at any point on a crack front. The numerical determination of the J -value along the crack front is usually based on this expression of J_{local} . The authors have previously proposed an alternative method, i. e. the global J -scalar method, for determining the J -distribution along the crack front. In this paper, elastic and elastic-plastic stress-strain and J -integral analyses were performed for center-cracked panels and plates with semi-circular surface cracks, by combining three-dimensional FEM techniques with the global J -scalar method. The J -distribution was expressed by a series of functions. It was found that good accuracies can be obtained if suitable functions are selected for the description of the J -distribution. The global J -scalar method was rather insensitive to intrinsic numerical errors involved in the FEM calculations, as compared with the usually employed local J -vector method, and is thought to be a promising J -evaluation method.

Key Words: Fracture, Three-dimensional crack, J -integral, Through-crack, Surface crack, FEM, Global J -scalar, Local J -vector

1. 緒 言

き裂の評価のため、二次元き裂の J 積分解析が実施され、多くの知見が得られている。しかしながら、実構造物の中に存在するき裂は、二次元的形状を有していることはまれである。また、たとえ見かけ上二次元的なき裂であっても、板厚方向のつりあいおよび変形の寄与により、三次元的効果が生じていることが少なくない。き裂問題に関するこのような三次元的効果を検討するため、三次元 J 積分解析が、数多くなされるようになった^{(1)~(13)}。

き裂の三次元応力・ひずみ解析手法としては、有限要素法がよく使用されている。有限要素解析などにより求められた応力およびひずみの解析結果より、き裂前縁上における、ある特定の点の J 積分値を求める方法としては、その点を含む板状領域内のエネルギー収支を考える方法を採用するのが普通である。この方法は、著者らの分類⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾では、局所的 J ベクトル J_{local} を用いる評価法であると解釈される。

著者らは、前報⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾において、三次元き裂の J 積分に関する理論的考察を行い、三次元き裂の全体的な特性を表現する力学量として、全体的 J スカラー J_{global} の提案を行った。さらに、この全体的 J スカラーを用いることにより、局所の J 積分の分布を決定する方法の提案を行った。

従来用いられてきた、局所的 J ベクトル J_{local} を直接求める方法では、応力およびひずみの空間微分値の計算が含まれているため、 J 積分値が応力およびひずみ解の変動に左右されやすいことが考えられる。これに対し、全体的 J スカラーを用いる方法では、このような応力・ひずみの微分値を含まない形で、局所的 J ベクトルの分布を求めることが可能である。弾塑性軸対称き裂問題に対しては、このような J_{global} 法の有効性がすでに確認されている⁽¹⁶⁾。

そこで本報告では、解析対象として中央き裂平板および半円表面き裂を取り上げ、き裂前縁に沿い J 積分値が変化する場合に対し有限要素解析を行い、従来の局所的 J ベクトルによる J 積分評価を行うとともに、全体的 J スカラーによる J 値分布評価法の妥当性の検討を行った。

* 昭和58年3月19日 関西支部第58期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和60年3月18日。

** 正員、大阪大学工学部 (〒565 吹田市山田丘2-1)。

*** 正員、川崎重工業(株) (〒673 明石市川崎町)。

† 東レ(株) (〒455-91 名古屋市港区大江町)。

2. 三次元き裂の J 積分に関する基礎事項⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾

三次元き裂の J 積分に関する数値解析について説明する前に、本解析の基礎となる事項について本章で述べておくことにする。

2.1 局所的 J ベクトル (J_{local}) 法 図1に示すように、き裂前縁上の一点 O を含む長さ B の範囲においてき裂前縁と交わる、物体領域を V とする。このとき、点 O における局所的 J ベクトル J_{local} は、直角座標系 ($x_1=x, x_2=y, x_3=z$) に対し次のように書き直すことができる。

$$J_{\text{local}} = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{1}{B} \int_{S_B} (W \nu_j - T_i u_{i,j}) i_j dS \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 S_B は体積 V の表面、 W はひずみエネルギー密度、 ν_j は S_B の外向き単位法線ベクトル、 T_i は応力ベクトル、 u_i は変位ベクトル、 i_j は x_j 方向の単位ベクトルである。また、“ k ” の表示は x_k に関する偏微分を表す。添字の重複については総和規約を適用する。

J_{local} の x_j 方向成分を J_j で表すと、

$$J_{\text{local}} = J_1 i_1 + J_2 i_2 + J_3 i_3 \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。局所的 J スカラー J_{local} を、 J_{local} の絶対値として定義すると、

$$J_{\text{local}} = |J_{\text{local}}| = \sqrt{J_j J_j} \quad \dots\dots\dots (3)$$

き裂が面 $xz(x_1x_3)$ と平行な面内にあり、かつ z 軸 (x_3) が点 O におけるき裂前縁接線方向に平行であれば、点 O を含む薄い平板状領域を想定することにより、 J_k は次のように書き直すことができる⁽¹⁾⁽¹⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} J_k &= \int_{\Gamma} (W \nu_k - T_i u_{i,k}) dS \\ &\quad - \int_A (\sigma_{3i} u_{i,k})_{,3} dA \quad (k=1, 2) \\ J_3 &= \int_{\Gamma} (-T_i u_{i,3}) dS \\ &\quad + \int_A (W - \sigma_{3i} u_{i,3})_{,3} dA \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 Γ は平板内でき裂先端を囲む経路、 A は Γ

図1 J_{local} 計算のための積分経路および積分面

およびき裂面で囲まれる面積である。式(4)による J_{local} 評価の方法を、以下では局所的 J ベクトル (J_{local}) 法と呼ぶことにする。

2.2 全体的 J スカラー (J_{global}) 法 V 内で定義され、き裂前縁においてき裂成長量に対応していると考えられる、1階微分可能なベクトル $m (= m_j i_j)$ を用いると、全体的 J スカラー J_{global} ⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾ は次式で与えられる。

$$J_{\text{global}} = \int_S (W \nu_j - T_i u_{i,j}) m_j dS + \int_V (W m_{j,j} - \sigma_{ik} u_{i,j} m_{j,k}) dV \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 S はき裂前縁の全体あるいはその一部を包み込む局面、 V は S で囲まれる体積である。 J_{global} は積分面 S のとり方に依存しない。

J_{local} と J_{global} の間には、ベクトル m を介して、

$$J_{\text{global}} = \int_f (J_{\text{local}} \cdot m) df \quad \dots\dots\dots (6)$$

なる関係がある。ここに、線積分 f は、対象となっているき裂前縁についてとるものとする。

式(6)より、ベクトル m を種々に変化させたときの J_{global} を求め、それらを組合せることにより、 J_{local} および J_{local} の分布を求めることが可能となる。以下では、この方法を全体的 J スカラー (J_{global}) 法と呼ぶことにする。

3. 中央き裂平板の解析

引張りを受ける中央貫通き裂の問題においても、板厚と板幅の比が有限値をとる場合、応力・ひずみは三次元的に変化する。本章では、三次元 J 値解析の最も簡単なものの一つであり、従来の比較解析資料の豊富な、中央き裂平板を解析対象として選んだ。

3.1 解析対象 解析に用いた中央き裂平板の形状を図2に示す。図には全体の1/8が示されている。

図2 中央貫通き裂平板

負荷として、 y 軸方向に一様引張応力 p が作用するものとした。板長 H と板幅 W との比を 2、き裂長さ $2a$ と W との比を 0.4 とした。板厚 t については、弾性解析では $t=W$ 、 $t=0.5W$ の 2 とおりを、弾塑性解析では $t=W$ をそれぞれ採用した。

3.2 J_{local} 分布の評価

3.2.1 局所的 J ベクトル法 J_{local} がき裂前縁に垂直であること⁽¹⁴⁾、および y 軸に関する問題の対称性より、 $J_2=J_3=0$ が成立する。したがって、本章の問題に対しては、

$$J_{\text{local}}=J_1 i_1, \quad J_{\text{local}}=J_1 \dots\dots\dots(7)$$

となる。そこで、式(4)の J_1 定義式を用いて、局所的 J ベクトルに基づく J_{local} 評価を行った。

3.2.2 全体的 J スカラー法

(i) J_{local} の偶数次多項式近似を用いる方法
問題の対称性より、 J_{local} を、 z に関する偶数次多項式、

$$J_{\text{local}}=b_0+b_1(2z/t)^2+b_2(2z/t)^4+\dots\dots\dots+b_n(2z/t)^{2n} \dots\dots\dots(8)$$

で近似する。ここに、 n は非負の整数である。いま、 $J_{\text{global}}(\mathbf{m})$ の定義に用いるベクトル $\mathbf{m}$ として、

$$\mathbf{m}^{(k)}=\{2(2k+1)/t\}(2z/t)^{2k}i_1 \dots\dots\dots(9)$$

を用いる。 J_{local} と J_{global} の間の関係式(6)に、式(8)および(9)を代入すると、次式が得られる。

$$J_{\text{global}}(\mathbf{m}^{(k)})=2(2k+1)\sum_{i=0}^n b_i/[2(k+i)+1] \dots\dots\dots(10)$$

ここで、 k を零から n まで変えたときの $\mathbf{m}^{(k)}$ に対する J_{global} をそれぞれ式(5)で求め、式(10)に代入すると、係数 $b_k(k=0, 1, \dots, n)$ に関する $(n+1)$ 元の連立一次方程式が得られる。この方程式を解けば、式(8)で近似した J_{local} 分布が求められる。

(ii) J_{local} の Fourier 級数展開近似を用いる方法

J_{local} は、次のように z に関し Fourier 級数展開近似できるものと考えられる。

$$J_{\text{local}}=b_0/2+b_1 \cos(2\pi z/t)+\dots\dots\dots+b_k \cos(2k\pi z/t)+\dots\dots\dots+b_n \cos(2n\pi z/t) \dots\dots\dots(11)$$

いま、ベクトル $\mathbf{m}$ を

$$\mathbf{m}^{(k)}=\cos(2k\pi z/t)i_1 \dots\dots\dots(12)$$

とおき、式(11)とともに式(6)に代入すると、

$$J_{\text{global}}(\mathbf{m}^{(k)})=(t/2)b_k \dots\dots\dots(13)$$

が得られる。したがって、 $k=0, 1, 2, \dots$ に対し、式(12)で定義される $\mathbf{m}^{(k)}$ を用いて J_{global} を計算すれば、式(13)より式(11)における係数 b_k が順次求められ、 J_{local} 分布の評価ができることになる。

3.3 弾性解析

3.3.1 解析方法 対称性より、図2に示した全体の1/8の部分について解析を行った。

応力・ひずみ解析には20節点6面体アイソパラメトリック要素による有限要素法を用い、き裂先端に Barsoum の特異要素⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾を配した。要素分割は図2に示されている。ポアソン比は0.3とした。

J_{local} の計算に用いた積分経路 Γ の例を、図2に破線(1~4)で示した。 $J_{\text{global}}(\mathbf{m})$ の積分面としては、図の積分経路 Γ を z 方向に移動することにより得られる、直方体の表面を選んだ。また J_{local} および $J_{\text{global}}(\mathbf{m})$ の値としては、これらの積分経路あるいは積分面に対する積分値の算術平均値を用いた。

3.3.2 全体的 J スカラーの積分面独立性 J_{local} の分布を調べる前に、まず全体的 J スカラーの積分面独立性を数値的に確かめるため、表1に示す10種類のベクトル $\mathbf{m}$ に対する $J_{\text{global}}(\mathbf{m})$ を求めた。表中の条件(1~7)はき裂前縁上で m_1 が一定の場合、条件(8~10)は m_1 が z に依存して変化する場合である。

図3に $J_{\text{global}}(\mathbf{m})$ 計算における積分面独立性の程度を示す。横軸の番号(1~10)は表1に示した条件の番号に対応している。図中の白丸は、10種類の $\mathbf{m}$ に対し、それぞれ左から積分面(1~4)に対応する J_{global} 値を示しており、四つの積分面に対する J_{global} の平均値

表1 J_{global} 計算に用いたベクトル $\mathbf{m}$

Case	$m_x=m_1$	$m_y=m_2$	$m_z=m_3$
1	1	0	0
2	1	0	z
3	$1/x$	0	0
4	x	0	0
5	x	0	z
6	$1/x$	0	z
7	$1/x^2$	0	z
8	$(16/\pi t)\sqrt{t^2/4-z^2}$	0	z
9	$(24/\pi t)z$	0	0
10	$\cos(2\pi z/t)$	0	0

図3 J_{global} の積分面独立性

で除して表されている。ただし、条件3, 6および7については、面積積分項に $1/x$ または $1/x^2$ の演算が含まれるため、 $x=0$ の面を有する積分面3および4に対する計算結果は表示されていない。

図より、ベクトル m にかかわらず、ほぼ積分面独立性が得られていることがわかる。ただし、 $m_1=x$ で与えられる場合(条件4, 5)には、 $J_{\text{global}}(m)$ の積分面間のばらつきが比較的大きかった。

図4に、積分面1および面2で評価した J_{global} 値に占める面積積分項 J_s と体積積分項 J_v の割合を示す。なお、条件1に関しては定義により体積積分項は存在しない。

式(5)より予想されるように、 m が位置の関数である場合には、体積積分項の値が積分面により変化していることが図よりわかる。この体積積分項の変化が面積積分項の寄与を打消しており、結果として J_{global} の積分面独立性が成立している。 m_1 が z の関数として条件8および9のように与えられた場合には、体積積分項の寄与は非常に小さいが、 m_1 が z の三角関数となる条件10では体積積分項の寄与が大きくなった。

3.3.3 J_{local} の分布 $t/W=1.0$ および 0.5 の場合の J_{local} の板厚方向分布を、それぞれ図5(a)および(b)に示す。縦軸は J_{local} と $\bar{J}_{\text{local}}$ との比、横軸は z と $(t/2)$ との比である。ここに、 $\bar{J}_{\text{local}}$ は J_{local} の板厚平均値であり、その値は、

$$\begin{aligned}\bar{J}_{\text{local}} &= \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} J_{\text{local}} df \\ &= \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} J_{\text{local}} \cdot i_1 df \\ &= (1/t) J_{\text{global}}(m=i_1) \dots\dots\dots (14)\end{aligned}$$

で計算できる。ここに $J_{\text{global}}(m=i_1)$ は、 $m=i_1$ に対する全体的 J スカラー値である。

図4 J_{global} における面積積分項と体積積分項の寄与

図5の白丸は、 J_{local} 法[式(4)]によりき裂前縁上のいくつかの点で求めた J_{local} 値である。図より、 $t/W=1.0$ の場合、式(4)で求めた J_{local} の分布は中央では平坦で表面近くでピークを示し、表面では急減している。 $t/W=0.5$ の場合、 J_{local} は $t/W=1.0$ の場合ほど大きな変化を示さない。また、 $t/W=1.0$ の場合には、表面近くの J 値は板中央部の J 値に比べ大きな値を示しているのに対し、 $t/W=0.5$ の場合には、この関係が逆転している。これらの結果は、菊池・宮本らの解析結果⁽²⁾と定性的に一致する。

図5において、表面近くでは、 J_{local} は滑らかな線で結ぶのが困難な、不自然な変化をしている。以下ではこのことの原因について考察する。

一般に三次元問題では、自由表面近傍で応力・ひずみ分布が急激に変化する。このため、要素分割の方法によっては、局所的な分布の評価に大きな誤差が生じるおそれがある。さらに、 J_{local} の計算には、式(4)のように応力・ひずみをさらに z で偏微分するという操作に起因する誤差が含まれる可能性がある。これらのことが、 J_{local} 法による J_{local} の評価値が表面近くで不自然な変化を示すことの原因となっていることが考えられる。

J_{local} 分布を偶数次多項式(8)で近似し、 J_{global} 法により J_{local} 分布を評価した結果も、同じく図5に曲線で示されている。図中の n は、式(8)の次数である。図より、 $n=2$ あるいは3で J_{local} 分布の大まかな傾向がわかり、 $n=4$ で分布の特徴が明確になることがわかる。 J_{local} 法[式(4)]による結果と比較すると、 $n=4$ としたときの結果は、式(4)による J_{local} 値とほぼ一致する。原理的には多項式の次数をさらに上げればより正確な分布が得られるはずであるが、本解析の結果では $n=5$ (すなわち10次式)以上になると、解が振動する傾向が見られた。

n を大きく増しても解の精度が上がらない原因として、まず、本解析で用いたような比較的粗い要素分割では、解析で得られた応力・ひずみ分布そのものが、

(a) $t/W=1.0$

(b) $t/W=0.5$

図5 偶数次多項式近似を採用したときの J_{global} 法による J_{local} 評価 (中央き裂平板の弾性解析)

細部の挙動を十分には表現していないことがあげられる。また、本解析では数値積分にガウスの求積法(積点数3)を用いているため、高次関数になるほど計算誤差が大きくなることが考えられる。

次に、 J_{local} の分布を、Fourier 級数展開を用い J_{global} 法により求めた。 $t/W=1.0$ の場合の J_{local} 分布を図6に示す。図中の曲線は式(11)において n 値を変えた場合の J_{local} 分布を示している。白丸は図5と同じく J_{local} 法による J_{local} の評価値である。

図より、 n を1, 2, 3 と増すにつれ、 $J_{global}(m)$ による J_{local} 評価値は、 J_{local} による評価値に近づく傾向が見られる。しかし、 $n=4$ の場合には線は大きく振動している。この原因としては、本解析で対象とした問題については、 J_{local} 分布の Fourier 級数近似が適当でないこと、および周期の短い高次の三角関数を与え

た場合、 $J_{global}(m)$ 計算における Gauss 積分の精度が落ちることが考えられる。

以上の結果より、 $J_{global}(m)$ 法における J_{local} の近似には Fourier 級数よりも偶数次多項式のほうが適しているものと判断される。

3・4 弾塑性解析 塑性変形の進行に伴う J_{local} 分布の変化を調べ、その評価に対する J_{global} 法の適用性を検討するため、弾塑性解析を行った。

3・4・1 解析方法 構成式には二直線近似のものを用い、加工硬化率とヤング率の比として $H'/E=12\,000/210\,000$ 、降伏応力とヤング率の比として $\sigma_y/E=300/210\,000$ を用いた。硬化則としては等方硬化則を用いた。弾塑性解析法としては、一般によく用いられている山田ら⁽²⁰⁾の増分形の手法を採用した。解析形状は弾塑性解析と同様であるが、 z 方向の分割数は3とした。

3・4・2 解析結果 図7に、荷重・変位曲線を示す。荷重 $P(=pWt)$ は $(at\sigma_y)$ で、また荷重点変位 Δ は $(a\sigma_y/E)$ で、それぞれ無次元化されている。図には増分計算における五つの段階を選び、A～Eで示している。このうちA点は、弾性計算の点である。

図8(a), (b)および(c)は、それぞれ図7中のB, CおよびE点における J_{local} の板厚方向分布を示している。 J_{local} および $\bar{J}_{local}$ は、それぞれ $\bar{J}_{local}$ および $(t/2)$ により無次元化されている。図中の白丸は、 J_{local} 法により評価した J_{local} 値である。実線は J_{local} を $2n$ 次多項式で近似し、 J_{global} 法によりその分布を評価した結果である。ここで、式(8)における n の値としては、前項の結果より4を用いた。

図より、塑性変形が進行するにつれ、表面近くの J_{local} 値に比べ、中央部の J_{local} 値が、より大きくなっていくことがわかる。また、B, C点では表面近くにおいて J_{local} 値が極大値を示す。しかし、塑性変形の進んだE点では、 J_{local} 分布はほぼ板中央で凸となっている。

図6 Fourier 級数近似を採用したときの J_{global} 法による J_{local} 評価 (中央き裂平板の弾性解析)

図7 中央き裂平板の荷重・変位曲線

(a) B点

(b) C点

(c) E点

図8 中央き裂平板の塑性変形過程における J_{local} の分布 ($t/W=1.0$)

J_{local} 法による J_{local} の評価値と $J_{\text{global}}(m)$ 法による値を比較すると、B, C, E のいずれの点でも板中央部では両者はほぼ一致するが、表面近くでは、値に多少の差がみられる。以下にこの原因を検討する。

表面に近い領域では、応力・ひずみ分布の局所的な変動が非常に大きくなった。このため、板表面近くの点で J_{local} 値に対する式(4)の面積積分項の寄与が、板中央部に比べて大きなものとなる傾向がみられた。前述のように、面積積分項は、応力およびひずみの z 方向微分を含むため、応力解析により得られる応力・ひずみ値の局所的な精度の影響を受けやすい。したがって、表面近くでは J_{local} の計算値の精度が低下していることが考えられる。

図8(a)より、 J_{local} 法に基づく表面部の J 値は中央部のそれより大きくなっている。しかし、より細かい要素分割を用い弾性条件下に対し得られた結果〔図5(a)〕においては、表面部と中央部の J 値の開きはそれほど大きくない。さらに、B点より塑性変形が進行した時点では、表面の J_{local} 値は中央部のそれより小さくなっていく傾向がある。したがって、表面部では、上記の評価誤差が現れている可能性がある。

$J_{\text{global}}(m)$ については、塑性変形の進行に従い、積分面間のばらつきが大きくなる傾向がみられたものの、ばらつきは J_{local} のそれに比べ小さかった。また、 J_{local} 法でみられたような、図5と8の矛盾は J_{global} 法では生じていない。図8(a)~(c)よりわかるように、塑性変形の進行に伴い J_{local} 分布は極大値を示すような複雑な形から、単純な形に変化しており、このことは J_{local} 分布の近似を行ううえで、有利に働くものと考えられる。以上のことより、 $J_{\text{global}}(m)$ による J_{local} 評価は、塑性変形の進行に伴う計算精度の低下の影響を比較的受けないことが考えられる。

図9 半円表面き裂を有する平板および積分面

4. 半円表面き裂の解析

本章では、解析対象として、半円表面き裂を有する平板を取り上げ、前章と同様に、 $J_{\text{global}}(m)$ による J_{local} の評価を試み、従来用いられてきた J_{local} による評価法との比較を行う。

4.1 解析対象 解析対象は、図9に示すような半円表面き裂を有する平板であり、対称性により図には全体の1/4の部分を示している。負荷条件としては、 y 軸方向に一様引張荷重 p が作用するものとした。き裂直径 $2a$ と板幅 W の比は $2a/W=0.2$ 、板長 H と W の比は $H/W=1.0$ とした。 a と板厚 t の比は、0.2, 0.4 および 0.6 の3とおとした。

4.2 J_{local} 分布の評価方法 本章では、座標系として図9に示す直角座標系 (x, y, z) を用いる。また xz 面内に極座標系 (r, θ) をとった。

4.2.1 局所的 J ベクトル法 問題の対称性より、 $J_2=0$ となる。局所的 J ベクトル J_{local} の近似値として、式(1)より有限の幅 B に対する J_{local} の平均値を求めることを考える(図9)。有限のき裂前縁幅 B に対する式(1)の積分値は、 J_{local} を B について線積分したものの、すなわち $\int_B J_{\text{local}} df$ に等しくなるはずである⁽¹⁴⁾。これはベクトル積分であるので、その絶対値は、 J_{local} の平均値と B の積とは必ずしも一致しない。 J_{local} がき裂前縁に垂直となるという性質を用い、 B にわたり J_{local} が一定であるとすれば、この値は、 B の弦の長さ $\bar{B}$ に J_{local} を乗じたものと等しくなる。このため、次式により、 B の部分における J_{local} の成分の近似値を求めた。

$$J_k = \frac{1}{B} \int_{S_B} (W \nu_k - T_i u_{i,k}) dS \quad (k=1, 3) \quad \dots\dots\dots (15)$$

4.2.2 全体的 J スカラー法

(i) J_{local} の偶数次多項式近似を用いる方法

局所的 J ベクトル J_{local} は、き裂前縁に垂直であるので、

$$J_{\text{local}} = J_{\text{local}} i_r \\ = J_{\text{local}} (\sin \theta i_1 + \cos \theta i_3) \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。ここに、 i_r は r 方向の単位ベクトルである。

中央貫通き裂の場合と同様に、 J_{local} を次式のように $2n$ 次多項式で近似する。

$$J_{\text{local}} = b_0 + b_1 (2\theta/\pi)^2 + \dots \\ + b_k (2\theta/\pi)^{2k} + \dots + b_n (2\theta/\pi)^{2n} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで、ベクトル m として次式を用いる。

$$m^{(k)} = \{2(2k+1)/\pi a\} (2\theta/\pi a)^{2k} i_r \quad \dots\dots\dots (18)$$

式(16)～(18)を式(6)に代入すると次式が得られる。

$$J_{\text{global}}(\mathbf{m}) = 2(2k+1) \sum_{i=0}^n b_i / \{2(k+i)+1\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

したがって、 $3 \cdot 2 \cdot 2$ 項と同様に、 k を変えて式(18)および(19)の計算を行うと、 $(n+1)$ 元の連立方程式が得られる。これを解けば、式(17)における係数 b_k が求められる。

(ii) J_{local} の Fourier 級数展開近似を用いる方法⁽¹⁵⁾ J_{local} を、次式のように Fourier 級数展開により近似する。

$$J_{\text{local}} = b_0/2 + b_1 \cos 2\theta + \dots + b_k \cos 2k\theta + \dots + b_n \cos 2n\theta \quad \dots\dots\dots (20)$$

いま、ベクトル $\mathbf{m}$ として

$$\mathbf{m}^{(k)} = \cos 2k\theta \mathbf{i}_r \quad \dots\dots\dots (21)$$

を考える。式(16)、(20)および(21)を式(6)に代入すると、次式が得られる。

$$J_{\text{global}}(\mathbf{m}^{(k)}) = \pi a b_k / 2 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$k=0, 1, \dots, n$ に対し $J_{\text{global}}(\mathbf{m}^{(k)})$ を計算することにより、式(22)より係数 b_k が順次求められ、したがって J_{local} 分布の評価を行うことができる。

4.3 解析方法 解析は、対称性により図9に示した $1/4$ の部分で行った。応力・ひずみ解析には、20 節点アイソパラメトリック要素を用いた。使用した要素分割は、図9に示されている。

解析は弾性条件下で行い、ポアソン比は $\nu=0.3$ と

した。 J 積分計算に用いる積分面としては、要素境界面を選び、き裂前縁を囲む積分面のひろがりとしては、図9に示した破線1～4を選んだ。

4.4 解析結果 $a/t=0.2$ の場合の、 J_{local} 法によるき裂前縁に沿う J_{local} 分布の計算結果を、図10に示した。図中、 J_{local} は J_{local} の平均値 $\bar{J}_{\text{local}}$ により無次元化されている。ただし、 $\bar{J}_{\text{local}}$ は、式(6)に基づく次式で評価した。

$$\begin{aligned} \bar{J}_{\text{local}} &= (1/\pi a) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} J_{\text{local}} df \\ &= (1/\pi a) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} J_{\text{local}} \cdot \mathbf{i}_r a d\theta \\ &= (1/\pi a) J_{\text{global}}(\mathbf{m} = \mathbf{i}_r) \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ここに、 $J_{\text{global}}(\mathbf{m} = \mathbf{i}_r)$ は、 $\mathbf{m} = \mathbf{i}_r$ としたときの J_{global} 値である。

図より、得られた J_{local} は、表面近くを除けば、ほぼ半径方向を向いている。この結果は、 J_{local} がき裂前縁に垂直となるという性質⁽¹⁴⁾に一致する。

図11(a)、(b)および(c)に、 $a/t=0.2, 0.4$ および 0.6 の場合の J_{local} 分布を示した。縦軸は $\bar{J}_{\text{local}}$ で無次元化した J_{local} であり、横軸は図9に示した角度 ϕ である。図中の黒丸は、 J_{local} 法〔式(15)〕による J_{local} 値である。また、一点鎖線および実線は、式(17)を用いて J_{local} を $2n$ 次多項式近似し、 J_{global} 法により評価した J_{local} 値である。破線は、Raju-Newman⁽²¹⁾により報告されている応力拡大係数 K をもとに、二次元問題における J と K の関係式、

$$\left. \begin{aligned} J &= K^2/E && \text{(平面応力問題)} \\ J &= (1-\nu^2)K^2/E && \text{(平面ひずみ問題)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

を用いて求めた J 値である。

$J_{\text{global}}(\mathbf{m})$ による J_{local} 評価では、近似式の次数による評価値の差は小さい。このことは、 J_{local} 分布の形が比較的簡単であることから予想されることである。中央貫通き裂に対する評価の場合に比べ、低次の近似式

図10 き裂前縁に沿う J_{local} (表面き裂, $a/t=0.2$)

(a) $a/t=0.2$

(b) $a/t=0.4$

(c) $a/t=0.6$

図11 偶数次多項式近似を採用したときの J_{global} 法による J_{local} 評価 (表面き裂)

図 12 Fourier 級数近似を採用したときの J_{global} 法による J_{local} 評価 (表面き裂, $a/t=0.2$)

で J_{local} の分布の評価が可能であることは、実用上好ましい事実である。しかし、この場合にも、中央貫通き裂の場合と同様に、近似式の次数を大きくすると ($n \geq 5$) 評価値が徐々に振動する傾向がみられた。これは、中央貫通き裂の場合と同様の原因によるものと考えられる。

次に、 J_{local} による評価値 (黒丸) と $J_{\text{global}}(m)$ による評価値 (実線および一点鎖線) との比較を行う。全般的に両者はほぼ一致しているが、き裂最深部では $J_{\text{global}}(m)$ による評価値は、 J_{local} による評価値より低めとなり、板表面近くではこの関係が逆転している。表面での不一致の原因としては、前述のように J_{local} 計算の精度が悪化している恐れのある点があげられる。また、き裂最深部付近の要素分割を粗くしていることが、 J_{local} による J_{local} 評価の精度に影響を及ぼしている可能性がある。

以上の考察より、 J_{local} を $2n$ 次多項式で近似しその係数を $J_{\text{global}}(m)$ により求めて J_{local} 評価を行う手法は、局所的な J_{local} 法に比べ、応力・ひずみが大きく変動し精度のよい応力・ひずみ解が得られにくい領域でも、比較的精度よい J_{local} 値を与える可能性がある。

$a/t=0.2$ の場合に対し、Fourier 級数展開を用い、 $J_{\text{global}}(m)$ 法により J_{local} を求めた結果を、図 12 に示す。図には、式 (20) の項数 n を 2, 4 および 6 とした場合の J_{local} 評価値を曲線で示した。丸印は、図 11 と同様、 J_{local} 法による J_{local} 評価値である。

図より、 $n=6$ としたとき、 J_{global} 法により、 J_{local} 法による結果に近い分布が得られることがわかる。しかし、 J_{local} 分布の $2n$ 次多項式近似を用いた場合に比べると、 $J_{\text{global}}(m)$ の計算値の積分面間のばらつきが大きかった。したがって、 J_{local} の Fourier 級数展開を用いた場合には、少なくとも本解析で扱った問題に関する

限り、精度のよい J_{local} 分布値を得ることは、比較的難しくなるものと考えられる。

5. 結 言

本研究では、き裂の三次元 J 値評価法として、従来用いられてきた局所的 J ベクトル J_{local} による評価に対し、新たに全体的 J スカラー $J_{\text{global}}(m)$ を用いた J_{local} の評価を試みた。取り上げた問題は、中央貫通き裂および表面き裂である。 J 値解析を行った結果、 $J_{\text{global}}(m)$ による J_{local} 評価において、 J_{local} の近似として偶数次多項式を用いた場合、 J_{local} による評価と比較すると、評価値に対する局所的な応力・ひずみ解析の精度の影響を小さくできる可能性がある。 J_{local} の近似式として Fourier 級数を用いた場合、本研究で扱った問題に関する限り、十分な J 値評価が行えなかった。

本研究に対し文部省科学研究費の援助を受けた。記して謝意を表する。なお、本研究の数値計算には大阪大学大型計算機センター ACOS-1000 を用いた。

文 献

- (1) Miyamoto, H. and Kikuchi, M., *Theoretical and Applied Mechanics*, 28 (1980), 195.
- (2) 菊池・ほか 2 名, 材料, 31-344 (昭 57), 420.
- (3) 宮本・ほか 2 名, 機論, 49-439, A (昭 58), 314.
- (4) 菊池・ほか 4 名, 機論, 50-456, A (昭 59), 1524.
- (5) 菊池・ほか 3 名, 材料, 33-368 (昭 59), 596.
- (6) Sakata, M., ほか 4 名, ASTM STP, 803, Vol. I (1983), I-425.
- (7) 岸本・ほか 3 名, 機論, 50-453, A (昭 59), 912.
- (8) 安藤・ほか 2 名, 機論, 49-439, A (昭 58), 304.
- (9) 今井・真武, 機論, 49-445, A (昭 58), 1158.
- (10) 白鳥・三好, 機論, 50-458, A (昭 59), 1770.
- (11) deLorenzi, H. G. and Shih, C. D., *Int. J. Fract.*, 21 (1983), 195.
- (12) Nishioka, T. and Atluri, S. N., *Trans. ASME, J. Pressure Vessel Technol.*, 104 (1982), 299.
- (13) Parks, D. M., *Trans. ASME, J. Pressure Vessel Technol.*, 103 (1981), 246.
- (14) 久保・大路, 材料, 30-335 (昭 56), 796.
- (15) 久保・大路, 材料, 31-340 (昭 57), 32.
- (16) 大路・ほか 2 名, 機論, No. 820-2 (昭 57-3), 57.
- (17) Blackburn, W. S., *Int. J. Fract.*, 8 (1972), 343.
- (18) Barsoum, R. S., *Int. J. Numerical Methods in Eng.*, 10 (1976), 25.
- (19) Barsoum, R. S., *Int. J. Numerical Methods in Eng.*, 11 (1977), 85.
- (20) Yamada, Y. and Yoshimura, N., *Int. J. Mech. Sci.*, 10 (1968), 343.
- (21) Raju, I. S. and Newman, Jr., J. C., *Eng. Fract. Mech.*, 11 (1979), 817.

討 論

〔質問〕 菊池 正 紀〔東京理科大学〕

三次元の J 積分の評価において、特に自由表面近傍で、式(4)の第2項が誤差を生じることは、質問者らも以前より指摘していた⁽²⁾ので、大変興味深く拝見した。以下の二点につき、ご教示願いたい。

(1) 例えば質問者らの論文^(付1)の図12に示されるような、非対称のき裂を有する問題では、貴論文で推奨しておられる偶数次多項式は使えないのではないか。もしそうなら、式(8)に代わるものをまず探すことが必要になるのか。その場合の J_{global} 法の一般的有用性についてはどのようにお考えか。

(2) また最近質問者らの論文^(付2)で取り上げた積層板の場合、 J 積分値は積層間で不連続に変化する。

る。このような場合、 J 積分値の評価には J_{local} 法しか使えないのではないか。

〔回答〕 (1) 本論文では、対称性を有するき裂問題を取扱ったため、 J_{local} の表現に偶数次多項式を使用した。非対称き裂では、奇数項をも含む多項式を採用するなど、非対称性を許容するための簡単な修正を施すことにより、本論文で扱った対称き裂と同様に、 J_{local} の表現および評価ができるものと考えられる。

(2) ご指摘の積層板の問題のように、 J 積分値が不連続に変化するような場合には、その層間不連続を許容し、層ごとに J_{local} の分布関数を与えれば、これをもとに J_{global} による J_{local} 評価が可能になることが考えられる。このような J_{global} の拡張的適用については、今後機会をみつけて検討していきたい。

(付1) 菊池・ほか3名, 機論, 51-463, A (昭60), 866.

(付2) 影山・ほか3名, 機論, 51-471, A (昭60), 2588.