境界要素法における数値積分誤差*

今 成 昌 文**, 沢 田 孚 夫***

Error Estimate of Numerical Integration
in Boundary Element Method Analysis

by Masafumi IMANARI and Takao SAWADA

Errors included in solutions obtained by the boundary element method analysis are generally larger than those by the finite element method analysis in the case that the number of discretized elements is small. One of the reasons is supposed to be attributed to the error which will be produced in the numerical integration of the $r^i_x r^j_y r^k_z / r^n$ type of singular functions in two dimensional elastic problem. In this report the distance r between an observed point and a boundary element was represented graphically by two parameters. Then many functions composing the fundamental solutions could be classified into seven groups and their tendencies along an element were characterized. The following results were obtained: (1) Errors of the numerical integration of the functions are small in the region $r_d/L > 0.5$ even if four points are chosen in gaussian quadrature formulas. (2) The larger the exponent values i, j, k, l , the more increase the errors in the integration of the functions $r^i_x r^j_y r^k_z / r^l$. Then, the methods to reduce computing time and to decrease errors of the numerical integrations are proposed.

Key Words: Elasticity, Boundary Element Method, Numerical Integration, Gaussian Quadrature, Computing Time

1. ま え が き

境界要素法は、対象としている物体の境界を有限個の要素に離散化するため、三次元問題や境界に関する問題などのように、従来の有限要素法では不利な分野においてその利用が有望視されている。この方法を数値解析に用いる時、離散化する際の要素の分割数⁽¹⁾、積分する際の被積分関数のとる範囲⁽²⁾、Gauss 積分における積分点数などの決定、および数値積分誤差の評価⁽³⁾、あるいは解析対象物の角点の数値的取扱⁽⁴⁾にあたり、これらを各個独立にあるいは組合せたりして、誤差の少ない数値計算⁽⁵⁾および計算時間の短縮化⁽⁶⁾を行っているが、経験に頼っている面が少なくない。解の誤差について実例を上げると、境界要素法によって得られる数値解は、解析によって得られる厳密解と比較し、四角形板の引張りにおいて精度の面で劣る結果が報告されている⁽⁵⁾。この原因は、 $r^i_x r^j_y r^k_z / r^n$ の形の特異性をもつ被積分関数を数値積分していること

が主因と考えられる。

本研究では、この数値積分に伴う誤差について明らかにする。すなわち、二次元弾性問題で取扱われる特異性をもつ複雑な基本解を、単純な関数に分離しかつ分類する。さらに、各関数の基本形である $\int 1/r d\Gamma$ を、二つのパラメータを用い積分値の特性が見通しよく把握できるように置き換えたのち、各関数の特性を求め数値積分の誤差の状況を明らかにする。さらに、種々の形状を数値解析することが境界要素法の究極の目的である立場から、数値積分の改善方法および誤差に対する数値的な補正方法を提案し、かつ計算時間の短縮化についての一方法を試みた。

2. 特異性をもつ被積分関数

2-1 被積分関数の分離 二次元弾性問題における基本解を式(1)、(2)に、および内部応力を求めるための被積分関数を式(3)、(4)に示す。

$$u_{i,k} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \log\left(\frac{1}{r}\right) \Delta_{i,k} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \dots\dots\dots (1)$$

* 昭和 60 年 12 月 4 日 第 935 回講演会において講演，原稿受付 昭和 59 年 10 月 31 日。

** 学生員，東京農工大学大学院 (〒184 小金井市中町 2-24-16)。

*** 正員，東京農工大学工学部。

$$p_{ik} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu)\Delta_{ki} + 2\frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_i} \right\} - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_i \right) \right] \quad (2)$$

$$D_{kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)\{\Delta_{ki}r_{,j} + \Delta_{kj}r_{,i} - \Delta_{ij}r_{,k}\} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (3)$$

$$S_{kij} = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\Delta_{ij}r_{,k} + \nu(\Delta_{ik}r_{,j} + \Delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \right. \\ \left. + 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \Delta_{ik} + n_i \Delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \Delta_{ij} \right\} \quad (4)$$

ただし、 $i, j, k, l = x, y$ と変化する。これらの式を個々の関数 $1/r^2, r_{,x}/r, r_{,x}^2/r^2$ 等に分離し、それぞれが数値解析時に使用される積分計算回数とともに表1と表2に示した。ここで簡単のため $\partial r/\partial n$ のかかる関数には $1/r$ のみをかけた形であらわした。表より、基本解および D_{kij}, S_{kij} には同一の被積分関数が多く含まれ、互いに異なる関数は $\log(1/r), r_{,x}^2, r_{,y}^2, \dots$ など20種類である。したがって一定要素による離散化の場合、数値積分誤差を把握するためにこの20種類について議論を進めればよい。一方線形要素による場合は、形状関数が境界要素上の無次元座標 ξ の一次式で表されるので、20種類の関数にそれぞれ ξ を掛け合わせた計40種類の関数について検討する必要がある。同様に二次要素の場合は、さらに、 ξ^2 を掛け合わせた関数を含めて計60種類の関数を考慮する必要がある。取扱う関数の種類が多くなると、その数値積分による誤差評価が非常に煩雑となるので、以下においては被積分関数を単純な形にし、積分値があらかじめ予測できるようにする方法について述べる。

2.2 被積分関数の図式表示 境界要素法における積分は、図1に示すように、注目するP点と境界を離散化した要素 Γ とを結ぶ距離 r の関数を被積分関数として行う。そこで距離 r を図1に従って示すと次のようになる。

$$r_x = x_1 - x_p + l \cos \theta \quad (5)$$

$$r_y = y_1 - y_p + l \sin \theta \quad (6)$$

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2 \\ = L^2(a\xi^2 + b\xi + c) \quad (7)$$

ここで

$$\Gamma = l = (1 + \xi)L/2 \quad (|\xi| \leq 1) \quad (8)$$

$$a = 1/4 \quad (9)$$

$$b = (x_1 - x_p) \cos \theta / L + (y_1 - y_p) \sin \theta / L + 1/2 \quad (10)$$

$$c = (x_1 - x_p)^2 / L^2 + (y_1 - y_p)^2 / L^2 \\ + (x_1 - x_p) \cos \theta / L + (y_1 - y_p) \sin \theta / L + 1/4 \quad (11)$$

無次元座標 ξ は境界要素 Γ 上の要素座標と見なせるのでそれに直交する η 軸を設定し、点Pの座標を $(r_d,$

表1 基本解を形成する関数とその積分計算回数

Num. of	$\log \frac{1}{r}$	$r_{,x}^2$	$r_{,y}^2$	$r_{,x}r_{,y}$	$\frac{r_{,x}}{r}$	$\frac{r_{,y}}{r}$	$\frac{1}{r^2}$	$\frac{r_{,x}^2}{r^2}$	$\frac{r_{,y}^2}{r^2}$	$\frac{r_{,x}r_{,y}}{r^2}$
Cal.	2	1	1	1	2	2	2	1	1	2

表2 内部応力を算出する関数 D_{kij}, S_{kij} とその積分計算回数

Num. of	$\frac{r_{,x}}{r}$	$\frac{r_{,y}}{r}$	$\frac{r_{,x}^3}{r}$	$\frac{r_{,y}^3}{r}$	$\frac{r_{,x}^2 r_{,y}}{r}$	$\frac{r_{,x} r_{,y}^2}{r}$	$\frac{1}{r^2}$	$\frac{r_{,x}^2}{r^2}$	$\frac{r_{,y}^2}{r^2}$
Cal.	3	3	1	1	2	2	6	3	3

$\frac{r_{,x} r_{,y}}{r^2}$	$\frac{r_{,x}}{r^3}$	$\frac{r_{,y}}{r^3}$	$\frac{r_{,x}^3}{r^3}$	$\frac{r_{,y}^3}{r^3}$	$\frac{r_{,x}^2 r_{,y}}{r^3}$	$\frac{r_{,x} r_{,y}^2}{r^3}$
4	3	3	1	1	2	2

図1 点Pと境界要素との幾何学的関係

図2 被積分関数 r のパラメータ r_d と s による表示 ($\theta = \pi$)

s)で表すと節点1との関係は次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_p &= -(L/2 + s) \cos \theta + r_d \sin \theta \\ y_1 - y_p &= -(L/2 + s) \sin \theta - r_d \cos \theta \end{aligned} \right\} \cdots (12)$$

式(12)より係数bとcは次のようになる。

$$b = -s/L \cdots (13)$$

$$c = (s/L)^2 + (r_d/L)^2 \cdots (14)$$

したがって被積分関数 $1/r$ の積分は角度 θ とは無関係になり、次のように表示される。

$$\int_r \frac{1}{r} d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{a\xi^2 + b\xi + c}} d\xi \cdots (15)$$

式(5)と(6)の r_x, r_y は角度 θ に依存するが、この影響は後に検討することにする。ここでは r_x, r_y を含む被積分関数の特性をさらに見通しやすくするために $\theta = \pi$ と置く(図2)。要素 Γ の法線方向余弦は、 $n_x = 0, n_y = 1$ である。また r_d は一定であるため、たとえば関数 r_y は、 $r_y = \partial r / \partial y = r_y / r = r_d / r$ となり、関数 $1/r$ と同様の特性を示すものと判断できる。このような考え方で、先に示した20種類の関数は、 $\log(1/r), 1/r^2, r_x/r, r_x^2/r, r_x^3/r, r_x/r^2, r_x^2/r^2, r_x^3/r^2, r_x^3/r^3, r_x^2/r^3, r_x r_y/r^3, r_x r_y^2/r^3$ の12種類となる。

2.3 被積分関数の特性 これら12種類の関数のうち基本的な4種類の関数 $\log(1/r), 1/r, r_x, r_x/r$ を $\theta = \pi$ について示す。図2において

$$r_s = L(\xi/2 - s/L) \cdots (16)$$

$$r^2 = r_s^2 + r_d^2$$

$$= L^2 \{ \xi^2/4 - (s/L)\xi + (s/L)^2 + (r_d/L)^2 \}$$

$$= L^2 \cdot \{A(\xi)\}^2 \cdots (17)$$

図3 基本的な被積分関数の性質

とくと、 $r_x = -r_s$ となるので

$$\int_r \frac{1}{r} d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{A(\xi)} d\xi \cdots (18)$$

$$\int_r r_x d\Gamma = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \frac{-\xi/2 + s/L}{A(\xi)} d\xi \cdots (19)$$

$$\int_r \frac{r_x}{r} d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{-\xi/2 + s/L}{\{A(\xi)\}^2} d\xi \cdots (20)$$

$$\int_r \log\left(\frac{1}{r}\right) d\Gamma = -\frac{L}{2} \int_{-1}^1 (\log L + \log A(\xi)) d\xi \cdots (21)$$

式(17)に示すように、 r^2 が ξ の2次関数となり、さらに4種類の関数が図3のように表される。このように要素座標 ξ を基準にしてP点を見ると、これら r の関数の特性をパラメータ r_d と s によって定性的に把握することができる。

以上の関数をGauss公式を用いて数値積分することを考える。Gauss積分は、定められたGaussポイントにおいて、それぞれ定められた重みをつけて加算するもので、Gaussポイント付近の関数値の面積を数式では平均して求めていることになる。したがって、被積分関数が各Gaussポイントについて非対称であったり、その点以外の領域で急激な変化を示す場合、関数の示す実際の面積とGauss公式により算出された平均値とが大きく異なり、そのため大きな誤差を生じるものと考えられる。このような考え方によって任意の関数の積分値の特性について調べると、以下のようになる。

(1) 関数 $(1/r)^n$ は、図3(a)に示すように曲線の最大値が $(L/r_d)^n$ となるため、パラメータ r_d/L が1以下の場合、 n が大きな自然数をとるに従って最大値が大きくなり、ことに極大値を与える点が $|\xi| = |2s/L|$

図4 数値積分と解析による積分との誤差

≤ 1 のとき数値積分する際の誤差が増大する。

(2) 関数 r_x^m/r^n は、 m が奇数の場合には曲線が正から負へ変化し、 $\xi=2s/L$ でその値が零となる。 n の値が零の時はゆるやかな曲線〔図 3 (b)〕となるが、大きくなると $\xi=2s/L$ を中心として左右に凸凹〔図 3 (c)、 m が偶数の時は凸凹〕が生じる。パラメータ r_d/L が小さくなるにつれ、その極大値は大きくなり数値積分の際の誤差が生じる原因となる。

(3) 上に述べたことから、関数が極値を持つ場合、極値を与える値が積分範囲外 $|\xi| > 1$ (パラメータ $s/L > 0.5$) になれば数値積分誤差は減少する。図 4 にパラメータ s/L に対する $1/r^2$ および $(r_x/r)^2$ の解析による積分値に対する数値積分誤差を示す。ここでパ

ラメータ r_d/L は 0.2、数値積分としては Gauss 4 点積分を用いた。図より、 s/L の増加とともに積分誤差は振動しながら減衰していることがわかる。他の被積分関数についても同様であった。

以上の結果、数値積分による誤差を定量的に把握するには、二つのパラメータのうち $s/L=0$ とし、 r_d/L について考えるだけで十分である。いま $s/L=0$ とすれば上述の 12 種類の関数は偶関数と奇関数に分類され、さらに形状関数による積分値の影響も考慮しやすくなることを以下に示す。

上記 4 種類の関数について、式(18)~(21)において $s/L=0$ とおくと、

図 5 種々の被積分関数の数値積分誤差

$$\int_r \frac{1}{r} d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(\xi/2)^2 + (r_d/L)^2}} d\xi \quad \cdots (22)$$

$$\int_r r_x d\Gamma = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \frac{-\xi/2}{\sqrt{(\xi/2)^2 + (r_d/L)^2}} d\xi \quad \cdots (23)$$

$$\int_r \frac{r_x}{r} d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{-\xi/2}{(\xi/2)^2 + (r_d/L)^2} d\xi \quad \cdots (24)$$

$$\int_r \log \frac{1}{r} d\Gamma = -\frac{L}{2} \left\{ \int_{-1}^1 \log L d\xi + \int_{-1}^1 \log \sqrt{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 + \left(\frac{r_d}{L}\right)^2} d\xi \right\} \quad \cdots (25)$$

2・2節であげた12種類の被積分関数のうち ξ について偶関数の特性を示すのは式(22), (25)のように, $(1/r)^{2n}$, $\log(1/r)$ で表せる関数, および ξ^2 を分子に掛けた形となっている関数 r_x^2/r^{2n} , ($n=1, 2, 3$)である。また式(23), (24)のように, ξ^{2n-1} を分子のみに掛けた形となっている関数 r_x^{2n-1}/r^{2m-1} ($m, n=1, 2, 3$)は奇関数となる。奇関数の積分値は零となるので, 数値積分の誤差を検討する必要があるのは偶関数 $\log(1/r)$, $1/r^2$, r_x^2 , r_x^2/r^2 , r_y^2/r^2 , r_y^2/r^3 , $r_x^2 r_y/r^3$ の7種類である。

一方, 線形要素によって離散化する場合, 形状関数として $N1=(1-\xi)/2$, $N2=(1+\xi)/2$ が掛かるので, 検討すべき関数は ξ が掛かった12種類の関数を加えて24種類となる。 ξ が掛かった関数は偶関数から奇関数へ, あるいはその逆に変化する。したがって, 誤差を検討する必要があるのは上記の関数に $r_x^2 \xi/r^3$, $r_x^2 \xi/r$ を加えた計9種類の関数である。同様に二次要素では計11種類の関数を調べればよい。

3. 数値積分誤差とその改善

3・1 Gaussの数値積分誤差 本節では, 前節までに考察した被積分関数について, Gaussの数値積分公式を用いその誤差を検討する。最初にGaussポイントの数の影響について検討する。次節に示すように数値解の誤差が大きく表れる $1/r^2$ について解析による積分とGaussの4点および8点積分を行い, 解析値との誤差をパラメータ r_d/L について求めた(表3)。

表3 $1/r^2$ の解析積分値とGauss 4, 8点積分値の誤差

r_d/L	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0
Exact	13.71	5.96	3.44	2.24	1.57	0.46
4 points (%)	48.1	8.12	1.79	0.47	0.14	1×10^{-3}
8 points (%)	8.12	0.35	2×10^{-2}	1×10^{-3}	2×10^{-4}	1×10^{-6}

表より $r_d/L > 0.5$ では, 4点と8点積分法では実質的に差がない。誤差がさらに大きく表れる $r_x^2 r_y/r^3$ でも, $r_d/L=1$ で0.2%以下と小さかった。そこで以下の数値計算では4点積分によって行う。なお, 表3に示す $1/r$ ばかりでなく, 他の関数も r_d/L の増加に従い積分値が急速に減少している。

3・2 分離した関数の誤差傾向 本節では線形要素によって離散化した場合について考える。そのため前節に示した関数のうち10種類について, 解析による積分値との誤差を図5に示す。ただし後に示すように誤差の補正をプログラム上で行うため, 数値積分に対する解析による積分値の相対誤差で示してある。図より被積分関数により $r_d/L > 0.5$ において比較的よい精度をもつが, $r_d/L < 0.5$ ではいずれの関数の積分精度もよくない。すなわち分子に関数 r_x^2 , ($n=1, 2, 3$)をもつ場合は, 図5(b), (c)のように $r_d/L < 0.5$ において極大値を示す誤差曲線となる。形状関数を考慮した関数[図5(c)]では, $r_d/L=0.8$ 付近でも誤差が比較的大きい。また積分する関数の次数が大きいくほど, 例えば $1/r^2$ よりも $r_y^2/r^2 (=r_d/r^4)$ と高次になるに従って, 極大値を与える r_d/L の値が大きくなり, したがって r_d/L の広い範囲で誤差が増加する。以上のことから, 被積分関数が $r_x^i r_y^j \xi^k/r^l$, (i, j, k, l は整数)で表されるように, 高次要素になるほど形状関数の次数が高くなることも含めて, 精度は悪くなる一方であるといえる。以上のことから, 従来特異性を $1/r^2$ で代表させて積分値の誤差が大きいくことを議論していた⁽³⁾⁽⁶⁾が, 本結果により数値積分誤差の大きい関数の順序が判明した。なお以上の議論は $\theta=\pi$ について行

図6 要素の傾き角 θ を変えた時の数値積分誤差

ったが、 θ が任意の角度をとる場合、 r_x と r_y は r_d と r_s によって次のように表せる(図1)。

$$r_x = r_s \cos \theta + r_d \sin \theta \cdots \cdots (26)$$

$$r_y = r_s \sin \theta - r_d \cos \theta \cdots \cdots (27)$$

ここで r_d と r_s は $\theta=\pi$ の時の r_y と $-r_x$ に一致し、被積分関数の簡単な形 $r_d/r(=r_d/r^2)$ および $r_x/r(=r_x/r^2)$ の数値積分誤差の形で図5に求められている。したがって、 r_x^2/r^3 の関数の誤差は、図5に示した結果に $\sin \theta$ と $\cos \theta$ が関係することになる。図6に例として $r_x^2 r_d/r^3$ の数値積分誤差を θ をパラメータとして示す。角度 θ が変化しても誤差の傾向は $\theta=\pi$ 付近を除いて変わらず、それらの値もほぼ同じであった。したがって、 $r_d/L > 0.5$ では、比較的良好な積分精度をもつという結論は変わらない。

3.3 内部応力誤差 以上述べたこれらの誤差が数値計算において影響するのは、主として境界付近の応力と変位を求める場合である。そこでブロックを平面ひずみのもとで引張った時の内部応力誤差を求めた。すなわち、一辺が $4L$ の正方形断面を16要素に分割し、座標の原点を図心にとる。ここで、内部応力を求める場合に使用する境界の変位および表面力は正解を用いており、その内部応力誤差を表4に示す。表より特異性がより強い関数を多く用いる線形要素の場合の誤差が、一定要素の場合と比較して大きくなっている。いずれの場合も各境界要素の中心で誤差が大きく、その端点で誤差が比較的小さくなっている。これは図4に示したように $s/L=0$ において誤差が大きく、 s/L が大きくなるにつれて誤差が小さくなるためである。また、引張り側の誤差は自由面側の誤差と比較して大きくなっているが、この原因は現在明らかでない。

表4 変位を負荷した時の境界付近の内部応力誤差(%)
(a) 引張り側

y/L	Element x/L	0	1/2	1	3/2
1.8	Constant	82.8	-404	82.9	-463
	Linear	105.3	-413	105.1	-410
1.6	Constant	-6.3	-22	-6.0	-25
	Linear	-0.5	-28	-0.6	-31

(b) 自由面側

x/L	Element y/L	0	1/2	1	3/2
1.8	Constant	13.1	-66.6	13.0	-66.4
	Linear	15.3	-54.9	15.7	-56.1
1.6	Constant	-2.6	-3.8	-2.6	-4.3
	Linear	0.4	-5.8	0.3	-7.8

3.4 内部応力誤差の改善方法 前節までに、境界要素付近の数値積分の誤差が大きくなることが判明した。そこで要素付近の内部応力を誤差なく求める方法としては、考えている内部点に近い要素(図2)について、それぞれの関数値の解析により積分する方法が最良である。しかしこの方法では式(3)と(4)からわかるように、非常に繁雑で実際のでない。ほかの方法として積分方程式を修正する方法が提案されている⁽⁷⁾。本論では境界要素法は数値計算に利用することが本来の目的と考えるので、誤差を小さくする次の二つの方法を提案する。

(1) 基本解を分離した関数それぞれの誤差特性を求め、図5で示されるような曲線の近似式を設定し、それを数値積分する場合の補正項とする。

(2) 内部点に近い要素をいくつか分割し、それぞれの分割した領域で数値積分し加え合わせる(要素分割積分法と呼ぶことにする)。さらに、考えている要素内をより多くの領域に分割し Gauss 4点積分して加算する。要素全体の積分値がある程度収束するまでこの操作を繰返す。

方法(1)による場合、 r_d/L を変数とする補正曲線を表5に示す。プログラムでは数値積分したのち単に補正関数を掛け合わせればよい。この場合近似曲線を非常に厳密に求める必要があり、ある程度の近似では、求めるべき結果の誤差が半減する程度にとどまる。そこでさらに、方法(2)の要素分割積分法を用いて注目すべき内部点に最も近い一つの要素を分割し、内点 $r_d/L < 0.6$ の範囲で積分を行った。前段階で求め

表5 内部応力の算出に用いた補正関数と適用する関数

Error Curve	Integrand for Correction
$3.08 e^{-10 \log z}$	$\frac{1}{r^2}, \frac{r_y}{r}, \frac{r_x y}{r}$
$-0.196 (10z)^{1/3} e^{-7.42z}$	$r_x^2, \frac{r_x}{r}, \xi, r_x r_y \xi$
$-0.77 [8.33(z-0.06)]^{1/3} e^{-7.88z}$	$\frac{r_x^2}{r^2}, \frac{r_x^2 r_y}{r}, \frac{r_x r_y^2}{r}, \xi$ $\frac{r_x r_y}{r^2}, \frac{r_x}{r^3}, \xi$
$13.44 e^{-10 \log 6z}$	$\frac{r_y^2}{r^2}, \frac{r_y}{r^3}, \frac{r_y^3}{r}$
$0.175 [7.7(z-0.196)]^{1/3} e^{-4.38z}$	$\frac{r_x^3}{r} \xi$
$0.19 e^{-15.68z}$	$\log \frac{1}{r}$
$-1.61 [10(z-0.14)]^{1/3} e^{-7.65z}$	$\frac{r_x^2 r_y}{r^3}, \frac{r_x r_y^2}{r^3} \xi$
$0.28 [12.5(z-0.28)]^{1/3} e^{-4.38z}$	$\frac{r_x^3}{r^3} \xi$
$32.76 e^{-10 \log 6z}$	$\frac{r_y^3}{r^3}$

$$z = r_d/L$$

た値に対し現段階の積分値の増分が0.02%以内で計算を打ち切ったので、図7の Proposed method に示すように多少誤差は変動した。なお、ここで提案した方法による解は、従来用いられている例えば8点の Gauss 積分のみを用いる場合と比較して23%少ない計算時間で得られ、比較的精度のよい値であった。

4. 計算時間短縮の試み

境界要素法プログラムにおける各ルーチンの計算時間は、およそ図8のような割合である。連立方程式の

図7 種々の数値積分法による内部応力誤差

図8 各ルーチンの計算時間割合

みならず、その係数であるマトリックス計算の両方がほぼ同じ割合であることがわかる⁽⁶⁾。ここで連立方程式はフルマトリックスを解くのに Gauss-Jordan 法を使用している。これに要する計算時間は変えられないとしてマトリックスを組立てる時間の短縮について考える。一定要素によって境界値を求める場合、表1に示すように10種類の関数を積分する必要がある。しかし同じ関数を2回計算しているところが5箇所あるので、これを除くと15回の関数の積分が10回で済む。そこで重複していた積分を取り除いて計算した結果、改良前のマトリックスの組立てのみの計算時間に比較し、分割した要素数に関係なくほぼ44%減少した。さらに、2・3節に述べたように、被積分関数が奇関数となる場合、および境界要素が一直線上に並ぶような部分を数値計算する際図2で $r_d=0$ となるため、 r_v が掛かった被積分関数はいずれも零となるので、プログラム上でのマトリックスの組立て時間はさらに短縮できる。また、境界から定められた点の内部応力を多数計算すれば、計算時間の減少の割合はさらに大きくなる。

5. 三次元弾性問題への応用

境界要素法によって三次元解析する時、解析対象物の表面を積分する必要がある。いま図9のように四角形平面要素について、その法線方向を y 軸、 ξ, ζ 軸をそれぞれ x, z 軸にとり傾きのない π 平面として考える。2・2節と同じ方法によって距離 r は次のように ξ 座標によって無次元表示できる。

$$r^2 = L^2 \left\{ \xi^2/4 - (s/L)\xi + (r_d/L)^2 + (s/L)^2 + (t/L)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここで点Pの座標位置は (r_d, s, t) である。 ξ と ζ 軸は点Pからみて互換性があるので、 ζ 軸方向の積分特性は ξ 軸方向の特性と同一である。そこで4点積分を

図9 表面積分における被積分関数 r の図式表示

図 10 表面積分における数値積分誤差の例

$(1/r)^2$ と $(1/r)^7$ について点 P の位置が ξ - ζ 平面で $(0, 0)$, $(1, 0)$ 上で行い、誤差を求めると図 10 のようになった。面積分のうち ξ 軸方向に積分する場合について考えると (図 9), 点 Q が変化しても r_c は一定値をとるので二次元問題の場合と同様の誤差傾向を示し、 $(1/r)^2$ についてはその値もほぼ等しい。ここで誤差の基準値としては、Gauss 11 点積分値を用いた。なお π 平面が x, y, z 軸と任意の傾きをもつ場合の r_x, r_y, r_z の値は、3・2 節で行ったように r_e, r_v, r_s について座標変換を行えばよく、その時の誤差は二次元の場合と同じ傾向をとると推測される。

6. あとがき

基本解を含む複雑な被積分関数を個々の関数に分離し、それらを図式表示して積分値の特性を見通しやすくした。ついで Gauss の積分公式に基づき、数値積分

値の誤差特性を明らかにし検討した結果、次のような結果が導かれた。

(1) 一定要素に用いる 20 種類の被積分関数に限り、 $r_d/L > 0.5$ においては、Gauss 4 点積分であっても積分精度は比較的よい。また三次元解析における数値積分誤差の傾向は二次元の場合と同様であり、その誤差は被積分関数の次数が高くなるにつれて大きくなる。

(2) 境界付近の内部応力を求める場合、各要素の中心付近 ($s/L = 0$) の誤差が一般に最も大きくなる。逆に、要素の端点付近 ($s/L = 0.5$) の誤差が最も小さい。

これらの結果を用い、数値積分の誤差の減少法を二つ提案し、かつ計算時間の短縮方法を示し良好な結果が得られた。

本論においては、境界要素法の解の精度に影響する一つの要因である数値積分誤差について報告した。精度に及ぼす他の要因はほかにも考えられ、誤差の少ない解を得ることを目的として今後の課題としたい。本研究の遂行にあたり、大学院生の斎藤理一君に数値計算を援助していただいた。

文 献

- (1) Cruse, T. A., *Int. J. Solids Struct.*, 5(1969), 1259.
- (2) Brebbia, C. A., *The Boundary Element Method for Engineers*, (1978), Pentech press, 邦訳 神谷・田中・ほか共訳, 境界要素法入門, (昭 55), 151, 培風館.
- (3) Lachat, J. C. and Watson, J. O., *Int. J. Num. Methods Eng.*, 10(1976), 991.
- (4) Banerjee, P. K. and Butterfield, R., *Boundary Element Methods in Engineering Science*, (1981), 168, McGraw-Hill Co.
- (5) 東町・岡本, 機論, No.813-1 (昭 56-3), 84.
- (6) 萬・山地, 機論, 47-421, A (昭 56), 867.
- (7) 鷲津・宮本・山田・山本・川井, 有限要素法ハンドブック II, (昭 58), 809, 培風館.

討 論

〔質問〕 田中正隆〔信州大学工学部〕

境界要素法のプログラミングにおいて最も慎重に対処すべきところは、観測点と積分点の距離 r が $r \rightarrow 0$ となる部分の積分のインプレメンテーションである。本論文では、これらに Gauss 数値積分を適用する場合について考察し、計算誤差を少なくするために二つの方法を示している。このうち (1) の方法は、補正曲線を定める操作がやっかいで実用上問題があるように思えるが、(2) の方法は (1) より比較的容易に実行で

きる。実際、市販の BEM プログラムでは (2) の方法を用いているものがある。しかしながら討論者は、 $r \rightarrow 0$ で特異挙動を示す積分に、Gauss 数値積分を適用すること自体に無理があるものと考えている。このような積分を精度よく行うには、積分点の重みに被積分関数の特異性と同じかまたはそれに近い性質を持つ数値積分公式を適用するのが最良である。かかる点について、著者らのご意見をお聞きしたい。

〔回答〕 本論文の目的の一つは、観測点と境界要

素の位置関係をわかりやすくおき、被積分関数の形状を図に表しその積分特性を見とおしやすくした方法論を述べている。そのため用いる積分公式はどの形でもよいが、ここでは多く用いられている Gauss 公式を採用した。さて境界要素法を数値積分のみによって取扱おうとする場合は、討論者の主張されたとおりであって、数値計算に要する時間を考慮しなければ、そのような数値積分法としては次の2種類の方法が考えられる。第1に最も高い特異性を示す関数に適應した積分公式を用いる方法で、これには積分点が100以上とれる Gauss 公式、あるいは二重指数関数形積分公式をはじめとして2~3種類ある。第2に重みを特異性に應じてつけたもので対数 Gauss 積分公式などがある

がその種類は少ない。この第2の部類に属するもので考えられる他の積分法としては、特異性あるいは急激な変化を示す個々の関数に應じた重みをつける積分公式が考えられるが、実際にはそのような積分法はないように思われる。すなわち、図3より被積分関数の形は次数および r_d/L と s/L により変化するので、このようなパラメータによってそのような積分法の重みを変化させる必要があるからである。このような見方は、形式は違っても結局は本論文で述べた方法(1)の補正曲線を定めて積分する方法と等価になると思う。なお厳密な値を要する積分は、 r が零に値い領域では解析的積分、および $\varepsilon \rightarrow 0$ の無限小の取扱いをした解析積分値を用いるのが最良と考える。