引張荷重を受けるバット接着継手の二次元応力解析*

沢 俊行**, 岩田昭浩***, 石川浩久***

Two-Dimensional Stress Analysis of Adhesive Butt Joints
Subjected to Tensile Loads

by Toshiyuki SAWA, Akihiro IWATA, and Hirohisa ISHIKAWA

In the present paper, replacing similar adherends and an adhesive bond by finite strips, stress distributions in adhesive joints are analyzed strictly using the two-dimensional theory of elasticity in the case where adhesive butt joints are subjected to tensile loads. The effects of stiffness and thickness of adhesive bonds on the stress distributions are shown by numerical computations. For verification, an experiment is performed, and the analytical result is in a fairly good agreement with the experimental one. Furthermore, comparing the analytical result with the result obtained by F. E. M., they are in a fairly good agreement.

Key Words: Elasticity, Stress Analysis, Adhesion, Butt Joint, Tensile Load

1. 緒 言

最近の接着剤の性能向上に伴い機械構造物に接着継手が用いられるようになってきた。接着継手はねじ締結やリベット接合などの機械的締結法に比べいくつかの利点を有するが、接着継手構造の設計においては経験によるところが多く設計に必要なデータの整備と強度則の確立が望まれている。接着継手構造に関する強度則を確立するにあたっては継手における応力分布をより正確に知る必要がある。接着継手の応力分布に関しては従来より有限要素法による研究^{(1)~(3)}、光弾性による研究⁽⁴⁾がなされている。また解析的な手法により継手の応力分布を検討している研究⁽⁵⁾⁽⁶⁾もあるが、これらの研究においては境界条件の与え方が十分厳密でないように思われる。

本研究では、接着継手の基本的一例であるバット接着継手に引張荷重が作用する場合の継手の応力分布に関して厳密な解析方法を示し、継手の強度則の確立寄与を目的としている。理論的には被着体、接着層を有限長帯板にモデル化し、弾性三体問題として二次元弾

性論を用いて厳密な境界条件を満足するように解析を行う。この解析に基づき被着体と接着層の縦弾性係数比、ポアソン比の比、引張荷重の荷重分布および接着層の厚さが接着層境界の応力分布に及ぼす影響について数値的に検討する。また解析を確かめるための実験を行い、解析結果と実験結果の比較、検討を行う。

2. 理 論 解 析

図1に同一寸法、同一材質の二つの被着体を接着したバット接着継手に引張荷重が作用する場合を示す。このような接着継手の接着層境界の応力分布を解析するために継手の接着層の x 軸に関する対称性を考慮して図2に示すように被着体を有限長帯板〔I〕に、接着層を有限長帯板〔II〕に置き換える。帯板〔I〕の寸法は長さ $2l$ 、高さ $2h_1$ とし、縦弾性係数を E_1 、ポアソン比を ν_1 とする。帯板〔II〕についてもそれぞれ $2l$ 、 $2h_2$ 、 E_2 、 ν_2 とする。また帯板〔I〕の上端面には y_1 軸に対称な任意の荷重が $F(x)$ の応力分布で $|x| \leq e$ ($e \leq l$)の範囲に作用すると仮定し、この分布をフーリエ級数に展開すると境界条件は次式となる。なお u は x 方向変位、 v は y 方向変位とし、右肩の添字I、IIはそれぞれ帯板〔I〕、〔II〕に関するものを表す。

(i) 有限長帯板〔I〕(被着体)において:

* 昭和60年11月20日 関西支部第245回講演会において講演、原稿受付 昭和60年4月26日。

** 正員、山梨大学工学部 (〒400 甲府市武田4-3-11)。

*** 学生員、山梨大学大学院。

図 1 引張荷重を受けるバット接着継手

図 2 解析モデルおよび寸法

$$\left. \begin{aligned} x = \pm l : \sigma_x^I = \tau_{xy}^I = 0 \\ y_1 = h_1 : \sigma_y^I = F(x) = a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos\left(\frac{s\pi x}{l}\right) \\ \tau_{xy}^I = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

(ii) 有限長帯板〔II〕(接着層)において:

$$x = \pm l : \sigma_x^{\text{II}} = \tau_{xy}^{\text{II}} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

(iii) 有限長帯板〔I〕,〔II〕の境界において:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_y^I)_{y_1=-h_1} &= (\sigma_y^{\text{II}})_{y_2=h_2} \\ (\tau_{xy}^I)_{y_1=-h_1} &= (\tau_{xy}^{\text{II}})_{y_2=h_2} \\ (u^I)_{y_1=-h_1} &= (u^{\text{II}})_{y_2=h_2} \\ \left(\frac{\partial v^I}{\partial x}\right)_{y_1=-h_1} &= \left(\frac{\partial v^{\text{II}}}{\partial x}\right)_{y_2=h_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

なお,

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) dx, \quad a_s = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos\left(\frac{s\pi x}{l}\right) dx$$

(s=1, 2, 3, ……)

式(1)~(3)の境界条件をもつ有限長帯板を解析するためにエアリーの応力関数 χ を用いる。このときの各応力, 変位 (平面応力状態) は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 2Gv &= -\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで, χ, φ はそれぞれ次式

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi = 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0$$

を満たし, さらに φ は次式の関係より求められる。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \nabla^2 \chi, \quad (\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$$

G: 横弾性係数, ν : ポアソン比

重調和関数の変数分離解⁽⁷⁾の中から境界条件式(1)~(3)を考慮して, 有限長帯板〔I〕の解析に用いるエアリーの応力関数 χ^I を $\chi^I = \chi_1^{(s)} + \chi_2^{(s)} + \chi_3^I + \chi_4^I$ と置き, 帯板〔II〕に関しては応力関数 χ^{II} を $\chi^{\text{II}} = \chi_1^{(s)} + \chi_3^{\text{II}}$ と置く。応力関数 $\chi_1^I, \chi_2^I, \chi_3^I, \chi_4^I, \chi_1^{\text{II}}, \chi_3^{\text{II}}$ を式(6)から式(11)に示す。なお式中の $A_0^I, \bar{A}_n^I, \bar{B}_s^I, \bar{A}_n^{\text{II}}, \bar{B}_s^{\text{II}}, \bar{A}_n^{\text{II}}, \bar{B}_s^{\text{II}}, \tilde{A}_n^I, \tilde{B}_s^I, A_0^{\text{II}}, \bar{A}_n^{\text{II}}, \bar{B}_s^{\text{II}}, \bar{A}_n^{\text{II}}, \bar{B}_s^{\text{II}} (n, s=1, 2, 3, \dots)$ は境界条件により決定される未定係数である。

$$\begin{aligned} \chi_1^I &= \chi_1(A_0^I, \bar{A}_n^I, \bar{B}_s^I, l, h_1, a_n^I, \lambda_s, \bar{A}_n^I, \bar{Q}_s^I, x, y_1) \\ &= \frac{A_0^I}{2} x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^I}{\bar{A}_n^I \alpha_n^{I2}} [(a_n^I l \operatorname{ch}(a_n^I l) + \operatorname{sh}(a_n^I l)) \operatorname{ch}(a_n^I x) - a_n^I x \operatorname{sh}(a_n^I l) \operatorname{sh}(a_n^I x)] \cos(a_n^I y_1) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{B}_s^I}{\bar{Q}_s^I \lambda_s^2} [(\lambda_s h_1 \operatorname{ch}(\lambda_s h_1) + \operatorname{sh}(\lambda_s h_1)) \operatorname{ch}(\lambda_s y_1) - \lambda_s y_1 \operatorname{sh}(\lambda_s h_1) \operatorname{sh}(\lambda_s y_1)] \cos(\lambda_s x) \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_2^I &= \chi_2(\bar{A}_n^I, \bar{B}_s^I, l, h_1, a_n^I, \lambda_s, \bar{A}_n^I, \bar{Q}_s^I, x, y_1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^I}{\bar{A}_n^I \alpha_n^{I2}} [(a_n^I l \operatorname{ch}(a_n^I l) + \operatorname{sh}(a_n^I l)) \operatorname{ch}(a_n^I x) - a_n^I x \operatorname{sh}(a_n^I l) \operatorname{sh}(a_n^I x)] \sin(a_n^I y_1) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{B}_s^I}{\bar{Q}_s^I \lambda_s^2} [(\lambda_s h_1 \operatorname{sh}(\lambda_s h_1) + \operatorname{ch}(\lambda_s h_1)) \operatorname{sh}(\lambda_s y_1) - \lambda_s y_1 \operatorname{ch}(\lambda_s h_1) \operatorname{ch}(\lambda_s y_1)] \cos(\lambda_s x) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_3^I &= \chi_3(\bar{A}_n^I, \bar{B}_s^I, l, h_1, \alpha_n^I, \lambda_s^I, \bar{J}_n^I, \bar{Q}_s^I, x, y_1) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^I}{\bar{J}_n^I \alpha_n^{I2}} [a_n^I l \operatorname{sh}(\alpha_n^I l) \operatorname{ch}(\alpha_n^I x) - a_n^I x \operatorname{ch}(\alpha_n^I l) \operatorname{sh}(\alpha_n^I x)] \cos(\alpha_n^I y_1) \\ &\quad - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{B}_s^I}{\bar{Q}_s^I \lambda_s^{I2}} [\lambda_s^I h_1 \operatorname{sh}(\lambda_s^I h_1) \operatorname{ch}(\lambda_s^I y_1) - \lambda_s^I y_1 \operatorname{ch}(\lambda_s^I h_1) \operatorname{sh}(\lambda_s^I y_1)] \cos(\lambda_s^I x) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_4^I &= \chi_4(\bar{A}_n^I, \bar{B}_s^I, l, h_1, \alpha_n^I, \lambda_s^I, \bar{J}_n^I, \bar{Q}_s^I, x, y_1) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^I}{\bar{J}_n^I \alpha_n^{I2}} [a_n^I l \operatorname{sh}(\alpha_n^I l) \operatorname{ch}(\alpha_n^I x) - a_n^I x \operatorname{ch}(\alpha_n^I l) \operatorname{sh}(\alpha_n^I x)] \sin(\alpha_n^I y_1) \\ &\quad - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{B}_s^I}{\bar{Q}_s^I \lambda_s^{I2}} [\lambda_s^I h_1 \operatorname{ch}(\lambda_s^I h_1) \operatorname{sh}(\lambda_s^I y_1) - \lambda_s^I y_1 \operatorname{sh}(\lambda_s^I h_1) \operatorname{ch}(\lambda_s^I y_1)] \cos(\lambda_s^I x) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\chi_1^{\text{II}} = \chi_1(A_n^{\text{II}}, \bar{A}_n^{\text{II}}, \bar{B}_s^{\text{II}}, l, h_2, \alpha_n^{\text{II}}, \lambda_s, \bar{J}_n^{\text{II}}, \bar{Q}_s^{\text{II}}, x, y_2) \dots\dots\dots (10)$$

$$\chi_3^{\text{II}} = \chi_3(\bar{A}_n^{\text{II}}, \bar{B}_s^{\text{II}}, l, h_2, \alpha_n^{\text{II}}, \lambda_s, \bar{J}_n^{\text{II}}, \bar{Q}_s^{\text{II}}, x, y_2) \dots\dots\dots (11)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \alpha_n^I &= \alpha_n(h_1) = \frac{n\pi}{h_1}, \alpha_n^I = \alpha_n'(h_1) = \frac{(2n-1)\pi}{2h_1}, \alpha_n^{\text{II}} = \alpha_n(h_2), \alpha_n^{\text{II}} = \alpha_n'(h_2), \lambda_s = \frac{s\pi}{l}, \lambda_s' = \frac{(2s-1)\pi}{2l} \\ \bar{J}_n^I &= J_n(\alpha_n^I l) = \operatorname{sh}(\alpha_n^I l) \operatorname{ch}(\alpha_n^I l) + \alpha_n^I l, \bar{J}_n^I = \bar{J}_n = J_n(\alpha_n^I l), \bar{J}_n^{\text{II}} = \bar{J}_n, \bar{J}_n^{\text{II}} = J_n(\alpha_n^{\text{II}} l), \bar{J}_n^{\text{II}} = J_n(\alpha_n^{\text{II}} l) \\ \bar{Q}_s^I &= Q_s(\lambda_s h_1) = \operatorname{sh}(\lambda_s h_1) \operatorname{ch}(\lambda_s h_1) + \lambda_s h_1, \bar{Q}_s^I = Q_s'(\lambda_s h_1) = \operatorname{sh}(\lambda_s h_1) \operatorname{ch}(\lambda_s h_1) - \lambda_s h_1 \\ \bar{Q}_s^I &= Q_s(\lambda_s' h_1), \bar{Q}_s^{\text{II}} = Q_s'(\lambda_s' h_1), \bar{Q}_s^{\text{II}} = Q_s(\lambda_s h_2), \bar{Q}_s^{\text{II}} = Q_s(\lambda_s h_2), \operatorname{sh} : \sinh, \operatorname{ch} : \cosh \end{aligned}$$

エアリー-の応力関数 χ^I, χ^{II} を式(4), (5)に代入して有限長帯板〔I〕, 〔II〕の各応力, 変位を求め, これらを境界条件式(1)~(3)と等置することにより未定係数の間には次式の関係が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_n^I + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^I P_{ns}^I &= 0, \bar{A}_n^I - \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^I P_{ns}^I = 0, \bar{A}_n^I + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^I S_{ns}^I = 0, \bar{A}_n^I + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^I S_{ns}^I = 0 \\ \bar{A}_n^{\text{II}} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^{\text{II}} P_{ns}^{\text{II}} &= 0, \bar{A}_n^{\text{II}} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^{\text{II}} S_{ns}^{\text{II}} = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I Q_{ns}^I + \bar{B}_s^I - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I Q_{ns}^I + \bar{B}_s^I = -a_s \\ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I R_{ns}^I + \bar{B}_s^I + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I R_{ns}^I + \bar{B}_s^I &= 0, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I Q_{ns}^I + \bar{B}_s^I + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I Q_{ns}^I - \bar{B}_s^I - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{\text{II}} Q_{ns}^{\text{II}} - \bar{B}_s^{\text{II}} = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I R_{ns}^I + \bar{B}_s^I - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I R_{ns}^I - \bar{B}_s^I + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{\text{II}} R_{ns}^{\text{II}} + \bar{B}_s^{\text{II}} &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I U_{ns}^I + \bar{B}_s^I V_{ns}^I + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I U_{ns}^I + \bar{B}_s^I V_{ns}^I + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^I W_m^I C_{ms}^{\text{II}} - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^{\text{II}} W_m^{\text{II}} C_{ms}^{\text{II}} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{\text{II}} U_{ns}^{\text{II}} - \bar{B}_s^{\text{II}} V_{ns}^{\text{II}} - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^{\text{II}} W_m^{\text{II}} C_{ms}^{\text{II}} = D_s^{\text{II}} \\ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^I F_m^I E_{ms}^{\text{II}} - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^{\text{II}} F_m^{\text{II}} E_{ms}^{\text{II}} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I H_{ns}^I + \bar{B}_s^I J_s^I - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{\text{II}} H_{ns}^{\text{II}} + \bar{B}_s^{\text{II}} J_s^{\text{II}} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^{\text{II}} F_m^{\text{II}} E_{ms}^{\text{II}} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{\text{II}} H_{ns}^{\text{II}} + \bar{B}_s^{\text{II}} J_s^{\text{II}} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$$A_0^I = a_0, A_0^{\text{II}} = A_0^I \dots\dots\dots (13)$$

ただし,

$$\begin{aligned} P_{ns}^I &= P_{ns}(\alpha_n^I, \lambda_s, h_1, \bar{Q}_s^I) = \frac{4(-1)^{n+s} \alpha_n^{I2} \lambda_s \operatorname{sh}^2(\lambda_s h_1)}{\bar{Q}_s^I (\alpha_n^{I2} + \lambda_s^2)^2 h_1}, P_{ns}^{\text{II}} = P_{ns}(\alpha_n^{\text{II}}, \lambda_s, h_2, \bar{Q}_s^{\text{II}}) \\ S_{ns}^I &= S_{ns}(\alpha_n^I, \lambda_s', h_1, \bar{Q}_s^I) = \frac{4(-1)^{n+s} \alpha_n^{I2} \lambda_s' \operatorname{ch}^2(\lambda_s' h_1)}{\bar{Q}_s^I (\alpha_n^{I2} + \lambda_s'^2)^2 h_1}, S_{ns}^{\text{II}} = S_{ns}(\alpha_n^{\text{II}}, \lambda_s', h_2, \bar{Q}_s^{\text{II}}) \\ Q_{ns}^I &= Q_{ns}(\alpha_n^I, \lambda_s, l, \bar{J}_n^I) = \frac{4(-1)^{n+s} \alpha_n^I \lambda_s^2 \operatorname{sh}^2(\alpha_n^I l)}{\bar{J}_n^I (\alpha_n^{I2} + \lambda_s^2)^2 l}, Q_{ns}^{\text{II}} = Q_{ns}(\alpha_n^{\text{II}}, \lambda_s, l, \bar{J}_n^{\text{II}}) \\ R_{ns}^I &= R_{ns}(\alpha_n^I, \lambda_s', l, \bar{J}_n^I) = \frac{4(-1)^{n+s} \alpha_n^I \lambda_s'^2 \operatorname{ch}^2(\alpha_n^I l)}{\bar{J}_n^I (\alpha_n^{I2} + \lambda_s'^2)^2 l}, R_{ns}^{\text{II}} = R_{ns}(\alpha_n^{\text{II}}, \lambda_s', l, \bar{J}_n^{\text{II}}) \\ P_{ns}^I &= S_{ns}(\alpha_n^I, \lambda_s, h_1, \bar{Q}_s^I), S_{ns}^I = P_{ns}(\alpha_n^I, \lambda_s', h_1, \bar{Q}_s^I), Q_{ns}^I = Q_{ns}(\alpha_n^I, \lambda_s, l, \bar{J}_n^I) \\ R_{ns}^I &= R_{ns}(\alpha_n^I, \lambda_s', l, \bar{J}_n^I) \\ U_{ns}^I &= U_{ns}(\alpha_n^I, \bar{J}_n^I, G_1, \nu_1) = \frac{2(-1)^{n+s} \lambda_s \operatorname{sh}^2(\alpha_n^I l)}{\bar{J}_n^I \alpha_n^I (\alpha_n^{I2} + \lambda_s^2) G_1 l} \left(\frac{1}{1 + \nu_1} + \frac{\alpha_n^{I2}}{\alpha_n^{I2} + \lambda_s^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_s^I &= V_s(\lambda_s, h_1, \bar{Q}_s^I, G_1, \nu_1) = \frac{1}{2\bar{Q}_s^I \lambda_s G_1} \left\{ \lambda_s h_1 + \frac{\nu_1 - 1}{1 + \nu_1} \operatorname{sh}(\lambda_s h_1) \operatorname{ch}(\lambda_s h_1) \right\} \\
V_s^V &= V_s^V(\lambda_s, h_1, \bar{Q}_s^I, G_1, \nu_1) = \frac{1}{2\bar{Q}_s^I \lambda_s G_1} \left\{ \lambda_s h_1 - \frac{\nu_1 - 1}{1 + \nu_1} \operatorname{sh}(\lambda_s h_1) \operatorname{ch}(\lambda_s h_1) \right\} \\
W_s^I &= W_s(\lambda_s', h_1, \bar{Q}_s^I, E_1) = \frac{2 \operatorname{ch}^2(\lambda_s' h_1)}{\bar{Q}_s^I \lambda_s' E_1}, \quad W_s^V = W_s^V(\lambda_s', h_1, \bar{Q}_s^I, E_1) = \frac{2 \operatorname{sh}^2(\lambda_s' h_1)}{\bar{Q}_s^I \lambda_s' E_1} \\
H_{ns}^I &= H_{ns}(\alpha_n^I, \bar{A}_n^I, G_1, \nu_1) = \frac{(-1)^{n+s} \alpha_n^I \operatorname{ch}^2(\alpha_n^I l)}{\bar{A}_n^I (\alpha_n^{I2} + \lambda_n^{I2}) G_1 l} \left(\frac{3 + \nu_1}{1 + \nu_1} + \frac{\lambda_n^{I2} - \alpha_n^{I2}}{\alpha_n^{I2} + \lambda_n^{I2}} \right) \\
U_{ns}^V &= U_{ns}(\alpha_n^V, \bar{A}_n^I, G_1, \nu_1), \quad U_{ns}^H = U_{ns}(\alpha_n^H, \bar{A}_n^H, G_2, \nu_2), \quad V_s^H = V_s(\lambda_s, h_2, \bar{Q}_s^H, G_2, \nu_2) \\
W_s^H &= W_s(\lambda_s', h_2, \bar{Q}_s^H, E_2), \quad F_s^I = \lambda_s \times W_s^I(\lambda_s, h_1, \bar{Q}_s^I, E_1), \quad F_s^V = \lambda_s \times W_s^V(\lambda_s, h_1, \bar{Q}_s^I, E_1) \\
F_s^H &= \lambda_s \times W_s^H(\lambda_s, h_2, \bar{Q}_s^H, E_2), \quad H_{ns}^V = H_{ns}(\alpha_n^V, \bar{A}_n^I, G_1, \nu_1), \quad H_{ns}^H = H_{ns}(\alpha_n^H, \bar{A}_n^H, G_2, \nu_2) \\
J_s^I &= \lambda_s' \times V_s(\lambda_s', h_1, \bar{Q}_s^I, G_1, \nu_1), \quad J_s^V = \lambda_s' \times V_s^V(\lambda_s', h_1, \bar{Q}_s^I, G_1, \nu_1) \\
J_s^H &= \lambda_s' \times V_s^H(\lambda_s', h_2, \bar{Q}_s^H, G_2, \nu_2) \\
C_{ms}^H &= C_{ms}(\lambda_m', \lambda_s) = -\frac{1}{l} \left[\frac{1}{\lambda_m' + \lambda_s} \sin\{(\lambda_m' + \lambda_s)l\} - \frac{1}{\lambda_m' - \lambda_s} \sin\{(\lambda_m' - \lambda_s)l\} \right] \\
E_{ms}^H &= C_{ms}(\lambda_m, \lambda_s'), \quad D_s^H = \frac{2}{\lambda_s} A_0^I (-1)^s \left(\frac{\nu_2}{E_2} - \frac{\nu_1}{E_1} \right), \quad G_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)}, \quad G_2 = \frac{E_2}{2(1 + \nu_2)}
\end{aligned}$$

式(12)の無限連立一次方程式を解くことにより $\bar{A}_n^I, \bar{B}_s^I, \dots, \bar{A}_n^H, \bar{B}_s^H$ が決定され、式(13)より A_0^I, A_0^H が決定される。決定された係数を用いることにより各応力、変位が求められる。

3. 実験方法

図3に実験に用いた試験片の寸法を示す。なお試験片の厚さは8mm、材質はS45Cである。一対の試験片を常温硬化型エポキシ接着剤〔住友スリーエム(株)製、Scotch-Weld 1838〕で接着、硬化した後、試験片にあけたφ11の穴にピンを介して引張荷重を作用させる。被着体の接着層境界から2mm離れた位置でのひずみを抵抗線ひずみゲージ(共和電業製、KFC-C1-11)により、また荷重はロードセルにより、それぞれ動ひずみ測定器を通してX-Yレコーダに同時に記録させる。

4. 解析結果および実験結果との比較

4.1 解析結果 数値計算にあたっては被着体と接着層の縦弾性係数比 E_1/E_2 が計算精度に及ぼす影響を考慮して級数の項数を最大200項とした。図4は

図3 実験に用いた試験片の寸法

被着体と接着層の縦弾性係数比 E_1/E_2 が接着層境界の応力分布に及ぼす影響を示す。 E_1/E_2 を1, 3, 10とした。また被着体の上端面 ($y_1 = h_1$) には一様分布の引張荷重〔図2において $|x| \leq l$ で $F(x)$ は一定〕が作用するものとした。なお縦軸は接着層境界の平均垂直応力 σ_{ym} に対する垂直応力 σ_y の比 σ_y/σ_{ym} 、およびせん断応力 τ_{xy} の比 τ_{xy}/σ_{ym} を、横軸は被着体および接着層の半分の長さ l に対する中心からの距離 x の比 x/l を表す。 σ_y の分布は E_1/E_2 が1に近づくほど一様になる。また E_1/E_2 が大きくなると $x/l = 1.0$ での応力が増大する。 τ_{xy} の分布も E_1/E_2 が大きくなるにつれて $x/l = 1.0$ の近傍での応力が高くなっている。さらに $E_1/E_2 = 60$ として同様の解析を行ったところ、 σ_y の分布、 τ_{xy} の分布とも $E_1/E_2 = 10$ の場合とほぼ一致した。図5は被着体と接着層のポアソン比の比 ν_1/ν_2 が接着層境界の応力分布に及ぼす影響を示す。 ν_1/ν_2 を1.00, 0.86, 0.75とした。 σ_y の分布は ν_1/ν_2 が1.00に近づくほど応力分布の変化は少なくなる。 τ_{xy} は $\nu_1/\nu_2 = 1.00$ の場合、端部 ($x/l = 1.0$) 付近で急激に増大しているが他の範囲では ν_1/ν_2 が1.00に近づくほど τ_{xy} は低くなっている。

図6は接着層の厚さが接着層境界の応力分布に及ぼす影響を示す。接着層の厚さ $2h_2$ に対する被着体の高さ $2h_1$ の比 h_1/h_2 を2, 5, 20とした。 h_1/h_2 が大きくなるほど σ_y の分布は一様になり、 τ_{xy} は小さくなっている。図7は被着体の上端面 ($y_1 = h_1$) に作用する引張荷重の荷重分布が接着層境界の応力分布に及ぼす影響を示す。まず h_1/h_2 を5.0とし、引張荷重の応力分布

$F(x)$ が上端面全域($e/l=1.0$)に一樣に作用する場合と $e/l=0.1$ の範囲に一樣に作用する場合について計算を行った。なおこの解析においては被着体の材質に鋼を、接着層の材質を本実験に用いたエポキシ接着剤を考え、 $E_1/E_2=65.6$, $\nu_1/\nu_2=0.81$ とした。 σ_y および τ_{xy} の分布とも荷重分布による影響が明らかに現れている。つぎに $h_1/h_2=10.0$ の場合についても同様の計算を行ったところ、 $e/l=1.0$ の場合と $e/l=0.1$ の場合の σ_y および τ_{xy} の分布ともほぼ一致した。このことより、このモデルにおいては h_1/h_2 が10.0以上になると荷重の分布状態 $F(x)$ が接着層境界に及ぼす影響は少ないと考えられる。

4-2 解析結果と実験結果の比較検討 図8は被着体の接着層境界から2 mm ($y_1=-5.5$ mm) 離れた位置における y_1 方向のひずみに関する解析結果と実験結果の比較を示す。なお接着した試験片に1.5 kNの引張荷重が作用している場合の結果である。数値計算においては試験片の縦弾性係数を206 GPa, ポアソン比を0.30, 接着剤のそれらを3.14 GPa, 0.37とし、試験片の $y_1=7.5$ mmに $e=10$ mmの範囲で $F(x)$ を一樣とした。接着層の厚さ $2h_2$ は実測値0.055 mmとした。縦軸は試験片の y_1 方向のひずみを、横軸は中心からの距離 x を表し、実線は計算値を、○印は実験値を表す。解析結果と実験結果はかなりよく一致して

図4 縦弾性係数比が接着層境界の応力分布に及ぼす影響

$[y_2=h_2, h_1/h_2=2.0, h_1/l=0.2]$
 $[\nu_1/\nu_2=1.0, |x| \leq l \text{ で } F(x) \text{ は一定}]$

図6 接着層の厚さが接着層境界の応力分布に及ぼす影響

$[y_2=h_2, h_1/l=0.2, E_1/E_2=3]$
 $[\nu_1/\nu_2=1.0, |x| \leq l \text{ で } F(x) \text{ は一定}]$

図5 ポアソン比の比が接着層境界の応力分布に及ぼす影響

$[y_2=h_2, h_1/h_2=2.0, h_1/l=0.2]$
 $[E_1/E_2=3, |x| \leq l \text{ で } F(x) \text{ は一定}]$

図7 荷重分布が接着層境界の応力分布に及ぼす影響

$[y_2=h_2, h_1/h_2=5.0, h_2/l=0.1]$
 $[E_1/E_2=65.6, \nu_1/\nu_2=0.81]$

図 8 解析結果と実験結果の比較
(荷重 1.5 kN の場合)

いる。図 9 は二次元有限要素解析⁽¹⁾により得られた接着層境界の応力分布の比較を示す。この比較にあたっての解析は平面ひずみ状態でを行った。二次元有限要素解析による結果と本解析による結果は σ_y の分布、 τ_{xy} の分布ともかなりよく一致している。

5. 結 言

本研究は接着継手の強度則を確立するために接着継手の基本的一例であるバット接着継手に引張荷重が作用する場合の接着層境界の応力分布に関して検討し、次の結果が得られた。

(1) バット接着継手の接着層境界の応力分布を、被着体、接着層を有限長帯板にモデル化し、被着体の弾性を考慮して弾性三体問題として二次元弾性論により厳密に解析する方法を示した。

(2) (1)の方法を用いて接着層境界の応力分布を解析し、被着体と接着層の縦弾性係数比、ポアソン比の比、接着層の厚さ、引張荷重の荷重分布が接着層境界の応力分布に及ぼす影響を数値的に明らかにした。

(3) 接着継手に引張荷重を作用させた時の被着体のひずみを測定し解析結果と比較したところ、解析結

図 9 二次元有限要素解析⁽¹⁾との比較

$$\left[\begin{array}{l} h_1/h_2=10.0, h_1/l=1.0, E_1/E_2=65.6 \\ \nu_1=0.429, \nu_2=0.587 \\ |x| \leq l \text{ で } F(x) \text{ は一定} \end{array} \right]$$

果と実験結果はかなりよく一致することが示された。

また有限要素法による結果ともかなりよく一致した。

終わりに本研究を遂行するにあたって貴重なお教示を賜った東京工業大学精密工学研究所の杉林俊雄助手、日本車輛の鈴木靖昭氏に感謝の意を表します。

文 献

- (1) 鈴木, 機論, 50-449, A (昭 59), 67.
- (2) 杉林・池上, 機論, 50-449, C (昭 59), 17.
- (3) Alwar, R. S. and Nagaraja, Y. R., *J. Adhesion*, 7 (1976), 279.
- (4) 辻・島田, 機論, 30-218 (昭 39), 1192.
- (5) Lubkin, J. L., *Trans. ASME, Ser. E*, 24-2 (1957), 255.
- (6) Wah, T., *Trans. ASME, Ser. H*, 95-3 (1973), 174.
- (7) 中原, 応用弾性学, (昭 52), 216, 実教出版.
- (8) 沢・熊野, 機論, 50-452, A (昭 59), 600.

討 論

〔質問〕 鈴木 靖 昭〔日本車輛製造(株)〕

接着層のみでなく被着体も弾性体とした実際のバット継手と同一条件の継手について、意義のある厳密解を導出されたことに対し敬意を表す。

次の点について検討されておられればご教示いただきたい。

(1) 対象とされているバット継手の場合、 $E_1 \neq E_2$ あるいは $\nu_1 \neq \nu_2$ であれば、接着層境界の自由端 ($x = \pm l, y_2 = \pm h_2$) は必ず特異点となるのか、あるいは特異点となる条件があるのか。

(2) 特異点となる場合は σ_x, σ_y , および τ_{xy} のいずれもが無限大となるのか。

〔回答〕 (1) 被着体と接着層の材料定数が異なる場合には本解析結果は接着層境界の自由端において σ_y, σ_x および τ_{xy} の値は急激な変化を示した。このことは特異点であることを示していると思われる。ご指摘の特異点に関しては多くの報告(付1)があるので今後特異点を考慮した解析を検討したいと考えている。

(付1) 例えば、笠野・松本, 日本接着協会誌, 21-9 (昭 60), 373.

(2) 本解析は特異点を考慮に入れていないが接着層境界の自由端付近での応力は大きく変化している。 σ_y の値は本解析結果(図4~7)において $x/l=1.0$ の点で有限値を示す。 τ_{xy} は $x/l=1.0$ の点に近づくにつれてかなり大きな値を示すが $x/l=1.0$ の点では理論上零になる。 σ_x の値も $x/l=1.0$ の点では零となる。

〔質問〕 杉林 俊雄

〔東京工業大学精密工学研究所〕

以下の点についてご教示願いたい。

(1) 緒言で継手の応力分布に関して厳密な解析法を示し、継手の強度則の確立寄与を目的としていると述べられているが、ここで示された種々の応力分布の結果と継手の強度則の確立とをどのように結びつけて考えればよろしいのか。

(2) 被着体と接着層との材料定数の比 E_1/E_2 が1.0に近づけば、両者は同種材料になり、応力分布がより平滑になるのは当然と考えられる。問題となるのはむしろ E_1/E_2 の値が大きくなった時の応力分布と強度の関係と思われる。質問(1)と関連するが、ここでの解析結果では $E_1/E_2=10$ と $E_1/E_2=60$ の継手の応力分布がほぼ一致したとあるが、この両者の継手の強度は応力分布から考えるとほぼ同じ値となるのか。

〔回答〕 (1) 強度則確立のためには応力分布をより正確に把握する必要があると思われる。このための方法はいくつかあるが、本研究では一つの方法として解析的な手法を用いている。一つの継手に対して種々の方法で検討することも少なからずの意義があると考えられるが、今後さらに研究を発展させて強度則の確立と結びつけたい。

(2) 本研究においては E_1/E_2 が接着層境界の応力分布に及ぼす影響を調べるために E_1/E_2 の小さい範囲での解析結果を示したが E_1/E_2 が大きい場合の数値計算も可能である。ただし E_1/E_2 の値が10を越えると相対的に被着体が剛体に近づき応力分布の差異が少なくなる。応力分布の差異が E_1/E_2 が10と60では極めて小さいので、この二つの強度の差異も小さくなるものと推測している。

〔質問〕 松田 弘〔工学院大学機械工学科〕

(1) E_1/E_2 が計算精度に及ぼす影響を考慮して級数の項数を200項としておられるが、誤差評価の検討をどのように行われたかそれらの式を示していただきたい。

(2) 本解析のような矩形板の解析に基づく方法では h_1 が小さい場合は荷重分布の影響を受けるが、一般に接着継手では被着体の長さ(h_1)はかなり大きく、サンブナンの原理が成り立つものとして境界条件式(1)は一定として方程式を作成しても十分ではないか。

(3) 質問(2)と関連することであるが、計算例では h_1/h_2 の値を2.0および5.0としているが実用上の接着継手では接着層の厚さを考慮すると被着体の長さ h_1 は極めて薄く、非実用的な接着継手となるので h_1 の大きい範囲で検討すべきではないか。したがって h_1 を大きくとれば図7での結果も異なるのではないか。

〔回答〕 (1) 本解析では被着体と接着層の寸法比および材料定数の比の変化が解の収束性に影響を及ぼすので、接着層境界の各点での各応力を級数の項数を変化させて計算し各応力の各点での差異が1%以内であれば十分収束しているとみなし、これを解としている。特に $x/l=1.0$ の点付近で十分収束させるために級数の項数を最大200項までとった。

(2) 本研究では被着体の寸法を任意の場合に解析が可能であるように境界条件を設定したが、ご指摘のように被着体の高さ h_1 が h_2 に対して十分大きい場合には被着体の高さは半無限長と仮定しても解析可能であると考えられる。なお、この場合未定係数の数が減少するので計算がより簡単化されるものと推測している。

(3) 数値計算はご指摘のような h_1 の寸法でも可能であるが、ここでは特に荷重分布が接着層境界の応力分布に影響を及ぼす h_1/h_2 の比の値を知るために h_1/h_2 が比較的小さい値で計算を行っている。図7の結果において h_1/h_2 が10以上では本文でも述べているように荷重分布の影響は少なくなるといえる。