弾性床上の無限長はりについて*
(二次元弾性接触問題)

宮 田 忠 治**, 松 本 忠 彦***

An Infinite Beam on an Elastic Foundation
(The Contact Problem of Two-dimensional Elasticity)

by Chuji MIYATA and Tadahiko MATSUMOTO

The contact problem of two-dimensional elasticity, i. e., contact between an elastic foundation and an infinite beam with a concentrated load applied at one point of the opposing edge of the infinite beam is investigated analytically. The ratio between the height of the infinite beam and the thickness of the foundation is changed from 1 to 10. Further, the ratio (E_2/E_1) between the Young's modulus of the infinite beam and that of the foundation is changed from 0.02 to 10. The "foundation modulus" is obtained analytically from the result of the investigation.

Key Words: Elasticity, Contact Stress, Foundation Modulus, Infinite Beam, Elastic Foundation

1. 結 言

弾性床上にのせられた無限長はり荷重をうける場合の応力ならびに変形を求める問題については、すでに数多くの文献があり Winkler らによって提唱された“床係数”の仮定によって計算することも広く行われている⁽¹⁾。

また上記の仮定の当否についての検討もなされているが、これは弾性床を半無限板として取扱ったものである⁽²⁾。

本報は弾性床の厚さが有限な場合にそれが床とその上のはりとの間に生じる接触圧力分布にどのような影響をもつか、また両者の縦弾性係数の比および接触面における相対的すべりの有無一摩擦の有無一によってどのように変わるかを調べるとともに、従来の材料力学的計算による“床係数”の弾性力学的検討をもするために行った計算である。

2. 理 論 解 析

図 1 に示すように、弾性床 I の直線境界上に別の無限長はり II, II' が取付けられ、これら上下 II, II' が圧縮荷重をうける場合、弾性床 I と無限長はり II または II' との接触面にどのような圧力が生じるかを考える。

このような場合は x 軸上ではせん断応力および y 方向の変位はともに零であるから弾性床 I の上半部は x 軸に沿って滑らかに支持された有限厚さの弾性床と考えることができる。

2・1 接触面ですべりが無いとした場合 まず接触面ですべりが無いとした場合、これは弾性床と無限

図 1 弾性床上の無限長はり

* 昭和 58 年 10 月 10 日 第 61 期全国大会講演会および昭和 59 年 4 月 1 日 第 61 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 60 年 4 月 16 日。

** 正員, 神奈川大学工学部 (〒221 横浜市神奈川区六角橋 3-27-1)。

*** 故 (元神奈川大学工学部)。

長はりの間の摩擦係数が極めて大きく、相互に一体的結合をなしているとみなされる場合を扱う。

さて、問題を二次元的のものと考えエアリーの応力関数を用いて応力解析を行う。いま直角座標を図1のようにとりエアリーの応力関数を $F(x, y)$ で表せば、これは適合条件

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^2 F(x, y) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

を満たし、かつ境界条件を満足するものであればよい。

このような $F(x, y)$ が求められれば、応力成分は

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \partial^2 F / \partial y^2, & \sigma_y &= \partial^2 F / \partial x^2, \\ \tau_{xy} &= -\partial^2 F / \partial x \partial y \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

によって与えられる。

いま簡単のために荷重の分布状態は上下とも同じであり、 y 軸に関しても左右対称とすれば、これによって生じる接触圧力分布もまた同様なはずであるから $y > 0$ の領域だけを考えればよく、かつこれはフーリエコサイン積分の形で表すことができる。ただし圧縮荷重ははり II および II' の一部分だけに働くものとする。

る。

まず弾性床 I について考える。

弾性床 I に対する境界条件は

$y = h$ の時

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p(\alpha) \cos \alpha x d\alpha \\ \tau_{xy} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty q(\alpha) \sin \alpha x d\alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

である。 $p(\alpha)$ は未知関数であって、弾性床 I とはり II とが変形後も離れないという条件から定められ、また上の σ_y が接触圧力の分布状態を示すものである。 $q(\alpha)$ は未知関数であって、後に弾性床 I とはり II との接触面における変位は垂直方向のものだけでなく、水平方向 (x 軸方向) のものもまた相等しいという条件から定められる。

いまの場合、応力状態は x および y 軸に関して対称であるからエアリーの応力関数としては x および y の偶関数を含むものだけを取り、弾性床 I に対して

$$F_1(x, y) = \int_0^\infty (A_1 \cosh \alpha y + B_1 \alpha y \sinh \alpha y) \cos \alpha x d\alpha \quad \dots\dots\dots (4)$$

とする。

ただし A_1, B_1 は x, y に無関係な α だけの関数とする。この $F_1(x, y)$ は適合条件式 (1) を満たしている。

この応力関数が与える応力成分 σ_y, τ_{xy} は式 (2) を用いて次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= -\int_0^\infty \alpha^2 (A_1 \cosh \alpha y + B_1 \alpha y \sinh \alpha y) \cos \alpha x d\alpha \\ \tau_{xy} &= \int_0^\infty \alpha^2 \{A_1 \sinh \alpha y + B_1 (\sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha y)\} \sin \alpha x d\alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

これらが上の境界条件 (3) を満足するためには A_1, B_1 は次のようなものとなる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{4}{\pi \alpha^2} \frac{(\sinh \alpha h + \alpha h \cosh \alpha h) p(\alpha) + \alpha h \sinh \alpha h \cdot q(\alpha)}{\sinh 2\alpha h + 2\alpha h} \\ B_1 &= \frac{4}{\pi \alpha^2} \frac{\sinh \alpha h \cdot p(\alpha) + \cosh \alpha h \cdot q(\alpha)}{\sinh 2\alpha h + 2\alpha h} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

次に平面応力問題として、弾性床 I に生ずる変位を計算する。

一般に x 方向の変位を u, y 方向の変位を v とすれば応力とひずみの関係は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \partial u / \partial x = (\sigma_x - \nu \sigma_y) / E \\ \varepsilon_y &= \partial v / \partial y = (\sigma_y - \nu \sigma_x) / E \\ \gamma_{xy} &= (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) = 2(1 + \nu) \tau_{xy} / E \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

である。ただし E は縦弾性係数、 ν はポアソン比。

これらの式に $F_1(x, y)$ から得られる応力成分を入れて積分すれば弾性床 I に生ずる変位 u_1, v_1 が求められ、接触面すなわち、弾性床 I の直線境界の変位として次式を得る。

$$(u_1)_{y=h} = \frac{2}{\pi E_1} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \left[\left\{ -(1 + \nu_1) + \frac{2 \sinh 2\alpha h}{\sinh 2\alpha h + 2\alpha h} \right\} p(\alpha) + \frac{4 \cosh^2 \alpha h}{\sinh 2\alpha h + 2\alpha h} q(\alpha) \right] \sin \alpha x d\alpha \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$(v_1)_{y=h} = \frac{2}{\pi E_1} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \left[\frac{4 \sinh^2 \alpha h}{\sinh 2\alpha h + 2\alpha h} p(\alpha) + \left\{ -(1 + \nu_1) + \frac{2 \sinh 2\alpha h}{\sinh 2\alpha h + 2\alpha h} \right\} q(\alpha) \right] \cos \alpha x d\alpha \quad \dots\dots\dots (9)$$

次に無限長はり II について考える。

はり II に作用する圧縮荷重はその分布状態が与えられれば既知の関数 $a(\alpha)$ を含むフーリエ積分の形で表すこと

ができる。すなわち、荷重状態は $(2/\pi) \int_0^\infty a(\alpha) \cos \alpha x d\alpha$ という形で与えられるものとする。そうすれば無限長はりに対する境界条件は

$$\left. \begin{aligned} y=h \text{ の時 } \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p(\alpha) \cos \alpha x d\alpha, \quad \tau_{xy} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty q(\alpha) \sin \alpha x d\alpha \\ y=h+2b \text{ の時 } \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty a(\alpha) \cos \alpha x d\alpha, \quad \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

である。

この場合の応力状態は y 軸に関しては左右対称であるけれども、はりの上下面で荷重状態が異なるから、エアリーの応力関数としては x に関しては偶関数だけをとればよいけれども、 y 軸に関しては偶奇の両関数を含むものをとらなければならない。

いま $\eta = y - (h+b)$ という新変数 η を考えれば $y=h$ の時の境界条件は $\eta = -b$, $y=h+2b$ の時のそれは $\eta = b$ の場合に対するものとする。

適合条件(1)は $\partial\eta/\partial y = 1$ であるから y の代わりに η としてもよく、これを満たす応力関数として

$$F_2(x, y) = \int_0^\infty (A_2 \cosh \alpha\eta + B_2 \alpha\eta \sinh \alpha\eta + C_2 \sinh \alpha\eta + D_2 \alpha\eta \cosh \alpha\eta) \cos \alpha x d\alpha \dots\dots\dots (11)$$

をとり、これを式(2)に入れて σ_y, τ_{xy} を計算し、これらの応力成分が $y=h$ および $y=h+2b$, すなわち、 $\eta = -b$ および $\eta = +b$ における境界条件式(10)を満足させるためには A_2, B_2, C_2, D_2 について次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -\frac{2}{\pi\alpha^2} \frac{(\sinh ab + ab \cosh ab)\{a(\alpha) + p(\alpha)\} - ab \sinh ab \cdot q(\alpha)}{\sinh 2ab + 2ab} \\ B_2 &= \frac{2}{\pi\alpha^2} \frac{\sinh ab\{a(\alpha) + p(\alpha)\} - \cosh ab \cdot q(\alpha)}{\sinh 2ab + 2ab} \\ C_2 &= -\frac{2}{\pi\alpha^2} \frac{(\cosh ab + ab \sinh ab)\{a(\alpha) - p(\alpha)\} + ab \cosh ab \cdot q(\alpha)}{\sinh 2ab - 2ab} \\ D_2 &= \frac{2}{\pi\alpha^2} \frac{\cosh ab\{a(\alpha) - p(\alpha)\} + \sinh ab \cdot q(\alpha)}{\sinh 2ab - 2ab} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

次に、はり II に生ずる変位は応力関数 $F_2(x, y)$ から応力成分を計算し、それらを式(7)に入れて積分すれば求められることは弾性床の場合と同様であって、これに $\eta = -b$ を入れ式(12)を用いて整理すれば接触面におけるはり II の変位として、次式(13), (14)を得る。

$$(u_2)_{y=h} = \frac{2}{\pi E_2} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \left[-(1+\nu_2)p(\alpha) + \frac{2 \sinh 2ab \{ \sinh 2ab \cdot p(\alpha) - 2ab \cdot a(\alpha) \}}{\sinh^2 2ab - (2ab)^2} \right. \\ \left. - \frac{\sinh 4ab - 4ab}{\sinh^2 2ab - (2ab)^2} q(\alpha) \right] \sin \alpha x d\alpha \dots\dots\dots (13)$$

$$(v_2)_{y=h} = -\frac{4}{\pi E_2} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \left[\left\{ \frac{1}{2}(1+\nu_2) - \frac{\sinh^2 2ab}{\sinh^2 2ab - (2ab)^2} \right\} q(\alpha) \right. \\ \left. + \frac{(\sinh 2ab \cosh 2ab + 2ab)p(\alpha) - (\sinh 2ab + 2ab \cosh 2ab)a(\alpha)}{\sinh^2 2ab - (2ab)^2} \right] \cos \alpha x d\alpha \dots\dots\dots (14)$$

さて、弾性床 I と無限長はり II とは荷重をうけて変形した後も離れることなく、相対的すべりをも生じないとすれば、接触面における両者の変位は垂直、水平両方向とも、それぞれ相等しいはずである。すなわち、式(8)と式(13)、式(9)と式(14)とはそれぞれ x の値のいかんにかかわらず相等しい。ゆえに両者の被積分関数の内 x を含まない部分をそれぞれ等しいとおけば未知関数 $p(\alpha), q(\alpha)$ に関する2個の連立方程式が得られるから、これを解けば $p(\alpha), q(\alpha)$ が求められる。

いま $ab = \xi, h/b = \dot{h}$ とし、 $p(\alpha), q(\alpha), a(\alpha)$ の代わりに $p(\xi), q(\xi), a(\xi)$ と書けば

$$\Delta = \left[-(1+\nu) \left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right)^2 + 4(1+\nu) \left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right) \left\{ \frac{\sinh^2 2\xi}{\sinh^2 2\xi - (2\xi)^2} - \frac{E_2}{E_1} \frac{\sinh 2\dot{h}\xi}{\sinh 2\dot{h}\xi + 2\dot{h}\xi} \right\} \right. \\ \left. + \frac{4}{\sinh^2 2\xi - (2\xi)^2} \left\{ 1 + \frac{2E_2}{E_1} \frac{\sinh 2\xi \cosh 2(1+\dot{h})\xi + 2\xi}{\sinh 2\dot{h}\xi + 2\dot{h}\xi} \right\} \right] \dots\dots\dots (15)$$

$$\Delta_p = \frac{4}{\sinh^2 2\xi - (2\xi)^2} \left[(1+\nu) \left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right) \xi \sinh 2\xi + \cosh 2\xi \right. \\ \left. + \frac{E_2}{E_1} \frac{2\xi \{ \cosh 2(1+h)\xi + \cosh 2\xi \} + \sinh 2\xi (1 + \cosh 2h\xi)}{\sinh 2h\xi + 2h\xi} \right] \dots\dots\dots (16)$$

$$\Delta_q = -\frac{4}{\sinh^2 2\xi - (2\xi)^2} \left[(1+\nu) \left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right) \frac{\sinh 2\xi + 2\xi \cosh 2\xi}{2} - \sinh 2\xi \right. \\ \left. + \frac{E_2}{E_1} \frac{2\xi \{ \sinh 2(1+h)\xi - \sinh 2\xi \} + \sinh 2\xi \sinh 2h\xi}{\sinh 2h\xi + 2h\xi} \right] \dots\dots\dots (17)$$

とすれば

$$p(\xi) = (\Delta_p / \Delta) a(\xi), \quad q(\xi) = (\Delta_q / \Delta) a(\xi) \dots\dots\dots (18)$$

となる。したがって、接触圧力分布 $(\sigma_y)_{y=h}$ および摩擦力の分布 $(\tau_{xy})_{y=h}$ は

$$(\sigma_y)_{y=h} = \frac{2}{\pi b} \int_0^\infty p(\xi) \cos x\xi d\xi \dots\dots\dots (19)$$

$$(\tau_{xy})_{y=h} = \frac{2}{\pi b} \int_0^\infty q(\xi) \sin x\xi d\xi \dots\dots\dots (20)$$

を計算すれば求められる。ただし $x = x/b$, ポアソン比は材料によって大きな差がないから $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ とした。

ついで、無限長はり II の下辺に生ずる曲げ応力 $(\sigma_x)_{y=h}$ は、応力関数、式(11)より $\sigma_x + \sigma_y = (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2) F_2$ の関係から任意の点 x に生ずる $(\sigma_x + \sigma_y)_{y=h}$ が求められ、これからその点における $(\sigma_y)_{y=h}$ を差し引けば求められる。すなわち、次式を得る。

$$(\sigma_x)_{y=h} = -(\sigma_y)_{y=h} + \frac{4}{\pi b} \int_0^\infty \frac{1}{\sinh^2 2\xi - (2\xi)^2} \left\{ \sinh 2\xi \left(\sinh 2\xi \frac{\Delta_p}{\Delta} - 2\xi \right) \right. \\ \left. - (\cosh 2\xi \sinh 2\xi - 2\xi) \frac{\Delta_q}{\Delta} \right\} a(\xi) \cos x\xi d\xi \dots\dots\dots (21)$$

2.2 接触面で摩擦がないとした場合 この場合は、接触面で充分滑らかで弾性床 I と無限長はり II または II' との間に摩擦は働かないと仮定する。

弾性接触論の多くの問題で、このような仮定がなされることはしばしばであり、従来の材料力学的計算による“床係数”の弾性力学的検討(次節)は、この仮定の場合に相当する。

この場合における弾性床 I に対する境界条件は

$$y = h \text{ の時 } \sigma_y = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p(\alpha) \cos \alpha x d\alpha, \quad \tau_{xy} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

であり、無限長はり II に対する境界条件は

$$\left. \begin{aligned} y = h \text{ の時 } \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p(\alpha) \cos \alpha x d\alpha, \quad \tau_{xy} = 0 \\ y = h + 2b \text{ の時 } \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty a(\alpha) \cos \alpha x d\alpha, \quad \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

である。

これらの境界条件は、前節における弾性床 I および無限長はり II に対する境界条件式(3), (10)において、 $q(\alpha) = 0$ の場合に相当する。

したがって、弾性床 I の直線境界の変位は、前節の式(8), (9)において $q(\alpha) = 0$ とすれば求められ、次式によって示される。

$$(u_1)_{y=h} = \frac{2}{\pi E_1} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \left\{ -(1+\nu_1) + \frac{2 \sinh 2ah}{\sinh 2ah + 2ah} \right\} p(\alpha) \sin \alpha x d\alpha \dots\dots\dots (24)$$

$$(v_1)_{y=h} = \frac{8}{\pi E_1} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \frac{\sinh^2 ah}{\sinh 2ah + 2ah} p(\alpha) \cos \alpha x d\alpha \dots\dots\dots (25)$$

次に、無限長はり II に生ずる変位は、前節の式(13), (14)において $q(\alpha) = 0$ とし、次式にて示される。

$$(u_2)_{y=h} = \frac{2}{\pi E_2} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \left[-(1+\nu_2) p(\alpha) + \frac{2 \sinh 2ab \{ \sinh 2ab \cdot p(\alpha) - 2ab \cdot a(\alpha) \}}{\sinh^2 2ab - (2ab)^2} \right] \sin \alpha x d\alpha \dots\dots\dots (26)$$

$$(v_2)_{y=h} = -\frac{4}{\pi E_2} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \left[\frac{(\sinh 2ab \cosh 2ab + 2ab)p(\alpha) - (\sinh 2ab + 2ab \cosh 2ab)a(\alpha)}{\sinh^2 2ab - (2ab)^2} \right] \cos \alpha x d\alpha \quad (27)$$

さて、弾性床 I と無限長はり II とは荷重をうけて変形した後も離れないとすれば、接触面における両者の垂直方向の変位 $(v_1)_{y=h}$, $(v_2)_{y=h}$ は相等しいはずである。

ただし摩擦は無視したのであるから両者の相対的すべりは起こりうるわけであって、したがって、それぞれの水平方向の変位 $(u_1)_{y=h}$, $(u_2)_{y=h}$ は必ずしも同一ではない。

いま式(25)の $(v_1)_{y=h}$ と式(27)の $(v_2)_{y=h}$ とが x の値のいかんにかかわらず相等しいためには両者の被積分関数の内 x を含まない部分がそれぞれ相等しくなければならない。それより未知関数 $p(\alpha)$ が求められる。

いま $ab = \xi$, $h/b = \dot{h}$, $x/b = \dot{x}$ と書き、また $p(\alpha)$, $a(\alpha)$ の代りに $p(\xi)$, $a(\xi)$ と書けば

$$p(\xi) = \frac{\sinh 2\xi + 2\xi \cosh 2\xi}{\sinh 2\xi \cosh 2\xi + 2\xi + 2 \frac{E_2}{E_1} \frac{\sinh^2 \dot{h}\xi \{ \sinh^2 2\xi - (2\xi)^2 \}}{\sinh 2\dot{h}\xi + 2\dot{h}\xi}} a(\xi) \quad (28)$$

となる。この $p(\xi)$ を式(22)に入れば求める接触圧力分布は

$$(\sigma_y)_{y=h} = \frac{2}{\pi b} \int_0^\infty p(\xi) \cos \dot{x}\xi d\xi \quad (29)$$

を計算すれば求められる。

なお、直線境界、すなわち接触面の垂直方向の変位は式(28)の $p(\xi)$ を式(25)に入れば求められ、その結果は次式となる。

$$(v_1)_{y=h} = \frac{8}{\pi E_1} \int_0^\infty \frac{\psi(\dot{h}\xi)}{\xi} p(\xi) \cos \dot{x}\xi d\xi \quad (30)$$

ただし $\psi(\dot{h}\xi) = \sinh^2 \dot{h}\xi / (\sinh 2\dot{h}\xi + 2\dot{h}\xi)$

次に、無限長はり II に生ずる曲げ応力 $(\sigma_x)_{y=h}$ の算出には、 $\sigma_x + \sigma_y = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)F_2$ の関係式より、次式を得る。

$$(\sigma_x)_{y=h} = -(\sigma_y)_{y=h} + \frac{4}{\pi b} \int_0^\infty \frac{\sinh 2\xi \{ 1 - 4(E_2/E_1)\xi\psi(\dot{h}\xi) \}}{\sinh 2\xi \cosh 2\xi + 2\xi + 2(E_2/E_1)\{ \sinh^2 2\xi - (2\xi)^2 \}\psi(\dot{h}\xi)} a(\xi) \cos \dot{x}\xi d\xi \quad (31)$$

ただし $\psi(\dot{h}\xi) = \sinh^2 \dot{h}\xi / (\sinh 2\dot{h}\xi + 2\dot{h}\xi)$

ξ が大きければ式(31)の積分項が直接積分できるので、 ξ のある値 k を定め、 ξ がこれ以上になれば直接積分することとし、次式にて曲げ応力分布を求めた。

$$(\sigma_x)_{y=h} = -(\sigma_y)_{y=h} + \frac{4}{\pi b} \int_0^k \frac{\sinh 2\xi \{ 1 - 4(E_2/E_1)\xi\psi(\dot{h}\xi) \}}{\sinh 2\xi \cosh 2\xi + 2\xi + 2(E_2/E_1)\{ \sinh^2 2\xi - (2\xi)^2 \}\psi(\dot{h}\xi)} a(\xi) \cos \dot{x}\xi d\xi \\ + \frac{8}{\pi b} \frac{1}{1 + (E_2/E_1)} \int_k^\infty \left(1 - 2 \frac{E_2}{E_1} \xi \right) e^{-2\xi} a(\xi) \cos \dot{x}\xi d\xi \quad (32)$$

3. 数値計算例および考察

数値計算例として、集中荷重を受ける場合の接触圧力分布、無限長はりの下辺に生ずる曲げ応力の分布および接触面における摩擦力(せん断応力)の分布を示せば図2(a)~(c)、図3(a), (b)および図4(a), (b)のようである。

この時 $a(\xi) = -P/2$ であり、 $h/b = 1, 2, 5, 10$, 縦弾性係数比: E_2 (はり)/ E_1 (床) は 0.02, 0.5, 1, 2, 5, 10 の場合を計算した。

(1) 接触圧力の最大値 $(\sigma_y)_{\max}$ は図2(a)~(c)にみられるように集中荷重の直下に生じることはいうまでもないが、その大きさは弾性床 I の厚さが厚くなるにつれて減少する。これは弾性床の厚さが厚くなる

に伴って変形しやすくなるため無限長はり II に作用する荷重の集中性が分散されるためであって、逆にいえば厚さが小さくなれば相対的にはり II が変形しやすくなるために荷重が強く伝達されるからであるが、その割合はそれほど大きくない。しかし縦弾性係数比が 0.02 から 1, 2, 5, 10 へと大きくなるに伴って、その減少の割合が著しく大きくなること図2(a)~(c)にみられるとおりである。

接触面で摩擦がないとした場合には、図2(c)にて、破線で示したようになる。これによると縦弾性係数比が小さい 0.02 の場合には、圧力値に差があるが、その比が大きいく 5 および 10 ともなると、差が小さくなるとともにその差が逆の値となり接触圧力値が小さくなるという現象がわかった。

(a) $h/b=1$ (b) $h/b=5$ (c) $h/b=10$ 図2 接触応力 (σ_y) の分布

(2) 接触圧力分布の範囲は弾性床の厚さおよび縦弾性係数比によって異なるとともに接触面における相対すべりの有無によっても異なること図2(a)~(c)にみられるとおりである。

弾性床の厚さが、 $h/b=10$ [図2(c)参照] にして、摩擦なしの場合(破線で示す)には、縦弾性係数比が小さい0.02の時には、集中荷重の作用点からはりの高さの約1.4倍、 $E_2/E_1=1$ の時には、2倍程度離れたところでほとんど零となり、それより離れたところでははりの浮き上りの現象が生じることがわかった。したがって、隣接する集中荷重がある場合でもそれがはりの高さの4倍以上($E_2/E_1=1$ の時) 離れていれば接触圧力分布に影響を及ぼさないことを示している。また、隣接する集中荷重をはりの高さの約1.5倍離れた間隔で作用させれば接触圧力の分布はほぼ一樣になること

3 a) $h/b=2$

(a)

3 b) $h/b=10$

(b)

図3 無限長はりに生じる曲げ応力分布

がわかる。係数比が大きく10ともなると当然接触範囲は広がり、約8倍にもなる。

(3) 弾性床の厚さが無限長はりの高さの5倍程度となれば、接触圧力分布は弾性床を半無限とした場合とほとんど変わらないことがわかった。

(4) 無限長はりの下辺に生じる曲げ応力 (σ_x) の分布は図3(a), (b)にみられるように荷重直下において、縦弾性係数比がほぼ1以上の場合には引張応力の最大値を示すが、その比が小さい0.5から0.02ともなると逆に圧縮応力を示すようになることがわかった。これは相対すべりが無い場合には、変形しにくい弾性床側の拘束が作用するからであり、逆にすべりが自由な場合には、図3(b)において破線で示されるように E_2/E_1 の値にかかわらずすべて引張応力値を示し、相対すべりの有無による影響、相違が明らかになった。

図4 摩擦係数(せん断応力)の分布

(5) 摩擦係数：せん断応力 (τ_{xy})_{y=h} の分布は、図4(a), (b)に示されるように、荷重直下では零にして、それより離れるに伴って急激に増大し、はりの高さの約半分の位置において最大値を示し、それより急減するようになることがわかった。その最大値の大きさは、縦弾性係数比および弾性床の厚さによって変わり、それらの関係を図5に示す。

これによると接触面に生じるせん断応力の最大値は縦弾性係数比が小さくなるにつれて、なお、弾性床の厚さが大きくなるに伴って増大するが、 E_2/E_1 がほぼ0.5より小さくなると減少するようになる。 $E_2/E_1 \rightarrow 0$ 、すなわち、はりの縦弾性係数が小さいか、弾性床が剛体化する場合には、その値が $\{(\tau_{xy})_{\max}/P/\pi b\} = 0.3$ なる一定値に近づくことが解明された。

4. 材料力学的計算による “床係数”の検討

弾性床上にのせられた無限長はりに集中荷重が作用するときのはりのたわみ曲線は次式にて示されることは周知⁽¹⁾である。

$$y = \frac{P}{8\beta^3 E_2 I} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ = \frac{P\beta}{2k} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad \dots\dots\dots (33)$$

ここに $\beta = \sqrt{k/4E_2 I}$, k : 床係数, P : 集中荷重
 E_2 : はりの縦弾性係数

I : はりの断面二次モーメント

ところで、この関係式においては弾性床の力学的性質、すなわち、縦弾性係数および床の厚さについては、その取扱い上直接的には関係づけることができず、いわゆる“床係数” k に含まれた形式であるわけである。

そこで、本節では、2章にて求めた接触圧力の荷重

図5 摩擦係数の最大値と縦弾性係数比、床厚との関係

直下における値に基づいて、床係数 k とはりと弾性床の縦弾性係数比および弾性床の厚さとの関係について検討する。

さて、はりの荷重直下でのたわみは式(33)において $x=0$ とすれば

$$y_{x=0} = \frac{P}{8\beta^3 E_2 I} = \frac{P\beta}{2k} \quad \dots\dots\dots (34)$$

が得られる。この式を反力 $q = -ky$ に代入すれば、荷重直下における反力は

$$q_{x=0} = -ky_{x=0} = -\frac{P}{2}\beta = -\frac{P}{2}\sqrt{\frac{k}{4E_2 I}} \quad \dots\dots\dots (35)$$

となる。

ここで、反力 $q_{x=0}$ は2・2節で求めた接触圧力 $(\sigma_y)_{y=h, x=0}$ と等しいとすると式(29)において、 $x=0$ とし、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} q_{x=0} &= \frac{P}{2}\sqrt{\frac{k}{4E_2 I}} = (\sigma_y)_{y=h, x=0} \\ &= \frac{2}{\pi b} \int_0^\infty p(\xi) d\xi = -\frac{P}{\pi b} A(\xi) \quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

ただし

$$A(\xi) = \int_0^\infty \frac{\sinh 2\xi + 2\xi \cosh 2\xi}{\left[\sinh 2\xi \cosh 2\xi + 2\xi + 2\frac{E_2}{E_1} \right] \times \frac{\sinh^2 h\xi \{ \sinh^2 2\xi - (2\xi)^2 \}}{\sinh 2h\xi + 2h\xi}} d\xi$$

これより“床係数” k は次の関係式として表される。

$$k = \frac{64E_2 I}{\pi^4 b^4} \{A(\xi)\}^4 \quad \dots\dots\dots (37)$$

図6 床係数と弾性床の厚さ、縦弾性係数比の関係

すなわち、弾性床の力学的性質：縦弾性係数比および弾性床の厚さとの関係が数値的に示すことができ、その関係を求めると図6のようになる。

この図より、床係数は弾性床の厚さが大きくなるにつれて小さくなるが、その割合はそれほど大きくない。しかし縦弾性係数比が0.02から3へと大きくなるに伴っては、その減少の割合が著しく大きく、急減することがわかった。

本解析から算出した床係数に基づき、弾性床の厚さ： $h/b=2, 10$ および縦弾性係数比の種々の場合における反力 $(q/P/\pi b)$ の分布状態を求めるとともに前節2・2節にて算出した接触圧力分布 $(\sigma_y)_{y=h}$ (摩擦なし) との比較を示すと図7(a), (b)のようになる。

これによると、弾性床の厚さが薄い場合 ($h/b=2$) に

(a)

(b)

図7 接触応力分布と反力分布との比較

は、かなりよく一致した分布を示しているが、床が厚く、 $h/b=10$ (半無限に相当) にして、かつ縦弾性係数比が大きく 10 ともなると両者の分布状態に隔たりが生じるようになることが解明された [図 7 (b) 参照]。

5. 結 言

弾性床上にのせられた無限長はり集中荷重をうける場合の接触圧力分布およびその下辺に生ずる曲げ応力の分布が、弾性床の厚さ、両者の縦弾性係数の比および接触面における相対的すべりの有無によってどのように変わるかを二次元弾性接触問題として取扱って調べた結果ならびに従来の材料力学的計算による“床係数”の力学的特性を検討した結果を要約すると次のようになる。

(1) 接触圧力について

接触圧力の最大値は集中荷重の直下に生じることはもちろんであるが、その大きさは弾性床の厚さが大きくなるにつれて減少するが、その割合はそれほど大きくない。しかし縦弾性係数比が 0.02 から 1, 5, 10 と大きくなるに伴って、その減少の割合が著しく大きいことがわかった。

接触面で摩擦がないとした場合とあるとした場合とを比べると、縦弾性係数比が小さい 0.02 の時には、最大接触圧力は摩擦がないとした場合のほうが大きく、その差も大きい。が、 E_2/E_1 が大きく 5~10 ともなると圧力値が逆に小さくなるとともにその差も小さくなるという現象が生じるということがわかった。

接触圧力分布の範囲は、弾性床が厚く、縦弾性係数比が大きくなるにつれて広がる。弾性床が厚く ($h/b=10$)、摩擦なしの場合にて、 E_2/E_1 が小さい 0.02 の時には、荷重直下からはりの高さの約 1.4 倍、 $E_2/E_1=1$ においては、2 倍程度離れたところでほとんど零となり、それより離れるにつれてはりは浮き上りの現象が生じる。 E_2/E_1 が大きく 10 ともなると広くなり 8 倍ほどとなる。

弾性床の厚さがはりの高さの 5 倍程度となれば半無限床とみなされる。

(2) 無限長はりに生じる曲げ応力について

はりの荷重直下の下辺に生じる曲げ応力は、接触面に相対すべりが無い場合には、 E_2/E_1 がだいたい 1 以上においては引張応力の最大値を示すが、 E_2/E_1 が小さい 0.5 から 0.02 となると逆に圧縮応力値を示すことがわかった。摩擦がない場合には、 E_2/E_1 の値のいかんにかかわらず引張応力値を示し、相対すべりの有無による相違が明らかになった。

(3) 摩擦力：せん断応力の分布は、荷重直下では零にして、それより離れるに伴って急激に増大し、はりの高さの約半分の位置において最大値を示し、それより離れるにつれて急減するようになる。その最大値の大きさは、 E_2/E_1 が小さくなるにつれて、なお、弾性床が厚くなるに伴って増大する。しかし、弾性床の厚さがはりの高さ以上で、 E_2/E_1 がほぼ 0.5 より小さくなると減少し、 $E_2/E_1 \rightarrow 0$ 、すなわち、はりの縦弾性係数が小さいか、弾性床が剛体化する場合には、その値が $\{(\tau_{xy})_{\max}/P/\pi b\}=0.3$ なる一定値に近づくことがわかった。

(4) 床係数について

従来の材料力学的計算による床係数は弾性床が厚くなるにつれて小さくなるが、その割合はそれほど大きくない。しかし縦弾性係数比が大きくなるに伴って、その減少の割合が著しく大きく、急減する。

床係数に基づく反力の分布は弾性力学解析による接触圧力分布とかなりよく一致した分布を示すが、弾性床が厚く、かつ縦弾性係数比が大きく 10 ともなると両者の分布状態に隔りが大きくなるということが解明された。

文 献

- (1) 小野, 材料力学, 第 5 版, (昭 23), 88, 丸善.
Timoshenko, S. P., *Strength of Materials*, Part II, (1956), 1, D. Van Nostrand Company; Timoshenko, S. P. (鶴戸口・岡村訳), 材料力学, 中巻, (昭 37), 1, 東京図書.
Den Hartog, J. P., *Advanced Strength of Materials*, (1952), 141, McGraw-Hill Book Com; Den Hartog, J. P. (水野訳), 応用材料力学, (昭 46), 162, 養賢堂.
林, 材料力学, (昭 57), 66, 朝倉書店.
- (2) Biot, M. A., *J. Appl. Mech.*, (1937), A-1.
- (3) Coker and Filon, *Photoelasticity*, (1957), 436.