非連合流れ則に従う材料の非均一応力場における分岐挙動の解析*

Abdelmajid FATNASSI**, 冨田 佳 宏**, 進 藤 明 夫**

Bifurcation Behaviour of Non-Uniformly Stressed Solids
with the Non-Associated Flow Law

by Abdelmajid FATNASSI, Yoshihiro TOMITA, and Akio SHINDO

In order to establish a numerical procedure for predicting the bifurcation behaviour of a non-uniformly stressed body, the generalized version of Hill's theory of uniqueness and bifurcation to materials obeying the non-associated flow rule, proposed recently by Raniecki et al., is employed. To obtain an improved lower bound to the bifurcation point, the steepest descent method is introduced to optimize a parameter $\bar{\nu}$, which is introduced into the constitutive equation to establish a variational principle governing the bifurcation behaviour. The obtained results for pressure-sensitive and dilatant annular plates, subjected to uniform tension at the outer edge, show that the bifurcation is notably accelerated compared with that for plates obeying the associated flow rule. The effect of the pressure-sensitive yielding on the bifurcation behaviour is more remarkable than that of the dilatant plasticity. It is clarified that optimization of the parameter $\bar{\nu}$ is quite important in achieving considerable improvement of the lower bound of the bifurcation point.

Key Words: Plasticity, Non-Axisymmetric Bifurcation, Non-Associated Flow Law, Non-Uniform Deformation, Void Containing Materials

1. 結 言

通常延性材料が大きなひずみを受けると内部にクラックやボイドが発生し、それらが変形とともに成長することが知られている⁽¹⁾⁽²⁾。そのような材料のマクロな特性を表す構成式は一般に非連合である場合が多い⁽³⁾。またこのようなクラックやボイドの発生・成長が材料の最終強度と深く関係しているため、構成式の非連合性の最終強度に及ぼす影響は多くの研究者の注目を引いている。

非連合な構成式に支配される材料では、塑性ひずみ速度方向と降伏曲面に立てた法線方向が一致しなくなり、構成マトリックスの対称性が失われ、その結果、材料の最終強度と密接に関係していると考えられる、変形の分岐挙動を支配する Hill の変分原理⁽⁴⁾が成立しなくなる。最近、このような材料に対して、構成式に一つのパラメータ $\bar{\nu}$ を導入して構成マトリックスを対称にし変形の分岐を支配する変分原理を導出し、分岐点の下界を求める手法が提案されている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。ま

た、それによって均一な変形に対してパラメータ $\bar{\nu}$ を最適化し、最良の分岐点の下界が得られることが報告されている⁽⁷⁾。しかし、分岐前に変形が不均一な場合については解析手法も確立されておらず、したがって解析例も見られない。そこで、本研究では分岐前の応力状態が不均一な場合に対して最良の分岐点の下界を予測する手法を提案する。提案した手法を用いて、外周に一樣張力を受ける圧縮性圧力依存性材料からできた円輪板の非軸対称くびれ形分岐解析を行い、非連合流れ則の特徴を表すパラメータの分岐に及ぼす影響を検討する。また、Gurson⁽⁸⁾によって提案された近似降伏関数を用いて諸因子の分岐に与える影響を明らかにする。併せて、構成マトリックスに導入されたパラメータ $\bar{\nu}$ が場所によって変化する場合と一定値をとる場合の両者による分岐の下界値より、その改善性を検討する。

2. 基 礎 式

Rudnicki-Rice⁽⁹⁾によって一般化された非連合流れ則から導出された構成式を用いる。ただし、ここでは、Cauchy 応力の Jaumann 速度 $\overset{\Delta}{\sigma}_{ij}$ の代わりに、Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\overset{\Delta}{S}_{ij}$ を用いている。この場合、塑性ひずみ速度 $d\bar{\epsilon}_{ij}$ は次のように表される。

* 昭和 60 年 12 月 3 日 第 935 回講演会において講演、原稿受付 昭和 60 年 3 月 15 日。

** 正員、神戸大学大学院自然科学研究科 (〒657 神戸市灘区六甲台町)。

$$\left. \begin{aligned} d_{ij}^p &= P_{ij} Q_{kl} \bar{S}_{kl} / H \\ P_{ij} &= \sqrt{3} \sigma'_{ij} / (2\sigma_e) + \beta \delta_{ij} / 3 \\ Q_{ij} &= \sqrt{3} \sigma'_{ij} / (2\sigma_e) + \mu \delta_{ij} / 3 \\ H &= (1 + \beta / \sqrt{3})(1 + \mu / \sqrt{3}) \{E_t E / [3(E - E_t)]\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 σ'_{ij} , σ_e , E はそれぞれ偏差応力, 相当応力, ヤング率であり, E_t は単軸応力状態での応力ひずみ曲線の接線係数である。 β は塑性膨張率を, μ は降伏の圧力依存性の測度を表す。 P_{ij} は塑性ひずみ速度の方向を, Q_{ij} は降伏曲面の外向き法線方向を表しており, $\beta = \mu$ の場合にのみ $P_{ij} = Q_{ij}$ となって, 法線則が成立する。

大変形を受ける弾塑性材料に対して上記の塑性ひずみ速度に, Hooke の法則から導出される弾性ひずみ速度 d_{ij}^e を加え合せると Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\bar{S}_{ij}$ とひずみ速度 d_{ij} の間の線形関係によって表される構成式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_{ij} &= D_{ijkl} d_{kl} \\ \bar{S}_{ij} &= \dot{S}_{ij} + F_{ijkl} d_{kl} \\ D_{ijkl} &= D_{ijkl}^e - (\alpha / G) p_{ij} q_{kl} \\ p_{ij} &= D_{ijkl}^e P_{kl}; \quad q_{ij} = D_{ijkl}^e Q_{kl} \\ G &= H + P_{ij} D_{ijkl}^e Q_{kl} \\ d_{ij} &= (v_{i,j} + v_{j,i}) / 2 \\ F_{ijkl} &= (\sigma_{ij} \delta_{kl} + \sigma_{kl} \delta_{ij} + \sigma_{li} \delta_{kj} + \sigma_{kj} \delta_{li}) / 2 \\ \alpha &= 0: \text{除荷, 弾性変形}; \quad \alpha = 1: \text{負荷, 塑性変形} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで, D_{ijkl}^e は弾性構成マトリックスを表す。 $(\cdot)_{,i}$ は $(\cdot)$ の変形状態の物体点の座標 x_i による偏微分で, $(\cdot)$ は $(\cdot)$ の物質導関数である。 $\beta \neq \mu$ の場合に D_{ijkl} は ij と kl に対する対称性がなくなること注目したい。

変形が十分小さいところにおいて, 弾塑性境界値問題の解析に対してよく用いられている仮想仕事の原理⁽⁴⁾⁽¹⁰⁾によって唯一の解を求めることができ, これを基本解と呼ぶ。変形が進行し, ある限界に達するとその解の唯一性が破れ, 基本解から別の解への分岐が可能になり, この限界を分岐点と呼ぶ。連合流れ則から導出された構成式に支配される材料ではこの分岐点は Hill の弾塑性体に対する解の唯一性と分岐に対する一般定理⁽⁴⁾によって求めることができる。しかしながら, 非連合な構成式に支配される材料では, 式(1)のパラメータが $\beta \neq \mu$ となり構成マトリックスの対称性は失われ, Hill の定理が適用できなくなる。これを打開するために, Raniecki-Bruhns⁽⁶⁾は分岐挙動の解析に対して正值パラメータ $\bar{r}$ を導入することにより構

成マトリックス D_{ijkl} に対称性をもたせた。

$$\left. \begin{aligned} D_{ijkl} &= D_{ijkl}^e - (\alpha / G) p_{ij} q_{kl} \\ p_{ij} &= (D_{ijkl}^e P_{kl} + \bar{r} D_{ijkl}^e Q_{kl}) \\ q_{ij} &= (D_{ijkl}^e P_{kl} + \bar{r} D_{ijkl}^e Q_{kl}) \\ G &= 4 \bar{r} (H + P_{ij} D_{ijkl}^e Q_{kl}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

このような構成式で規定されるような仮想固体をも一つの比較体 (alternative comparison solid) と呼んでいる。構成マトリックスの対称性が満たされることからこのような仮想固体に対して, 変形の分岐点は Hill の解の唯一性と分岐に対する一般定理と同形の定理によって求めることができる。いま, 基本解とも一つの解との差に $*$ を付けて表示すると変分形式で表される固有値問題⁽⁶⁾

$$\delta I = 0$$

$$I = \int_V (\dot{S}_{ij} + \sigma_{mj} v_{i,m}^*) v_{i,j}^* dv \dots\dots\dots (4)$$

が非自明解を有するとき, 分岐が起こることになる。このようにして, 得られた分岐点は元の材料に対する分岐点の下界を表す。構成式に導入されたパラメータ $\bar{r}$ に適当な値を与えることによって最良の分岐点の下界を求めることができることが証明されている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。また, 一様な変形からの分岐に対して, 最良の分岐点の下界を与えるパラメータ $\bar{r}$ の値を求められるが, 分岐前の変形が不均一なとき, 最良の分岐点の下界を与えるパラメータ $\bar{r}$ を求める手法は未知である。変形が不均一な場合, $\bar{r}$ は場所によって変化することが考えられるので式(4)が非自明解を有する点の発生を遅らせるように $\bar{r}$ を最適化することにより最良の分岐点の下界を求める。なお, 式(4)で $\bar{r} = 1$, $P_{ij} = Q_{ij}$ のときは連合流れ則に対応した Hill の変分原理⁽⁴⁾に帰着する。

3. 問題の定式化

本研究では, 図1に示す外周に一様張力を受ける初期半径 a_0 , 外半径 b_0 , 板厚 t_0 の円輪板の非軸対称くびれ形分岐解析を平面応力条件のもとで行う。

分岐が発生するまで変形は軸対称であるので半径方向変位速度 v_r のみ非零となる。したがって, 分岐以前の軸対称基本解は仮想仕事の原理式⁽¹⁰⁾を半径方向に有限要素近似⁽¹¹⁾することにより求められる。

次に分岐解析を行う。分岐を θ 方向に変化するいわゆる非軸対称分岐に限定し, 式(4)の可容速度 v_i^* を Fourier 級数によって次のように表す⁽¹²⁾。

$$\underline{v}^* = \begin{Bmatrix} v_r^* \\ v_\theta^* \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} v_{r,m}^*(r) \cos m\theta \\ v_{\theta,m}^*(r) \sin m\theta \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

ここで $v_{i,m}^*$ はモード振幅を表し, r のみ関数で, m

はモード番号である。可容速度 v^* による非零ひずみ速度 $\dot{d}^*$ および変位速度こう配 $\dot{g}^*$ は次のようである。

$$\begin{aligned} \dot{d}^* &= \begin{Bmatrix} \dot{d}_{rr}^* \\ \dot{d}_{\theta\theta}^* \\ 2\dot{d}_{r\theta}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial v_r^* / \partial r \\ (\partial v_\theta^* / \partial \theta + v_r^*) / r \\ (\partial v_r^* / \partial \theta - v_\theta^*) / r + \partial v_\theta^* / \partial r \end{Bmatrix} \\ \dot{g}^* &= \begin{Bmatrix} v_{r,r}^* \\ v_{\theta,\theta}^* \\ v_{\theta,r}^* \\ v_{r,\theta}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial v_r^* / \partial r \\ (\partial v_\theta^* / \partial \theta + v_r^*) / r \\ \partial v_\theta^* / \partial r \\ (\partial v_r^* / \partial \theta - v_\theta^*) / r \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(5), (6)を式(4)に代入して, 三角関数の直交性を考慮して, 式(4)の周方向の積分を行うとはん関数 I はモードごとに完全に分離され⁽¹²⁾⁽¹³⁾, 次のように書ける。

$$\begin{aligned} I &= \int_v [\dot{d}^{*T} (\underline{D} - \underline{F}) \dot{d}^* + \dot{g}^{*T} \underline{Q} \dot{g}^*] dv \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} I_m \\ I_m &= v_m^{*T} \left\{ \pi \int_r [B_m^T (\underline{D} - \underline{F}) B_m \right. \\ &\quad \left. + A_m^T \underline{Q} A_m] r dr \right\} v_m^* \\ v_m^{*T} &= (v_{rm}^* v_{\theta m}^* v_{rm,r}^* v_{\theta m,\theta}^*) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで, $\underline{D}$ は構成マトリックス D_{ijkl} , $\underline{F}$, $\underline{Q}$ は現変形状態の応力 σ_{ij} を成分とするマトリックスである。

分岐はん関数式(7)の v_m^* を有限要素近似し, 有限要素の節点におけるモード振幅値による停留条件を求めるとそれらを支配する同次方程式が得られる。この同次方程式が非零の解を有するかどうかを調べることによって分岐が発生するかどうかを知ることができる。言い換えれば, 上述の同次方程式の係数マトリックスの行列式が

$$\det[K_m(\bar{r})] = f(\bar{r}) = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

になるところを調べることになる。しかし, 剛性マトリックスはパラメータ $\bar{r}$ の関数であるのでどのように最良の分岐点の下界を求めるかという問題が残る。式(8)の行列式の値は分岐点まで正であることに注目すると, その行列式が最大になるように $\bar{r}$ の値を決定すると分岐の発生を遅らせることができることが分かる。ここでは, $\bar{r}$ は正值であるので, $\bar{r} = \xi^2$ と置き, 塑性変形域内の有限要素積分点における ξ による行列式の最大化が最急降下法⁽¹⁴⁾を用いて行われた。基本解を求める各ステップで最急降下法を用いて, 求められたパラメータ $\bar{r}$ の値を式(8)の行列式に導入し, それが零かどうかを調べることによって最良の分岐点の下界を求めることができる。

4. 計算結果

前述の方法を図1に示す問題に適用し, 非軸対称くびれ形分岐挙動に及ぼす非連合流れ則を特徴づける二つのパラメータ β および μ の影響を調べる。実質部の真の応力-ひずみ関係と材料定数は次式で表されるものを用いた。

$$\varepsilon/\varepsilon_y = \begin{cases} \sigma/\sigma_y; & \sigma < \sigma_y \\ (\sigma/\sigma_y)^n; & \sigma \geq \sigma_y \end{cases} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$E = 205.08 \text{ GPa} \quad \nu = 1/3$$

ここで, σ_y は降伏応力で, n は硬化パラメータである。なお, 解析は先に導入したパラメータ $\bar{r}$ が場所によって変化する場合を $\bar{r}$, 全領域にわたって一定値をとる場合を $\bar{r}$ によって表すことにする。それらの最適値を $\bar{r}_{opt}$, $\bar{r}_{opt}$ と表す。以下図2~7は $\bar{r}_{opt}$ に対する結果である。図2は内外半径比 $R_0 = 0.1, 0.4$ および 0.6 の場合についてパラメータを変化させた場合の分岐が発生したときの限界外径変位を示している。限界変位は R_0 の影響を強く受けており, R_0 が大きくなるとともに増加することが分かる。 R_0 およびパラメータ β の値にかかわらず, すべての曲線は $\beta = \mu$ において極値をもつようである。 β と μ の差が増加することによって限界変位は小さくなっている。その減少率は μ が大きくなると β の値により強く依存するようになる。一般にパラメータ μ の値はパラメータ β の値より大きい⁽¹⁵⁾ので, 図2より非連合性は変形をより不安定化させる傾向にあることが分かる。 $\beta = \mu$ の場合, 得られた下界値は Hill の変分限理より求めたものに一致している。 $\beta = \mu = 0$, すなわち, 流れ則の場合に相当する限界分岐点は (×) で示している。一方, 限界分岐モードはほとんど構成式に無関係であり, これ

図1 解析モデルと記号

らは連合流れ則の場合に対して得られているモードと同じものになった。

図3は $\beta=0.020$, $R_0=0.1, 0.4, 0.6$ の場合の半径方向の $\bar{r}_{opt}$ の分布を示している。 $\bar{r}_{opt}$ は場所に強く依存しており、分布のパターンは μ と R_0 に非常に敏感であることが分かる。さらに、半径方向の分岐モードの振幅の分布パターン⁽¹⁹⁾と $\bar{r}_{opt}$ の分布パターンとが類似していることに注目したい。 $\beta=\mu$ の場合は法線則が成立し、 $\bar{r}_{opt}$ は一定値、 $\bar{r}_{opt}=1$, となっている。これよりも μ が小さくても、大きくても非連合となる。 $\bar{r}_{opt}$ の分布は $\beta>\mu$ か $\beta<\mu$ により形が違ふ点は興味深い。

これまでの計算では、二つのパラメータ β と μ が一定値としたが、通常、それらは変形とともに変化すると考えられる。そこで β と μ が変形とともに変化し、それが分岐に及ぼす影響を調べるために、ポイドを含む材料に対してGurson⁽⁸⁾によって提案され、Tvergaard⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾によって修正された近似降伏関数によってその特性が表される材料を考える。この場合、降伏関数は次の形となる。

$$\left. \begin{aligned} \phi(\sigma_e, \sigma_t, f) &= 3\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}/2\sigma_t^2 + \\ & 2fq_1 \cosh(q_2\sigma'/2\sigma_t) - (1+q_3f^2) = 0 \\ \sigma &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ q_1 &= q_2 = q_3 = 1 \quad (\text{Gurson}) \\ q_1 &= 1.5; q_2 = 1; q_3 = q_1^2 \quad (\text{Tvergaard}) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

上式で σ_t は実質部の相当応力で、 f は現時点のポイド率である。塑性変形が進行している間、ポイド率の

変化は最大応力によって支配され、次式で与えられるものとする⁽¹⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} \dot{f} &= (1-f)\delta_{ij}d_{ij}^p + A\dot{\sigma}_t + B\dot{\sigma}/3 \\ A &= B = f_N \exp[-\{(\sigma_t + \sigma/3 - \sigma_N)/s\}^2 / (s\sqrt{2\pi})] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(11)右辺第1項は現存するポイドの生長による f の変化であり、残りの項はポイドの発生による変化を表している。 f_N はポイドを発生する粒子の体積比、 σ_N はポイドを発生する平均相当応力、 s は標準偏差であ

図2 パラメータ μ と限界変位の関係

図3 半径方向 r に沿った $\bar{r}_{opt}$ の分布

る。巨視的塑性ひずみ速度の法線性と適合性の条件⁽⁸⁾により、塑性ひずみ速度は式(1)と同形で表すことができる。ただし、この場合、 β と μ は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \sqrt{3} q_1 q_2 f \sinh(\Sigma) / 2\sqrt{\omega} \\ \mu &= \beta + \sigma_t (\cosh(\Sigma) q_1 - q_3 f) B / \sqrt{3} \sqrt{\omega} \\ \omega &= 1 + q_3 f^2 - 2f q_1 \cosh(\Sigma); \Sigma = q_2 \sigma / 2\sigma_t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

B が零のとき、パラメータ μ は β に等しくなり、塑性ひずみ速度の法線性と、式(3)の対称性が成立することになる。

ボイド材料において、二つのパラメータ β と μ は変形によって変化する。図4に外周変位と内周上の f 、 μ 、 β の値、および張力 $T/(2t_0 b_0 \pi \sigma_y)$ の値の関係を示す。なお、この計算には式(11)中のパラメータとして文献(18)における $f_N=0.04$ 、 $\sigma_N=2.16\sigma_y$ 、 $s=0.4\sigma_y$ を用いた。図4中(●)は限界分岐点を表している。図4に示されたパラメータ μ と β の変化状況より常に $\mu > \beta$ なる関係が成立していることがわかる。これより変形とともに構成式の非連合性が増加していると考えられる。

図5は分岐点での r 方向に沿った最適化されたパラメータ $\bar{r}$ の分布を示している。分布のパターンは図3で $\mu > \beta$ の場合のパターンに類似している。また、そのパターンは降伏応力と硬化パラメータにあまり影響されないことが分かる。

図4 β , μ , f , T と外周変位の関係

図6は硬化パラメータ n の限界変位に及ぼす影響を示している。これより、硬化パラメータが大きくなるにつれて R_0 にかかわらず硬化パラメータの限界変位に与える影響が少なくなっていることが分かる。

図7は降伏応力の限界変位に及ぼす影響を示している。図7より、降伏応力の小さい値の範囲にわたってわずかな影響が見られるが全般的に降伏応力の限界変位に及ぼす影響は少ないと言える。

以上の計算はいずれもパラメータ $\bar{r}$ を場所によって変化する変数とした場合であるが、次に $\bar{r}$ を全領域にわたって一定 $\bar{r}$ とみなした場合についての最適値 $\bar{r}_{opt}$ を求め、得られた結果と前述の結果とを比較す

図5 半径方向 r に沿った $\bar{r}_{opt}$ の分布 (Gurson 形構成式を用いた場合)

図6 硬化パラメータ n と限界変位の関係

ることによって下界の改善度の検討を行う。

図8に $R_0=0.1, 0.4, 0.6$ とした場合の分岐点における外周変位 $\bar{u}$ との関係を示す。これより、限界変位は $\bar{r}$ の値に非常に強く依存し、最適化による改善は極めて大きいことを表している。また、降伏応力や R_0 の値にかかわらず、 $\bar{r}$ の値と対応する限界変位のパターンはほぼ同じで、 $\bar{r}$ が 0.95 から 1 の間に最適値 $\bar{r}_{opt}$ が存在している。 $\bar{r}_{opt}$ に対する限界変位と $\bar{r}_{opt}$ に対する限界変位を定量的に比較するために、いくつかの降伏応力と硬化パラメータおよび R_0 について得られた限界変位値を表1, 2に示す。これらの結果に関するかぎり、 $\bar{r}_{opt}$ に対する限界変位は $\bar{r}_{opt}$ の場合より小さく、まだ下界の改善の余地はあることを示している。その改善度は最大7%程度である。以上より、 $\bar{r}_{opt}$ を求めることにより大幅な限界変位の下界値の改善が

期待できること、および $\bar{r}_{opt}$ による結果と $\bar{r}_{opt}$ による結果の差は小さいことより実用計算に対して $\bar{r}_{opt}$ による計算が有用であると考えられる。

5. 結 言

非連合流れ則に従う弾塑性材料の非均一応力下における分岐挙動の解析を可能にする数値解析手法を提案した。提案した手法を外周に一樣張力を受ける円輪板の分岐挙動の解析に適用し、分岐解析で構成マトリックスを対称にするために導入したパラメータ $\bar{r}$ を最適化することによって元の材料の構成式の非連合性、円輪板の寸法、材料特性の分岐に及ぼす影響を明らかにした。

得られた結果によると、 $\bar{r}$ 最適化によって分岐点の下界の大幅な改善ができること、分岐点において、円

表1 硬化パラメータと限界変位値 ($\bar{r}_{opt}$, $\bar{r}_{opt}$ による結果の比較)

$\sigma_y/E=0.0007$	$R_0=0.1$		$R_0=0.4$		$R_0=0.6$	
	$\bar{r}_{opt}$	$\bar{r}_{opt}$	$\bar{r}_{opt}$	$\bar{r}_{opt}$	$\bar{r}_{opt}$	$\bar{r}_{opt}$
n						
16	0.226300	0.225700	0.460790	0.456289	0.581770	0.577833
24	0.158974	0.158198	0.317830	0.313652	0.404121	0.402610
32	0.124906	0.121040	0.241698	0.234479	0.307734	0.300547

表2 降伏応力と限界変位値 ($\bar{r}_{opt}$, $\bar{r}_{opt}$ による結果の比較)

$n=8$	$R_0=0.1$		$R_0=0.4$		$R_0=0.6$	
	$\bar{r}_{opt}$	$\bar{r}_{opt}$	$\bar{r}_{opt}$	$\bar{r}_{opt}$	$\bar{r}_{opt}$	$\bar{r}_{opt}$
$\sigma_y/E \cdot 10^{-3}$						
0.095	0.370634	0.366180	0.781791	0.777930	0.869410	0.862150
0.190	0.344327	0.340012	0.694273	0.690140	0.826310	0.821257
0.381	0.356676	0.351280	0.721154	0.718314	0.886870	0.880312
0.571	0.376972	0.371342	0.766415	0.761301	0.949162	0.945050
0.719	0.388096	0.382001	0.798930	0.792900	0.980720	0.976210

図7 降伏応力と限界変位の関係

図8 $\bar{r}$ と限界変位の関係

輪板の半径方向に変化するパラメータ $\bar{F}$ の最適分布パターン $\bar{F}_{opt}$ は、半径方向の分岐モード振幅に強く依存していることが明らかとなった。分岐の発生は塑性膨張率よりも圧力感度係数により敏感であり、圧力感度係数が増加すると、分岐が著しく早く発生する。降伏応力は全般的に分岐に影響を与えないこと、および硬化が大のとき硬化率の変化は分岐に大きく影響を及ぼすがそれが小さくなるとその影響が減少することが分かった。 $\bar{F}_{opt}$ を用いた場合と全領域にわたって一定値をとる $\bar{F}_{opt}$ を用いた場合の結果の比較により、前者の予測は後者の予測よりも最大7%程度改善されていることが分かった。これより、 $\bar{F}_{opt}$ を用いると $\bar{F}_{opt}$ を用いた場合とほぼ同程度の近似が得られるので、演算時間を短縮するために、実用解析では $\bar{F}_{opt}$ を用いてもさしつかえないであろう。

文 献

- (1) McClintock, F. A., *J. Appl. Mech.*, 35-2 (1968), 363.
- (2) Hancock, J. W. and Mackenzie, A. C., *J. Mech. Phys. Solids*, 24-213 (1976), 147.
- (3) Mroz, Z., *Arch. Mech. Stosow.*, 18-1 (1966), 1.

- (4) Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, 6-3 (1958), 236.
- (5) Raniecki, B., *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Tech.*, 27-819 (1979), 721.
- (6) Raniecki, B. and Bruhns, O. T., *J. Mech. Phys. Solids*, 29-2 (1981), 153.
- (7) Kleiber, M., *Int. J. Solids Struct.*, 20-3 (1984), 191.
- (8) Gurson, A. L., *J. Eng. Mater. Tech.*, 99-1 (1977), 2.
- (9) Rudnicki, J. W. and Rice, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, 23-6 (1975), 371.
- (10) 北川・富田, 材料, 29-322 (昭55), 663.
- (11) Kitagawa, H. and Tomita, Y., *Theoretical and applied mechanics*, 21 (1973), 243, University of Tokyo Press.
- (12) Tomita, Y., Shindo, A. and Kitagawa, H., *Int. J. Mech. Sci.*, 32-12 (1981), 723.
- (13) Fatnassi, A., Tomita, Y. and Shindo, A., *Proc. 3rd Int. Symp. Numer. Mech. Eng.*, (1983), 505.
- (14) Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C., (川井, 戸川 監訳) 最適構造設計, (昭52), 11, 培風館.
- (15) Needleman, A. and Rice, J. R. (Ed. Koistinen, P. P. and Wang, N. W.), *Mechanics of sheet metal forming*, (1978), 237, Plenum Press.
- (16) Tvergaard, V., *Int. J. Fract.*, 17-4 (1981), 389.
- (17) Tvergaard, V., *Int. J. Fract.*, 18-4 (1982), 237.
- (18) Tvergaard, V., *J. Mech. Phys. Solids*, 30-6 (1982), 399.
- (19) Fatnassi, A., Master thesis, (昭57), 神戸大学大学院工学研究科.

討 論

〔質問〕 井上 達雄〔京都大学工学部〕

Raniecki らによって提唱されたパラメータ $\bar{F}$ を用いた構成関係を用いて、円輪板の分岐解析が行われたことに敬伏する。次の点についてご教示願いたい。

(1) $\bar{F}$ によって構成マトリックスが対称になることは形式的に了解できるが、 $\bar{F}$ は物理的にどのような意味をもつものか。

(2) 円輪板の分岐の解析結果をグラフに示しておられるが、幾何学的にどのような形の分岐が生じるか簡単にご説明いただきたい。

(3) ボイドを含む材料の解析をされているが、具体的にはどのような材料、条件への応用を想定しておられるのか。

〔回答〕 (1) もともと $\bar{F}$ は構成マトリックスを対称にし分岐の発生限界を変分方程式によって表示するために導入されたパラメータで、その物理的解釈は大変困難である。ただ一様変形からの分岐の場合、その最適値は本文の記号を用いて次のように表すことができる⁽⁵⁾。

$$\bar{F}_{opt} = \sqrt{\frac{P_{ij} D_{ijkl}^* P_{kl}}{Q_{mn} D_{mnpq}^* Q_{pq}}}$$

これより $\bar{F}$ の物理的な意味を強いて考えるならば、

最適化されたパラメータ $\bar{F}_{opt}$ は弾性テンソルをメトリックとして得られる降伏曲面に立てた法線ベクトルとひずみ速度方向ベクトルのノルムの比とみなすことができる。

(2) 面内変形を考えているので、図1の円周方向に周期的な板厚変化を発生させるモードとなる。具体的なモード形については文献(付1)を参照していただきたい。

(3) ここでは式(1)でその特性が表される材料に対して、改良された分岐点の下界値を求める手段の提案を主目的としており特に具体的な材料および問題は想定していないが、本手法はいわゆる分岐が発生してすぐに崩壊に結び付くような場合に対して分岐点を求めることにより比較的簡単に限界状態を知ることができるので土とか岩などの不安定発生の研究にも応用できるものと考えている。

〔質問〕 北川 浩〔大阪大学工学部〕

興味深く拝読させていただいた。

(1) 本研究で論じられた分岐点(限界変位)は、対称化された、いわば別の問題に対するものであるか

- (付1) 富田・ほか2名, 第9回NCP研究会懇話会シンポジウム論文集, (昭60-11), I-7~I-13.

ら、最適値といえども正解にいくらでも近づく性質のものではないように思われる。そこで、示された解が正解に対してどの程度のもので評価されるのか、また、例えば上限界を求めるなど、それを評価する方法についてお考えがありましたら、ご教示願いたい。

(2) 図4から限界点での μ, β を求めるとほぼ0.04, 0.01程度で R_0 の影響をあまり受けていないように思われる。ところが限界点は $R_0=0.1$ の場合には最高荷重以前になっていて非連合性の影響が大きく出ており、一方、図2の場合、対応する μ, β 値のあたりでは、 R_0 が大きくなる程非連合性の影響が大きいと読取れる。このくい違いはなにによるものか。

〔回答〕 (1) 本研究は分岐点の下界値を改良する一手法を提案することに主眼を置いたために提案した手法による下界値の相対的な改良度についてのみ検討した。下界値の絶対的な精度を評価するために必要な分岐点の上界値は式(2)で $\alpha=1$ とした材料、第2の比較体、に対して固有値問題を定式化し、それが非

自明解を有するところとして求めることができる⁽⁶⁾。本論文で扱った問題では、この上界値は、平面応力下での二次元解析をした場合、 $\alpha=1$ としたときの剛性マトリックスの行列式が零となるところに対応する。著者らの別の研究によると(付1)、本研究で F_{opt} として求めた下界とこのようにして求めた上界の差は最大5%であった。この値は問題によって変化するものと思われるが、本問題に関する限り、提案した手法によって二次元解析をすることなく真の分岐点を5%以内の誤差で評価できると考える。

(2) ご討論にあるように図4に示した特定の場所において分岐が発生したときの μ と β の値は R_0 によらずほぼ一定値となっているが、半径方向には異なった分布となる。特に $R_0=0.1$ では穴の近くで大きな変化をする。しかしながら、図2では μ と β を一定としているのでその差が出たものと考ええる。ただ分岐が発生する変位を見ると、図2と4でその値に大差なく同じ傾向にあるといえよう。