境界要素法によるシェブロン切欠試験片の応力拡大係数の解析*

三 好 俊 郎**, 海老原 理徳***, 平 井 千 秋****

Analysis of Stress Intensity Factors for Chevron Notched Specimens by the Boundary Element Method

by Toshiro MIYOSHI, Yoshinori EBIHARA, and Chiaki HIRAI

We analysed stress intensity factors for chevron notched bend specimens using the three dimensional boundary element method and compared this results with another ones analysed using Bluhm's slice model. Stress intensity factors were evaluated in two ways as the functions of crack length; one is maximum values at the crack end and the other is average values by the energy method. Both average stress intensity factors evaluated by BEM and the slice model show good agreements. On the other hand, the maximum stress intensity factor is about 9 % higher than the average stress intensity factor at each minimum value. The distributions of stress intensity factors along the crack front were also evaluated for several crack lengths.

Key Words: Fracture, Stress Intensity Factor, Chevron Notched Specimen, Bend Bar Specimen, Boundary Element Method

1. 緒 言

近年, セラミックスの破壊じん性の測定にシェブロン切欠試験片が注目されている。この方法は, 予き裂の加工とき裂長さの測定を要せずに破壊じん性の測定が可能なことに特徴がある。シェブロン切欠試験片においては, 破壊じん性は破壊抵抗が一定であることを仮定すれば, き裂長さの関数として表した応力拡大係数の補正係数の最小値と最大荷重から求められる。

シェブロン切欠試験片の応力拡大係数の解析は, CT 試験片については, 三次元有限要素法⁽¹⁾⁽²⁾, 三次元境界要素法⁽²⁾⁽³⁾, Bluhm のスライスモデルによる方法⁽⁴⁾などにより解析されている。四点曲げ試験あるいは三点曲げ試験については, Bluhm のスライスモデルあるいはこれを修正した方法による解析⁽⁵⁾⁻⁽⁷⁾が見られるのみで, 三次元有限要素法, 境界要素法による解析はまだ見当たらない。また, 曲げ試験に関してき裂前縁に沿った応力拡大係数の分布に関する解析も見られない。

本論文においては, 境界要素法を用いて四点曲げシェブロン切欠試験片の応力拡大係数をき裂長さの関数として評価し, Bluhm のスライスモデルによる結果と比較, 検討した。さらに, き裂前縁に沿った応力拡大係数の分布も求めた。

2. 三次元境界要素法による解析

2.1 三次元境界要素法解析 三次元境界要素法は, 物体表面を要素分割し, 各要素内で基本解を数値積分することにより, 変位と表面力を未知数とする連立 1 次方程式を解くことに帰着する。

本論文では, 6 節点三角形アイソパラメトリック要素, 8 節点四角形アイソパラメトリック要素, 9 節点四角形ラグランジェ要素を使用した。三角形要素には Hammer の 7 点積分公式を用い, 四角形要素についてはガウスの 6 点積分により面内 36 の積分点を設け, 数値積分を行っている。

き裂近傍では, き裂先端からの距離 r に関して, 変位および応力はそれぞれ $\sqrt{r}$, $1/\sqrt{r}$ の特性を持つ。この特性を評価するために応力形, 変位形の特異要素を用いた。変位形特異要素では, き裂先端から 1/4 の点に中間節点をずらすことにより変位の特性を評価できる。応力形特異要素では, 形状関数に, 次の補正関

* 昭和 61 年 4 月 1 日 第 63 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 60 年 9 月 25 日。

** 正員, 東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)。

*** 正員, 東京大学大学院。

**** 学生員, 東京大学大学院。

数を乗じることにより応力の特異性を持たせるとともに、周囲の要素との連続性を保つことができる⁽⁸⁾。

$$\kappa(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ 1 - \frac{r}{L} (1 - \sqrt{L}) \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 L は要素長である。

2・2 試験片形状 解析に使用した四点曲げ試験片の形状を図1に示す。

2・3 要素分割 解析は、対称性より図1の試験片の1/4に対し、き裂進展量 $a - a_0 = 0.1, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.8 \text{ mm}$ の6とおりについて行った。き裂前縁付近の要素分割に際しては、き裂前縁に沿って変位形特異要素と応力形特異要素を配置するとともに、き裂前縁に垂直な7点について応力拡大係数を評価できるように分割した。要素分割例を図2に示す。

3. シェブロン切欠試験片の応力拡大係数

3・1 境界要素法による評価 境界要素法の解析結果を用いて、変位法によりき裂前縁の応力拡大係数の分布を求めた。き裂開口変位を v 、き裂先端からの距離を r 、横弾性係数を G 、ポアソン比を ν とすれば、応力拡大係数は次式で評価される。

$$K_I = \frac{G}{2(1-\nu)} \sqrt{2\pi/r} \cdot v \quad (\text{平面ひずみ}) \dots\dots\dots (2)$$

これより応力拡大係数の補正係数 Y^* は、図1の諸を用いて次式で求める。

$$Y^* = \frac{K_I B \sqrt{W}}{P} \dots\dots\dots (3)$$

P : Load, $S = 48 \text{ mm}$, $l = 16 \text{ mm}$
 $W = 6 \text{ mm}$, $B = 3 \text{ mm}$

$a_0 = 2.4 \text{ mm}$, $a_1 = 4.8 \text{ mm}$

Notched Section

図1 試験片形状

次にエネルギー法により、平均的な応力拡大係数を求める。図1で、試験片のコンプライアンスを C 、 $\alpha = a/W$ とすると、き裂が Δa だけ進展する時開放されるエネルギー ΔU は次式で表される。

$$\Delta U = (P^2/2W)(dC/da)\Delta a \dots\dots\dots (4)$$

また、き裂を Δa だけ進展させるのに要する仕事 ΔW は次式で求める。

$$\Delta W = G_I b \Delta a = (K_I^2/E') b \Delta a \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 G_I はひずみエネルギー解放率、 E' は E を縦弾性係数として $E' = E/(1-\nu^2)$ である。 ΔU と ΔW が等しいことから応力拡大係数は次式で評価される。

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{W}} Y^* = \frac{P}{B\sqrt{W}} \left(\frac{1}{2} \frac{dC'}{da} \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha - \alpha_0} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (6)$$

ただし $\alpha_0 = \frac{a_0}{W}$, $\alpha_1 = \frac{a_1}{W}$, $C' = E'BC$

ここで、コンプライアンス C はき裂長さごとに境界要素法で求めたコンプライアンスから、最小二乗法によりき裂長さの3次関数として求めたものを用いた。境界要素法で求めた6とおりのき裂長さに対するコンプライアンスはすべてこの3次関数で良好に近似されることが確認された。

Notched Section

図2 要素分割例 ($a - a_0 = 0.9 \text{ mm}$ の場合)

3.2 スライスモデルによる評価 図1の試験片にBluhmのスライスモデルを適用し、平均的な応力拡大係数を求めた⁽⁵⁾⁽⁹⁾。まず、試験片の厚さ B を n 分割し、分割片間のせん断力を考慮した分割片のコンプライアンスの和として、全体の試験片のコンプライアンスを評価した。本解析では $n=500$ とした。次に、スライスモデルで求めた結果を用いて最小二乗法によりコンプライアンスをき裂長さの3次関数として表し Y^* を式(6)から評価した。本方法においても、スライスモデルにより求めたコンプライアンスはこの3次関数で良好に近似されることが確認された。

3.3 考察 境界要素法の結果を用いて求めたき裂前縁の応力拡大係数の分布を、き裂中心からの距離 x の関数として、図3に示す。図3から、き裂長さによらず、応力拡大係数はき裂中心で最小、き裂コーナ部で最大となることがわかる。また、き裂前縁における応力拡大係数の変化は $a-a_0=1.2$ mmの場合に最大で、約20%である。

境界要素法により評価したき裂前縁における応力拡大係数の最大値と平均的な応力拡大係数、およびスライスモデルにより求めた平均的な応力拡大係数を図4に示す。図4から、境界要素法およびスライスモデルによる平均的な応力拡大係数はよく一致する。これに対し、応力拡大係数の最大値は、平均値と比較し最大で60%程度差異を生じる。

また、破壊抵抗一定を仮定すれば、荷重 P は Y^* の最小値 $Y_{\min}^*$ で最大値 $P_{\max}$ をとり、この時破壊じん性 K_{Ic} は、次式で評価される。

図3 き裂前縁における応力拡大係数の分布

$$K_{Ic} = \frac{P_{\max}}{B\sqrt{W}} Y_{\min}^* \quad \dots\dots\dots (7)$$

$Y_{\min}^*$ における α を α^* として、それぞれの方法による $Y_{\min}^*$ と α^* を表1に示す。

境界要素法およびスライスモデルにより評価した平均的な $Y_{\min}^*$ はよく一致している。しかし、最大値で評価した $Y_{\min}^*$ は、平均値に比較して、約9%大きい値となる。また α^* は解析の方法によらずほぼ等しい。

4. 結 言

本論文では三次元境界要素法とスライスモデルによりシェブロン切欠試験片の応力拡大係数をき裂長さの関数として解析し、以下の結論を得た。

(1) 境界要素法およびスライスモデルによる平均的な応力拡大係数はよく一致する。しかし、最大値で評価した応力拡大係数の $Y_{\min}^*$ は、平均値で評価した値に比較して、約9%大きい値となる。 $Y_{\min}^*$ を生ずる

表1 Y^* の評価方法と α^* , $Y_{\min}^*$

Y^*	α^*	$Y_{\min}^*$
Maximum Value (BEM)	2.51	26.3
Average Value (BEM)	2.51	24.1
Average Value (Slice Model)	2.51	24.4

図4 き裂長さと応力拡大係数の関係

き裂長さは解析の方法によらずほぼ等しい。

(2) シェブロン切欠試験片のき裂前縁における応力拡大係数の分布を求めた。

文 献

- (1) Raju, I. S. and Newman, J. C. Jr., *ASTM STP*, 855 (1984), 32.
- (2) Ingraffea, A. R., ほか4名, *ASTM STP*, 855 (1984), 49.
- (3) Mendelson, A. and Ghosn, L. J., *ASTM STP*, 855 (1984), 69.
- (4) Munz, D., ほか2名, *Int. J. Fract.*, 16-4 (1980), 359.
- (5) Munz, D., ほか2名, *J. Am. Ceramic Soc.*, 63-5, 6 (1980), 300.
- (6) 小林・ほか3名, 日本材料学会第3回破壊力学シンポジウム講演論文集, (昭60-6), 167.
- (7) Sakai, M. and Yamasaki, K., *J. Am. Ceramic Soc.*, 66-5 (1983), 371.
- (8) 田中正隆・田中喜久昭, 境界要素法—基礎と応用, (昭57), 丸善.
- (9) Bluhm, J. I., *Eng. Fract. Mech.*, 7-3 (1975), 593.