無限体中に存在する円板状き裂群の動的相互干渉*

上 田 整**

Dynamic Interaction between Penny-Shaped Cracks in an Infinite Solid

by Sei UEDA

This paper deals with the dynamic interaction between penny-shaped cracks in an infinite solid. Laplace and Hankel transforms are used to reduce the mixed boundary value problems to a set of dual integral equations. The solution is expressed in terms of a Fredholm integral equation of the second kind having a kernel with fast rate convergence. A numerical Laplace inversion technique is used to recover the time dependence of the solution. The dynamic stress intensity factor is determined and its dependence on time and the geometry parameter is discussed.

Key Words: Elasticity, Penny-Shaped Crack, Dual Integral Equation, Fredholm Intrral Equation of the Second Kind, Stress-Intensity Factor, Dynamic Interaction

1. 結 言

き裂先端の応力拡大係数の概念が提起されて以来、種々の形状に対する応力拡大係数の理論値の解析が活発に行われており、2個以上のき裂の相互干渉についても多くの研究がなされている⁽¹⁾。しかしながら、これらの研究は静的場合に限られており、動的相互干渉のものはほとんど報告されていない。動的負荷による応力、変位は相当する静的負荷によるものとは著しく異なっており、き裂先端の動的応力拡大係数も複雑な時間的挙動をするものと思われる。

そこで本報では、動的応力拡大係数に及ぼすき裂間の相互干渉効果の研究のため、無限体中に平行に存在する N 個の円板状き裂のねじりによる動的相互干渉問題を取り上げ、動的応力拡大係数の時間的挙動を求め、き裂群の相互干渉効果の影響を明らかにした。

解法は、ラプラスおよびハンケル変換法によって得られる第二種フレドホルム形積分方程式に導いて解く方法⁽²⁾によった。このとき、第二種フレドホルム形積分方程式の積分核の半無限区間積分をリーマン面上の

複素積分法⁽³⁾により評価し収束のよい積分形に変形して、その数値的評価を容易にした。ラプラス像空間における第二種フレドホルム形積分方程式の数値解析にはガウスの数値積分法⁽⁴⁾を用いた。数値ラプラス逆変換法⁽⁵⁾を用いて数値計算し、動的応力拡大係数に及ぼすき裂間隔の影響をき裂数 $N=2, 3, \infty$ 個の場合について $N=1$ の場合⁽³⁾と比較し明らかにした。

2. 問題の設定

無限体中に平行に間隔 $2h$ で並んで存在する N 個の半径を a とする円板状き裂を考える。図1に示すように、き裂が偶数個の場合は各々のき裂が $0 < r < a$, $\pm(2n-1)h$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の領域に存在するように円柱座標系 (r, θ, z) を設定する。またき裂が奇数個の場合は、各々のき裂が $0 < r < a$, $\pm 2(n-1)h$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の領域に存在するように円柱座標系 (r', θ, z) を設定する。無限体の剛性率を μ , 密度を ρ とする。各々のき裂面に衝撃ねじりせん断負荷 $-\tau_0(r/a)H(t)$ が作用する動的問題を解析する。ここで、 t は時間であり、 $H(t)$ はヘビサイドの単位ステップ関数である。この問題の特異解は静的ねじりせん断負荷を受ける無限体中に N 個の平行な円板状き裂が突然出現する問題の解と数学的に等価である。この時、無限体の単位

* 昭和61年4月1日 第63期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和60年7月30日。

** 准員、静岡大学教育学部 (〒422 静岡市大谷836)。

長さ当たりのねじれ角を ω とすれば, τ_0 は

$$\tau_0 = \mu \omega a \dots\dots\dots (1)$$

である。

$z=0$ 面における変位および応力の対称性を考慮すれば, $z>0$ の領域のみを解析すれば十分である。ねじり変形問題の場合, 変位場は,

$$u_{rj} = u_{zj} = 0, u_{\theta j} = u_{\theta j}(r, z, t) \dots\dots\dots (2)$$

ここに添字 j は相当する弾性場を示すものとする。応力場は,

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta j} &= \mu \left(\frac{\partial u_{\theta j}}{\partial r} - u_{\theta j}/r \right) \\ \tau_{z\theta j} &= \mu \left(\frac{\partial u_{\theta j}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

変位 $u_{\theta j}$ に関する運動方程式を求めると

$$\frac{\partial^2 u_{\theta j}}{\partial r^2} + \frac{\partial u_{\theta j}}{r \partial r} - \frac{u_{\theta j}}{r^2} + \frac{\partial^2 u_{\theta j}}{\partial z^2} = \left(\frac{1}{C_2} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{\theta j}}{\partial t^2} \dots\dots\dots (4)$$

ここに $C_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$ はせん断波速度である。

本報では, き裂数 $N=2, 3, \infty$ の 3 種類の場合について検討する。境界条件はそれぞれについて次式で与えられる。

$N=2$ の場合

$$\left. \begin{aligned} u_{\theta 1}(r, h, t) &= u_{\theta 2}(r, h, t); r > a \\ \tau_{z\theta 1}(r, h, t) &= \tau_{z\theta 2}(r, h, t) \\ &= -\tau_0(r/a)H(t); 0 < r < a \\ u_{\theta 1}(r, 0, t) &= 0; r > 0 \\ \tau_{z\theta 1}(r, h, t) &= \tau_{z\theta 2}(r, h, t); r > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$N=3$ の場合

$$\left. \begin{aligned} u_{\theta 1}(r, 0, t) &= 0 & r > a \\ \tau_{z\theta 1}(r, 0, t) &= -\tau_0(r/a)H(t); 0 < r < a \\ u_{\theta 1}(r, 2h, t) &= u_{\theta 2}(r, 2h, t); r > a \\ \tau_{z\theta 1}(r, 2h, t) &= \tau_{z\theta 2}(r, 2h, t) \\ &= -\tau_0(r/a)H(t) & 0 < r < a \\ \tau_{z\theta 1}(r, 2h, t) &= \tau_{z\theta 2}(r, 2h, t); r > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$N=\infty$ の場合

$$\left. \begin{aligned} u_{\theta 1}(r, 0, t) &= 0 & r > a \\ \tau_{z\theta 1}(r, 0, t) &= -\tau_0(r/a)H(t); 0 < r < a \\ u_{\theta 1}(r, h, t) &= 0 & r > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

3. 解 析

ラプラス変換およびその逆変換を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} f^*(p) &= \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \\ f(t) &= (1/2\pi i) \int_{Br} f^*(p) e^{pt} dp \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで, B_r はブロムウィッチの積分路である。ラプラス・ハンケル変換法により式(4)の解は

$$u_{\theta j}(r, z, p) = \int_0^\infty [A_j(s, p) e^{-\gamma z} + B_j(s, p) e^{\gamma z}] \times J_1(rs) ds \dots\dots\dots (9)$$

ここに $\gamma = (s^2 + p^2/c_2^2)^{1/2}$, A_j, B_j は境界条件より決定される未知関数である。また $J_1(\)$ は一次のベッセル関数である。

応力成分は

$$\tau_{z\theta j}(r, z, p) = -\mu \int_0^\infty \gamma [A_j(s, p) e^{-\gamma z} - B_j(s, p) e^{\gamma z}] J_1(rs) ds \dots\dots\dots (10)$$

3.1 $N=2$ の場合には境界条件の式(5)より, 次の未知関数 $C_2(s, p)$ に関する双積分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty s [1 + K_2(s, p)] C_2(s, p) J_1(rs) ds \\ = \tau_0 r / ap, \quad 0 < r < a \\ \int_0^\infty C_2(s, p) J_1(rs) ds = 0, \quad r > a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここに $K_2(s, p) = \gamma/s - 1 + \gamma e^{-2\gamma h}/s$

式(11)を満足する $C_2(s, p)$ は次のように求められる。

$$C_2(s, p) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau_0 a^{5/2} s^{1/2}}{p} \int_0^1 \sqrt{u} \Phi_2(u, \kappa) \times J_{3/2}(sau) du \dots\dots\dots (12)$$

ここで, $\kappa = pa/c_2$, $J_{3/2}$ は 3/2 次のベッセル関数である。 $\Phi_2(u, \kappa)$ は次の第二種フレドホルム形積分方程式の解となる。

$$\Phi_2(u, \kappa) + \int_0^1 \Phi_2(v, \kappa) M_2(u, v, \kappa) dv = u^2 \dots\dots\dots (13)$$

ここに, $M_2(u, v, \kappa)$ は積分核であり次式で与えられる。

図 1 円柱座標系

$$M_2(u, v, \kappa) = \sqrt{uv} \int_0^\infty \xi K_2(\xi/a, \kappa c_2/a) J_{3/2}(\xi u) \\ \times J_{3/2}(\xi v) d\xi \dots\dots\dots (14)$$

式(14)の半無限区間積分はリーマン面上の複素積分法⁽³⁾を用いて収束のよい積分形に変形される。

$$M_2(u, v, \kappa) = M_1(u, v, \kappa) + M_2'(u, v, \kappa) \\ \dots\dots\dots (15)$$

ここに

$$M_1(u, v, \kappa) = \frac{2\kappa^2 \sqrt{uv}}{\pi} \int_0^1 \tilde{\gamma}^{(2)} I_{3/2}(\kappa \alpha u) \\ \times K_{3/2}(\kappa \alpha v) d\alpha, \quad (u < v) \\ M_2'(u, v, \kappa) \\ = \sqrt{uv} \int_0^\infty \gamma^{(1)} e^{-2\gamma^{(1)} h_0} J_{3/2}(\xi u) J_{3/2}(\xi v) d\xi \\ \tilde{\gamma}^{(2)} = (1 - \alpha)^{1/2}, \gamma^{(1)} = (\kappa^2 + \xi^2)^{1/2}$$

また、 $I_{3/2}$, $K_{3/2}$ はそれぞれ 3/2 次の第一種および第二種の変形ベッセル関数である。 h_0 は無次元き裂間隔で $h_0 = h/a$ である。積分核 $M_1(u, v, \kappa)$ は u, v に関する対称核であるから、 $u > v$ に対する M_1 は上式におい

て u, v の変換において得られる。

動的応力拡大係数 $K_{32}(T)$ は次のように定義される。

$$K_{32}(T) = \lim_{r \rightarrow a} \{2(r-a)\}^{1/2} \tau_{z\theta 1}(r, h, T) \\ \dots\dots\dots (16)$$

ここに T は無次元時間であり、 $T = c_2 t/a$ である。したがって、式(12)を式(16)に代入して、ラプラス逆変換を実行すれば

$$K_{32}(T) = \frac{4\tau_0 a^{1/2}}{3\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\Phi_2(1, \kappa)}{\kappa} e^{\kappa T} d\kappa \\ \dots\dots\dots (17)$$

として得られる。

3・2 $N=3$ の場合には、境界条件式(6)より、次の二つの未知関数 $C_{3a}(s, p)$, $C_{3b}(s, p)$ に関する連立双積分方程式が得られる。添字 a は中央のき裂に対する弾性場を示し、添字 b は外側のき裂に対する弾性場を示すものとする。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty s \{ [1 + K_{11}(s, p)] C_{3a}(s, p) + K_{12}(s, p) C_{3b}(s, p) \} J_1(rs) ds &= \frac{\tau_0 r}{ap}; \quad 0 < r < a \\ \int_0^\infty C_{3a}(s, p) J_1(rs) ds &= 0; \quad r > a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty s \{ K_{21}(s, p) C_{3a}(s, p) + [1 + K_{22}(s, p)] C_{3b}(s, p) \} J_1(rs) ds &= \frac{\tau_0 r}{ap}; \quad 0 < r < a \\ \int_0^\infty C_{3b}(s, p) J_1(rs) ds &= 0; \quad r > a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここに

$$K_{11}(s, p) = \frac{\gamma}{s} - 1, K_{12}(s, p) = \frac{2\gamma e^{-2\gamma h}}{s}, \\ K_{21}(s, p) = \frac{\gamma e^{-2\gamma h}}{s}, K_{22}(s, p) = \frac{\gamma}{s} - 1 + \frac{\gamma e^{-4\gamma h}}{s}$$

式(18), 式(19)を満足する $C_{3a}(s, p)$, $C_{3b}(s, p)$ は次のように求まる。

$$C_{3a}(s, p) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau_0 a^{5/2} s^{1/2}}{p} \int_0^1 \sqrt{u} \Phi_{3a}(u, \kappa) J_{3/2}(sau) du \dots\dots\dots (20)$$

$$C_{3b}(s, p) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau_0 a^{5/2} s^{1/2}}{p} \int_0^1 \sqrt{u} \Phi_{3b}(u, \kappa) J_{3/2}(sau) du \dots\dots\dots (21)$$

式(20), 式(21)中の $\Phi_{3a}(u, \kappa)$, $\Phi_{3b}(u, \kappa)$ は次の連立第二種フレドホルム形積分方程式の解である。

$$\Phi_{3a}(u, \kappa) + \int_0^1 \Phi_{3a}(v, \kappa) M_{11}(u, v, \kappa) dv + \int_0^1 \Phi_{3b}(v, \kappa) M_{12}(u, v, \kappa) dv = u^2 \dots\dots\dots (22)$$

$$\Phi_{3b}(u, \kappa) + \int_0^1 \Phi_{3a}(v, \kappa) M_{21}(u, v, \kappa) dv + \int_0^1 \Phi_{3b}(v, \kappa) M_{22}(u, v, \kappa) dv = u^2 \dots\dots\dots (23)$$

ここに $M_{kl}(u, v, \kappa)$ は積分核であり

$$M_{kl}(u, v, \kappa) = \sqrt{uv} \int_0^\infty \xi K_{kl}(\xi/a, \kappa c_2/a) J_{3/2}(\xi u) J_{3/2}(\xi v) d\xi, \quad k, l = 1, 2 \dots\dots\dots (24)$$

式(24)中の半無限区間積分も前述と同様リーマン面上の複素積分法により評価でき、収束のよい積分形に変形される。

$$\left. \begin{aligned}
 M_{11}(u, v, \kappa) &= M_1(u, v, \kappa) \\
 M_{12}(u, v, \kappa) &= \sqrt{uv} \int_0^\infty 2\gamma^{(1)} e^{-2\gamma^{(1)}h_0} J_{3/2}(\xi u) J_{3/2}(\xi v) d\xi \\
 M_{21}(u, v, \kappa) &= \sqrt{uv} \int_0^\infty \gamma^{(1)} e^{-2\gamma^{(1)}h_0} J_{3/2}(\xi u) J_{3/2}(\xi v) d\xi \\
 M_{22}(u, v, \kappa) &= M_1(u, v, \kappa) + \sqrt{uv} \int_0^\infty \gamma^{(1)} e^{-4\gamma^{(1)}h_0} J_{3/2}(\xi u) J_{3/2}(\xi v) d\xi
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

以下3・1節と同様にして動的応力拡大係数 $K_{33}(T)$ が求められる。

3・3 $N=\infty$ の場合は境界条件の式(7)より次の未知関数 $C_4(s, p)$ に関する双積分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 \int_0^\infty s[1+K_4(s, p)]C_4(s, p)J_1(rs)ds \\
 = \frac{\tau_0 r}{ap}; \quad 0 < r < a \\
 \int_0^\infty C_4(s, p)J_1(rs)ds = 0; \quad r > a
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここに

図2 動的応力拡大係数 (円板状き裂が2個の場合)

図3 動的応力拡大係数 (円板状き裂が3個の場合-中央)

$$K_4(s, p) = \frac{\gamma}{s} - 1 + \frac{2\gamma e^{-2\gamma h}}{s(1 - e^{-2\gamma h})}$$

である。

以下同様にして第二種フレドホルム形積分方程式に導いて、動的応力拡大係数 $K_{34}(T)$ が求められる。

4. 数値結果および考察

式(17)などにおけるラプラス逆変換には数値ラプラス逆変換法⁽⁵⁾を用いた。図2は $N=2$ の場合の動的応力拡大係数 $K_{32}(T)$ を無限体中に存在する1個の円板状き裂の静的ねじり負荷に対する解 $4\tau_0\sqrt{a}/3\pi$ で無次元化した動的応力拡大係数 $\bar{K}_{32}(T) = 3\pi K_{32}(T)/(4 \cdot \tau_0\sqrt{a})$ と無次元時間 $T = c_2 t/a$ の関係をき裂間隔比 $h_0 = h/a$ をパラメータとして示したものである。破線は無限体中に存在する1個の円板状き裂の解⁽³⁾であり、 $h_0 \rightarrow \infty$ の極限でもある。 h_0 が減少するに従って、 $\bar{K}_{32}(T)$ の最大値も減少する傾向を示し、 $h_0 \rightarrow 0$ の極限では破線の解の半分の値になっており、一点破線で示されている。 $h_0 = 0.2$ の場合は2番めの極大値で最大値に達しているのに対し、 $h_0 = 0.1$ では $T \approx 0.3$ で変曲点となり以後さらに増大して最大値に達するといった複雑な挙動を示している。いずれの場合も、最大値に達した以後は振動しながら静的値に漸近していく。

図3、図4はそれぞれ $N=3$ の場合の中央および外側のき裂に対する動的応力拡大係数 $\bar{K}_{33}(T)$ の図2と

図4 動的応力拡大係数 (円板状き裂が3個の場合-両側)

図 5 動的応力拡大係数（円板状き裂が無数の場合）

同様のグラフである。中央のき裂の動的応力拡大係数のほうが外側き裂の場合よりも相互干渉の影響を著しく受けており激しく振動しているが、その平均値は中央き裂のほうが小さくなっており、相互干渉により応力拡大係数は小さくなることがわかる。この場合、 $h_0 = 0.1$ の時に両者とも 2 番めの極大値と最大値となっ

ているが、 $h_0 \geq 0.2$ の場合は最初の極大値が最大値となっている。

図 5 は $N = \infty$ とした場合の図 2 などと同様のグラフである。この場合は h_0 のいずれの値に対しても、動的応力拡大係数 $\bar{K}_{3,4}(T)$ は急激に増大し最大値に達した後、振動しながら静的値に漸近している。 h_0 の増大に伴い $\bar{K}_{3,4}(T)$ の最大値は増大し、また最大値に達するまでの時間は早くなる傾向を示している。

終りに、本研究にあたり懇切なご教示とご指導を賜った東北大学 渥美光名誉教授に深く感謝いたします。また適切なご助言をいただいた東北大学工学部 進藤裕英助教授に深く感謝いたします。

文 献

- (1) 石田, き裂の弾性解析と応力拡大係数, (昭 51), 1, 培風館.
- (2) 渥美, 固体力学概論, (昭 53), 214, コロナ社.
- (3) Ueda, S., ほか 2 名, *Eng. Fract. Mech.*, 18-5 (1983), 1059~1066.
- (4) 山内・ほか 2 名, 電子計算機のための数値計算法, 3, (昭 47), 279, 培風館.
- (5) Bellman, R., ほか 2 名, *Numerical Inversion of the Laplace Transforms*, (1966), 1, Elsevier Publishing Co.