衝撃荷重を受ける中空球の弾/粘塑性解析*

畑 俊 明**

A Dynamic Elasto/Viscoplastic Solution in a Thick-Walled Spherical Shell
Subjected to Impulsive Load

by Toshiaki HATA

A general method for the solution of the dynamic problem in an elasto/viscoplastic solid is presented. This method reduces the elasto/viscoplastic problem to a sequence of elastic problems with initial strains. The solution of the elastic problem with initial strains is determined by using four displacement functions. Using the foregoing method, a solution is derived for a dynamic elasto/viscoplastic problem in a thick-walled spherical shell subjected to internal impact load. The numerical results show how the dynamic stresses in a sphere with viscoplastic properties vary with time.

Key Words: Structural Analysis, Dynamic Problem, Elasto/Viscoplastic Deformation, Hollow Sphere

1. 緒 言

近年、弾/粘塑性の物性を有する物体の動的問題の研究は、設計の対象が、低応力設計から高応力設計へと拡大されるにつれて、その重要性が認識されるようになった。

しかし、弾/粘塑性問題は、最近まで、簡単な問題に限定されていたが、時間での逐次積分法と、有限要素法、境界要素法、差分法などの数値解析法により、近似的に応力解析を行うことにより、数多くの問題が解析されてきた。

例えば、双極座標を用いた動的負荷を受ける球殻の弾/粘塑性解析⁽¹⁾、厚肉回転対称殻の弾/粘塑性動的応答⁽²⁾である。

これらの解析法では、弾性動的解も、逐次積分法を用いて解析するため、近似解しか得られず、このため、時間的に生ずる粘塑性ひずみを正確に把握することは、難しいと思われる。

そこで、本報では、内径 a 、外径 b の中空球に、衝撃的に、内圧および外圧が作用した場合、粘塑性物性

により、動的応力が時間的にどのように変動するかを解析した。

本報では、まず、一般的な弾/粘塑性問題解析法を示した。動的弾性解は波線法により厳密に解析する。次に、時間の逐次積分法を用いると、粘塑性解析は、微小時間区分内で、粘塑性ひずみ速度を一定とすると、非弾性ひずみを有する弾性問題に帰着されることを明らかにした。

この問題は、ノイバー・パプコビッチの応力関数と同様の 4 種の変位関数を導入することにより、各変位関数に関する二階の偏微分基礎方程式を解く問題となる。この非弾性ひずみが $e_{ij} = \alpha T \delta_{ij}$ (δ_{ij} はクロネッカのデルタ) と表される時、熱応力問題となることを付記する。

さらに、本報では、この基礎式より、慣性項を含む場合の、球座標での基礎式を導き、この基礎式を厳密に解析した。

数値計算の際、弾/粘塑性の構成方程式は、Perzyna の理論⁽³⁾に基づく、Fyfe の式⁽⁴⁾を用いて、内圧を衝撃的に負荷された場合の厚肉球殻を対象として、数値解析を行った。この数値解は、本報の解析の有効性を明確にしている。

* 昭和 61 年 4 月 1 日 第 63 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 60 年 10 月 22 日。

** 正員、静岡大学教育学部 (〒422 静岡市大谷 836)。

2. 基礎式

この章では、非弾性ひずみによる物体の変形を解析する際の場の方程式を導く。この問題の解は、境界 Γ で規定される領域 Σ 内で、時間的に変化する応力テンソル T とひずみテンソル S である。

フックの法則は、次式で表される。

$$T = 2\mu S' + \lambda |S'|1 \quad (1)$$

ここで、 T, S' は、それぞれ応力および弾性ひずみテンソル、 1 は単位テンソル、 λ, μ はラーメの定数で、 $|S'|$ は、 $|S'| = S' : 1$ で定義されるものとする。

いま、全ひずみテンソル S とし、このひずみの弾性ひずみテンソルを S' 、非弾性ひずみテンソルを S'' とすると、

$$S = S' + S'' \quad (2)$$

式(2)より S' を求め、式(1)に代入すると、

$$T = \lambda |S|1 + 2\mu S - [\lambda |S''|1 + 2\mu S''] \quad (3)$$

運動方程式は、物体力を零とすると

$$\nabla \cdot T = \rho \ddot{u} \quad \text{in } \Sigma \quad (4)$$

ここで、 ρ は物体の質量、 u は変位で、ドットは時間での二階微分を表す。また、表面における表面力は

$$T_n = n \cdot T \quad \text{on } \Gamma \quad (5)$$

ここで、 T_n は表面力、 n は境界における法線方向の単位ベクトルである。

式(3)を式(4)、(5)に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \lambda \nabla |S| + 2\mu \nabla \cdot S - [\lambda \nabla |S''| + 2\mu \nabla \cdot S''] \\ = \rho \ddot{u} \end{aligned} \quad (6)$$

$$T_n = \lambda n |S| + 2\mu n \cdot S - [\lambda n |S''| + 2\mu n \cdot S''] \quad (7)$$

変位ベクトル u とひずみとの関係は、

$$S = \frac{\nabla u + u \nabla}{2} \quad (8)$$

式(8)を式(6)に代入すると変位に関する運動方程式が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla u + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \nabla \cdot u \\ = \rho \ddot{u} + 2 \nabla \cdot S'' + 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \nabla \cdot S'' \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、

$$S'' = S''_a + S''_s \quad (10)$$

かつ、

$$\left. \begin{aligned} S''_a &= S'' - \frac{1}{3} |S''| 1 \\ S''_s &= \frac{1}{3} |S''| 1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

塑性ひずみは時間区分内で一定とすると u は、塑性解

u^p と弾性解 u^s に分離して考え得る。すなわち

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla u^p + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \nabla \cdot u^p \\ = 2 \nabla \cdot S''_a + 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \nabla \cdot S''_s \end{aligned} \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \nabla u^s + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \nabla \cdot u^s = \rho \ddot{u}^s \quad (13)$$

ここで、まず、式(12)の解を求める。このとき、 u^p を4個の関数を用いて表す。すなわち、ベクトル B^p の3個の成分と、スカラー関数 φ である。

$$u^p = 4(1-\nu) B^p - 2 \nabla \varphi \quad (14)$$

式(14)を式(12)に代入すると、次式が得られる。

$$\nabla \cdot \nabla B^p = \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla \cdot S''_a \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = 2 \nabla \cdot B^p - \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} |S''_s| \quad (16)$$

ここで、

$$\varphi^p = \chi^p + r \cdot B^p \quad (17)$$

とおく。ここで、 χ^p はスカラー関数であり、 r は位置のベクトルである。また、次の関係式

$$\nabla \cdot \nabla (r \cdot B^p) = 2 \nabla \cdot B^p + (\nabla \cdot \nabla B^p) \cdot r$$

と、式(17)を用いると、式(16)は、次式となる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \chi^p = \frac{-1}{2(1-\nu)} r \cdot (\nabla \cdot S''_a) - \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} |S''_s| \end{aligned} \quad (18)$$

式(14)に対応する応力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} T^p = 2\mu [2\nu \nabla \cdot B^p 1 + 2(1-\nu) (\nabla B^p + B^p \nabla) \\ - \nabla \nabla \varphi^p] - 2\mu \left[S''_a + \frac{1+\nu}{1-\nu} S''_s \right] \end{aligned} \quad (19)$$

塑性ひずみに対し、一般に非圧縮性の仮定が成り立つので、その際には次式が成り立つ。

$$|S''| = |S''_s| = 0 \quad (20)$$

次に式(13)の解を求める。この解は、ヘルムホルツの式としてよく知られているように

$$u^s = \nabla \phi^s + \nabla \times \Psi^s \quad (21)$$

とおくと、 ϕ^s, Ψ^s は次式を満足する。

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \phi^s &= \frac{1}{c_l^2} \ddot{\phi}^s \\ \nabla \cdot \nabla \Psi^s &= \frac{1}{c_t^2} \ddot{\Psi}^s \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ここで、

$$c_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (23)$$

かつ、

$$\nabla \cdot \Psi^s = 0 \quad (24)$$

式(21)による応力は、次式により求められる。

$$T^s = \lambda |S^s| 1 + 2\mu S^s \quad (25)$$

ここで、

$$S^s = (\nabla u^s + u^s \nabla) / 2 \quad (26)$$

最終的に、所求の応力は次式により求まる。

$$T = T^p + T^s \quad (27)$$

3. 動的荷重を受ける中空球の弾/粘塑性解析

2章により求めた基礎式を用いて、内外圧が作用する中空球の動的応力が、粘塑性物性により、どのように変動するかを解析する。

まず、弾性解を示そう。本解は、波線法による厳密解である。

3.1 弾性解 中空球が動的な内外圧を受ける場合の境界条件式は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^s(a, t) &= -P_1(t) \\ \sigma_r^s(b, t) &= -P_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここで、 a, b は、図1に示すように、球の内半径、外半径を示すものとする。

球は、時間 $t=0$ の状態では静止しているものとして、初期条件として次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} u^s(r, 0) &= 0 \\ \partial u^s / \partial t = 0 \quad t=0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

次に、球の動的問題の基礎式を式(21)、(22)より求める。式(21)、(22)は、点対称の球座標では次式となる。

$$u^s = \partial \phi^s / \partial r \quad (30)$$

かつ、

$$\frac{\partial^2 \phi^s}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi^s}{\partial r} = \frac{\ddot{\phi}^s}{C_L^2} \quad (31)$$

この場合、式(21)の Ψ^s は球対称であるから零となる。変位 u^s に対応する応力は、式(25)、(26)より次式で与えられる。ただし、ここで、 σ_r^s は半径方向の応力

図1 内外圧を荷重された中空球

を、 σ_θ^s はこれと直角方向の応力を表すものとする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r^s}{\rho C_L^2} &= \frac{\ddot{\phi}^s}{C_L^2} - \frac{4\kappa}{r} \frac{\partial \phi^s}{\partial r} \\ \frac{\sigma_\theta^s}{\rho C_L^2} &= (1-2\kappa) \frac{\ddot{\phi}^s}{C_L^2} + \frac{2\kappa}{r} \frac{\partial \phi^s}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ここで、

$$\kappa = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (33)$$

次に、 $P_1(t) = P_0 H(t)$ [ここで、 $H(t)$ はヘビサイドのステップ関数] で与えられる場合、すなわち、 P_0 の内圧が衝撃的に作用した場合の解析を行うものとする。

この場合、波線法を用いると、その解は文献(5)により、次式で与えられる。ただし、ここで n についての和は、 n 番めまでの波線の和を表すものとする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^s(r, t)}{a} &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(r, t) \\ \frac{\sigma_r^s(r, t)}{P_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\phi_n(r, t), r + \frac{(m+2)a}{r} \phi_n(r, t) \right] (\rho C^2 / P_0) \\ \frac{\sigma_\theta^s(r, t)}{P_0} &= \frac{(m+2)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\phi_n(r, t), r + \frac{a}{\nu r} \phi_n(r, t) \right] (\rho C^2 / P_0) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ここで、

$$m = -4 \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} = -4k, \quad C = C_L \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_0(r, t) &= i \sum_{j=0}^2 \frac{a(a_j r + ia) H(tc_L - r + a)}{r^2 (3a_j^2 + 8ka_j i - 4k)} e^{-ia_j(tc_L - r + a)/a} \\ \phi_1(r, t) &= i \sum_{j=0}^4 \frac{a(a_j r - ia)(a_j^2 b^2 + 4kab a_j i - 4ka^2) H(tc_L + a - 2b + r)}{r^2 \{5b^2 a_j^4 - 16kab(1-b)a_j^3 i - 12ka_j^2(a^2 - 4kab + b^2) + 32a_j k^2 a(b-a)i + 16k^2 a^2\}} e^{-ia_j(tc_L + a - 2b + r)/a} \\ \phi_{2n}(r, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(c_L \tau + 2a - 2b) + q_c(\tau)] \phi_{2n-2}(r, t - \tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\phi_{2n+1}(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(c_L \tau + 2a - 2b) + q_c(\tau)] \phi_{2n-1}(r, t - \tau) d\tau$$

また、関数 $q_c(\tau)$ は次式で与えられる。

$$q_c(\tau) = \delta(c_L \tau + 2a - 2b) + q(\tau) \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$q(\tau) = \sum_{j=1}^4 \frac{i4ka_j(a-b)(b\alpha_j^2 + 4ka)H(c_L \tau + 2a - 2b)}{\{2b^2\alpha_j^3 + 6kb(b-a)\alpha_j^2 i + 4(4k^2ab - kb^2 - ka^2)\alpha_j + 8k^2a(b-a)i\}} e^{-i\alpha_j(c_L \tau + 2a - 2b)/a} \quad \dots\dots\dots (38)$$

ここで、 $\delta(t)$ は、ディラックのデルタ関数であり、 α_j は、次の5個の根を表す。

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = \gamma^*, \alpha_2 = -\gamma, \alpha_3 = \frac{\gamma a}{b}, \alpha_4 = -\frac{\gamma^* a}{b} \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$\gamma = 2k(\sqrt{-1 + k^{-1}} + i), \gamma^* = 2k(\sqrt{-1 + k^{-1}} - i) \quad \dots\dots\dots (40)$$

3・2 粘塑性解析 本節では、3・1節による動的弾性応力によって生ずる粘塑性ひずみとそれに対応する応力を解析する。

まず、本報では、粘塑性ひずみ速度の構成方程式として、Perzyna の理論⁽³⁾に基づく、Fyfe の構成式⁽⁴⁾を用いるものとする。すなわち、

$$\dot{e}_{ij}'' = \dot{\gamma}_0 \langle \Phi(F) \rangle S_{ij} J_2^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (41 \cdot a)$$

ここで、ドットは時間に関する微分を示し、 $\dot{\gamma}_0$ は粘性定数を、 S_{ij} は偏差応力を、 J_2 は偏差応力の第2不変量を表す。また、 $\langle \Phi(F) \rangle$ は次式の定義に従う。

$$\left. \begin{aligned} \langle \Phi(F) \rangle &= 0 : F \leq 0 \\ \langle \Phi(F) \rangle &= \Phi(F) : F > 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (41 \cdot b)$$

Fyfe は、関数 $\Phi(F)$ を次式のように定めている。

$$\Phi(F) = e^{aF} - 1, F = \frac{J_2^{1/2} - \tau^*}{\tau_0} \quad \dots\dots\dots (41 \cdot c)$$

ここで、 a は材料定数であり、 τ^*, τ_0 は、それぞれ単純せん断の場合の静的な降伏応力、初期降伏応力である。なお、 $F=0$ はミーゼスの降伏曲線を表す。

式(41)より点対称球座標系でのひずみ速度を求め、微小時間 Δt で積分すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_r'' &= \dot{\gamma}_0 \langle \Phi(F) \rangle \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{3\sqrt{J_2}} \\ \Delta e_\theta'' &= \dot{\gamma}_0 \langle \Phi(F) \rangle \frac{(\sigma_\theta - \sigma_r)}{3\sqrt{J_2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (42 \cdot a)$$

ここで、

$$J_2 = \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2}{3} \quad \dots\dots\dots (42 \cdot b)$$

次に、式(42)の塑性ひずみに対応する応力を求める場合、塑性変形中非圧縮であるとする。この場合の基礎式として、式(14)～(20)より点対称の条件と、式(20)の $|S''|=0$ の条件を考慮すると次式のように表示される。

$$u^p = 4(1-\nu)B^p - (\chi^p + rB^p), r \quad \dots\dots\dots (43)$$

関数 B^p, χ^p は、式(15)、(18)より次式を満足する。

$$\nabla^2 B^p - \frac{2}{r^2} B^p = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{de_r''}{dr} + \frac{2}{r} (e_r'' - e_\theta'') \right] \quad \dots\dots\dots (44)$$

$$\nabla^2 \chi^p = -\frac{r}{2(1-2\nu)} \left[\frac{de_r''}{dr} + \frac{2}{r} (e_r'' - e_\theta'') \right] \quad \dots\dots\dots (45)$$

ここで、 $\nabla^2 = d^2/dr^2 + (2/r)(d/dr)$ であり、式(44)、(45)の解は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} B^p &= C_0 r + \frac{C_1}{r^2} + \frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{1}{r^2} \int_a^r \eta^2 \left[\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \int_a^\eta \left\{ \frac{de_r''}{d\xi} + \frac{2}{\xi} (e_r'' - e_\theta'') \right\} d\xi \right] d\eta \\ \chi^p &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \int_a^r \eta^2 \left(1 - \frac{\eta}{r} \right) \left[\frac{de_r''}{d\eta} + \frac{2}{\eta} (e_r'' - e_\theta'') \right] d\eta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (46)$$

式(19)より、関数 B^p, χ^p による応力は、次式で与えられる。また、 C_0, C_1 は未定定数である。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^p &= 2\mu \left[2\nu \left(B_r^p + \frac{2}{r} B^p \right) + 4(1-\nu) B_r^p - (\chi^p + r B^p)_{,rr} \right] - 2\mu e_r^p \\ \sigma_\theta^p &= \sigma_\phi^p = 2\mu \left[2\nu \left(B_r^p + \frac{2}{r} B^p \right) + 4(1-\nu) \frac{B^p}{r} - \frac{(\chi^p + r B^p)_{,r}}{r} \right] - 2\mu e_\theta^p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

したがって、式(46)を、式(47)に代入すると、塑性ひずみに対応する応力が次式のように求められる。ただし、ここで、未定定数の置き換えを行っている。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^p &= C_0 - \frac{2C_1}{r^3} - \frac{4\mu}{r^3} \int_a^r \eta^2 f(\eta) d\eta + (\lambda + 2\mu) f(r) - 2\mu e_r^p \\ \sigma_\theta^p &= \sigma_\phi^p = C_0 + \frac{C_1}{r^3} + \frac{2\mu}{r^3} \int_a^r \eta^2 f(\eta) d\eta + \lambda f(r) - 2\mu e_\theta^p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

ここで、 $f(r)$ は、次式で与えられる。

$$f(r) = \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \int_a^r \left[\frac{de_r^p}{d\eta} + \frac{2}{\eta} (e_r^p - e_\theta^p) \right] d\eta \dots\dots\dots (49)$$

式(48)の応力は、次式の境界条件を満足しなければならない。

$$r=a, b \text{ で } \sigma_r^p(r, t) = 0 \dots\dots\dots (50)$$

この境界条件より、式(48)の未定定数 C_0, C_1 が決定される。

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= 2\mu \frac{1}{(a^3 - b^3)} \left[-2 \int_a^b \eta^2 f(\eta) d\eta + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} b^3 f(b) - b^3 e_r^p|_{r=b} + a^3 e_r^p|_{r=a} \right] \\ C_1 &= \mu \frac{a^3 b^3}{a^3 - b^3} \left[-\frac{2}{b^3} \int_a^b \eta^2 f(\eta) d\eta + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} f(b) - e_r^p|_{r=b} + e_r^p|_{r=a} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

これで、すべての応力が決定された。

4. 解法および数値例

$t^* = at/C = 0$ で、式(34)により、衝撃的に内圧が作用した場合の動的応力が求まる。次に、最初の粘塑性ひずみ発生時の微小時間区分 Δt_1 について考える。この微小時間内で、式(34)の応力を一定として、式(42)により、粘塑性ひずみを求め、式(48)により、対応する塑性応力 $\sigma_r^p, \sigma_\theta^p$ を求める。同様にすると、 L 区分後の時間 t_L までの応力は次式で求まる。

$$\sigma_i|_{t=t_L} = \sigma_i^s|_{t=t_L} + \sum_{l=1}^L \sigma_i^p|_{\Delta t = \Delta t_l} (i=r, \theta) \dots\dots\dots (52)$$

数値例として、次のような材料定数をもつ中空球を対象とした。

$$\begin{aligned} \nu &= 0.3, \gamma_0 c/a = 1 \\ \tau_0/P_0 &= \tau^*/P_0 = 1.5 \\ P_0/\rho c^2 &= 1 \end{aligned}$$

また、幾何学的な値として、 $b/a = 2$ とした。

数値積分は、シンプソンの公式を用い、計算は東京大学大型計算機センターの HITAC-M 280 H 機を用いた。

数値計算の結果を、図2~4に示した。図2~4で、時間変数として $t^* = at/C_L$ を用い、 $t^* = 10$ までの初期応力変動を解明した。この際、無次元時間区分として、

図2 中空球に生ずる円周方向の応力の時間的変動

図3 中空球に生ずる塑性応力 σ_θ^p/P_0 の時間的変動

図 4 中空球に生ずる半径方向の応力の時間的変動

0.05 の値を採用した。これと、 $\Delta t^*=0.1$ とした時を比較すると、 σ_θ に生ずる誤差は、最大でも 1.5 % 程度であった。したがって、この時間区分で十分収束しているものと思われる。

図 2 は時間的に変動する円周方向の応力を無次元半径をパラメータとして描いたものである。静的な場合、一定の内圧が作用すると、 $r/a=1$ で $\sigma_\theta/P_0=0.71$ となる。したがって、図 2 より動的応力解析の重要性が明白である。塑性ひずみは、降伏点以上の応力が作用した場合に生ずるので、本報の場合、 $t^*=2.5$ の時、内周付近で最大の塑性ひずみが生じ、これに伴って応力 σ_θ/P_0 が生じ、この応力が弾性応力を圧縮側に移動させている。しかし、これらの塑性応力は、応力波の伝ば速度に影響を及ぼしていないことは重要な知見である。

図 3 の応力 σ_θ/P_0 の時間的変動より、最大円周応力の約 20 % の応力が、 $t^*=2.5$ の時から生じ、この応力

により弾性応力が圧縮側に移動させられる。この事実は、図 2 から明白である。

図 4 は、半径方向の応力 σ_r/P_0 の時間的変動を示したものである。静的な場合 $r=a$ で $\sigma_r/P_0=-1$ 、 $r=b$ で $\sigma_r/P_0=0$ の応力分布は、動的解析で著しくその様相を変える。しかし、この応力分布に及ぼす塑性応力 σ_θ の影響は小さく、 $r/a=1.2$ で若干見られる程度である。

5. 結 言

本報は次のように要約されよう。

(1) 解法については、波線法と塑性ひずみに対応する変位関数法を適用して解析する一般的な解法を確立した。そして、内径 a 、外径 b の中空球に内圧が衝撃的に作用する場合に生ずる弾性応力分布が、粘塑性ひずみによりどのように時間的に変動するかを解析する解を求めた。

(2) 数値計算は、粘塑性の構成方程式として Perzyna の理論に基づく Fyfe の構成式を用いて、 $b/a=2$ の中空球に生ずる衝撃応力の初期応答に及ぼす粘塑性ひずみの影響を明確にした。その結果、円周方向の弾性応力を圧縮側に移動させる効果が観察された。しかしながら、応力波の伝ば速度に影響を及ぼさないことも明らかとなった。

最後に、本研究に当たり終始懇切なご教示を賜った東北大学名誉教授 渥美光教授に深く感謝致します。

文 献

- (1) 谷村・北村, 機論, 51-468, A (昭 60), 1935.
- (2) 竹園・ほか 2 名, 機論, 52-476, A (昭 61), 997.
- (3) Perzyna, P., *Advances in Applied Mechanics*, 9 (1966), 243, Academic Press.
- (4) Fyfe, I. M., *Trans. ASME, Ser. E*, 42-2 (1975), 141.
- (5) 畑, 機講論, No. 840-1, (昭 59-3), 45.