BEM 弾性解析における非特異直接法の有効性と限界*

結 城 良 治**, 松 本 敏 郎***, 木 須 博 行****

The Usefulness and the Limit of the Direct Regular Method
in Boundary Element Elastic Analysis

by Ryoji YUUKI, Toshiro MATSUMOTO, and Hiroyuki KISU

The Direct Regular Method is applied to BEM elastostatic analysis. In this method, the domain of the problem is discretized by defining freedoms on its boundary, as usual; but the load point of the fundamental solution is located outside the domain so that the singular integral can be avoided. Stress intensity factors for a crack and stress concentration for a hole are analyzed by this method and the usefulness and limit of this method are discussed in comparison with Direct BEM. It is shown that this method can give an accurate solution for these problems if the load points are arranged very near the boundary. It is found that this method is especially useful for the problem with a corner point where the tractions on both edges are unknown. This method can be used combined with the Direct Method.

Key Words: Numerical Analysis, Elasticity, Boundary Element Method, Direct Regular Method, Singular Integral, Stress Intensity Factor, Stress Concentration

1. 緒 言

境界要素法 (BEM) は, 新たな効率的な数値解法として確立し, 広範囲な分野に応用されつつある⁽¹⁾⁽²⁾. その主流は, 境界積分方程式を直接離散化して解析する直接法-Direct (Singular) Method-であり, この離散化に際し, 有限要素法の手法が導入され⁽³⁾, 高精度な解が得られるようになった. しかし, 直接法では基本解の着力点と観測点をいずれも境界上にとるため特異積分に際し特別な配慮が必要となり, 数値積分に多くの計算時間を費やすことになる. これに対し, 基本解の着力点を対象領域の外に取り特異積分を避ける新たな解法が最近 Patterson ら⁽⁴⁾⁽⁵⁾により提案されている. この解法を従来の直接法と対比させ, 非特異直接法 (Direct Regular Method) と呼ぶ. この方法の特徴・長所を整理すると,

(1) 基本解の着力点を領域外に取るので, 特異積分を避けることができ, 数値積分時間の軽減が図れ

る.

(2) 外部においた着力点では新たな未知量を定義する必要がなく, 着力点の配置と数は理論上任意に取り得る.

(3) したがって, 境界上の節点数に無関係に欲しい数だけの方程式を得ることができる.

(4) 着力点を境界の外に取る以外は通常の直接法と同じとなり, 直接法のプログラムがそのまま利用できる.

このような長所を活用すれば, 通常の直接法の有する数値解析上の困難が解決でき, BEM のいっそうの効率化が図れるものと期待される.

Patterson らは, この解法を流体問題⁽⁴⁾および静弾性問題⁽⁵⁾に適用し, 本間らは移流拡散問題⁽⁶⁾, プラズマ問題⁽⁷⁾への応用を試みているが, いずれも極めて単純な境界値問題のみについてその有効性の確認がなされているにすぎず, 実際上重要となる複雑な境界条件下の問題にも本方法が有効に適用できるかどうか明らかにされていない. また上記(2)と関連して着力点をどのような位置に配すべきかも明確になっていない. さらに従来の研究は, 上記(1)のみに注目し, 上記(3), (4)の長所に着目した研究は見当たらない.

本研究では, Somigliana の内部相反公式⁽⁸⁾に基づ

* 昭和 61 年 4 月 1 日 第 63 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 60 年 9 月 30 日.

** 正員, 東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木 7-22-1).

*** 学生員, 東京大学生産技術研究所.

**** 正員, 長崎大学工学部 (〒852 長崎市文教町 1-14).

く非特異直接法を二次元静弾性問題に応用し、円孔やき裂問題等の BEM の解析を行い、着力点の配置と解の精度・収束性について系統的に調べるとともに、応力集中が著しい問題にも本方法が有効に適用できるかどうかを検討した。さらに上記(3)、(4)の長所に着目し、着力点の一部を領域外に置き、他の着力点を境界上に取り、非特異直接法と通常の直接法を併用する解法を提案し、この解法が角点の両側で表面力が未知となる問題にも容易に対処でき、BEM の計算効率の向上も期待できることを明らかにした。

2. 基礎式

図1に示すような弾性境界値問題を考える。対象とする弾性領域を Ω 、その外側の領域を Ω^* 、その境界を Γ とする。領域内の点 p に対して、Betti の相反定理より次式の Somigliana の公式を得る⁽⁸⁾。

$$\begin{aligned} u_i(p) + \int_{\Gamma} T_{ij}(p, Q) u_j(Q) d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} U_{ij}(p, Q) t_j(Q) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}(p, q) b_j(q) d\Omega \\ (p, q \in \Omega, Q \in \Gamma) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $U_{ij}(p, Q)$ 、 $T_{ij}(p, Q)$ は Kelvin の基本解である。 $b_i(q)$ は物体力を表す。境界上のすべての点の変位 $u_i(Q)$ 、表面力 $t_i(Q)$ が得られた後、式(1)により、 Ω 内の任意の点 p での変位が求められる。

p を Γ 上の点 P に移行すれば、次の Somigliana の境界積分公式が得られる。

$$\begin{aligned} C_{ij} u_j(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma \\ + \int_{\Omega} U_{ij}(P, q) b_j(q) d\Omega \quad (P, Q \in \Gamma, q \in \Omega) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(2)が通常の直接法の基礎式である。 P が Γ 上にあるので、積分核の特異性のため、式(2)の積分は特異積分となる。

図1 弾性体の境界値問題

さらに、点 P が Γ 上から、 Γ の外側の領域 Ω^* の点 p^* に移行すれば、次の内部相反公式を得る⁽⁹⁾。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} T_{ij}(p^*, Q) u_j(Q) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(p^*, Q) t_j(Q) d\Gamma \\ + \int_{\Omega} U_{ij}(p^*, q) b_j(q) d\Omega \\ (p^* \in \Omega^*, Q \in \Gamma, q \in \Omega) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(3)は式(2)の C_{ij} を零とした式となっている。式(2)の代わりに、式(3)を直接離散化して解くのが、非特異直接法である。基本解の着力点 p^* は、 Γ 上にないので、積分はもはや特異積分とはならない。式(3)の積分方程式が解けるかどうかの議論は別として、式(3)の物理的意味は明白である。すなわち、式(3)は、物体力のない基本解による荷重系と、 Ω 内に物体力のある対象とする境界値問題の解による荷重系との間に成り立つ Betti の相反定理にほかならない。式(2)に基づく直接法では、 P 点の個数は、境界上の節点の個数しか取ることができないので、高次要素で分割する場合、図2のような、角の両側で表面力が未知の問題は方程式が不足して解けない。なぜなら、図2のように角の両側の表面力を代表する二重節点を用いても、その幾何学的位置は同じであるので基本解の着力点の一つしか取れないからである。このような場合でも、非適合要素⁽⁹⁾を用いれば問題を解くことができるが、この時は、一定要素により離散化した場合と同じく、角点で変位の適合性が保証されない。しかし、式(3)に基づけば、着力点の数は境界上の節点の数に制約されないので、必要なだけ方程式を作ることが可能となる。よって、上述の角点も容易に処理でき、しかも幾何学的に適合な解を得ることができる。

また、非特異直接法も直接法であるから、一部の境界上では着力点を境界上におき、他の部分では着力点を境界の外におくこともでき、直接法と非特異直接法とを併用して解を得ることもできる。

3. 離散化解析

非特異直接法は、着力点を領域外に取る以外は通常の直接法の離散化解析と同じであり、直接法のプログラムがそのまま利用できるのが大きな利点である。本研究においてもすでに報告した直接法のプログラムをそのまま用いた⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。本プログラムは、2次のアイソパラメトリック要素を用い、Lachat ら⁽⁹⁾に従い誤差評価法に基づく効率化した数値積分スキームを導入している。

非特異直接法で解析する場合には、基本解の着力点

図2 角点の両側で表面力が未知の問題

は境界の外に置くため、積分は特異積分となることはない。しかし、着力点を境界のごく近傍に置く場合には、積分核の性質上、数値積分の精度が低下すると考えられる。このため、以下のようなスキームを採用し、積分精度の向上を図った。すなわち、図3の(a)のように境界要素と領域外の着力点 p^* が位置している場合を考える。点 p^* と各節点間の距離の最小値を、 $R = \min(R_1, R_2, R_3)$ とし、要素の節点間の距離を L とするとき、 $R \leq L$ のとき、図3のように要素をサブ要素に分割して数値積分を実行する。例えば、 $R = R_2$ のときは(c)のように、 $R = R_3$ に対しては、(d)のように分割する。この方法は、直接法の特異積分スキームと同様である。

内点の変位や応力は、離散化解析により得られた境界上の変位と表面力の境界積分により直接法と同様に求められる。ただし、直接法の場合と同様に境界近傍の変位・応力の計算にも上述と同様な問題が生じ、数値積分の向上を図る必要がある。この際、上述の特異積分のスキームが利用できる。図4(a), (b)はそれぞれ一様引張応力を受ける正方形板の内点 p の変位・応力の BEM 直接法の解析結果である。それぞれ一辺を2要素に分割した正方形板の内点 p が境界に近づいた場合の変位と応力の誤差を示しており、積分核の特異性を考慮しないと、点 p が要素長の半分程度内まで境界に近づくと大きな誤差が生じている。一方、サブ要素に分割するスキームを用いると、境界近傍まで正解が得られていることがわかる。この結果からも、境界の内・外にかかわらず、着力点が境界に近接した場合には、サブ要素法等により数値積分の精度向上を図ることが BEM では特に重要であることがわかる。

図3 サブ要素分割のスキーム

4. 非特異直接法による解析例

非特異直接法により問題を解析する場合、着力点を置く位置の決定が重要な問題となる。原理的には、任意の位置に着力点を選ぶことができるが、数値計算上着力点を境界から遠ざければ遠ざけるほど、着力点同志がお互いに近接した状態となり、それぞれに対する方程式は数値的に区別できなくなり、方程式の係数行列が特異になりやすい。また、着力点を境界に近い所に取り場合、前述のように数値積分精度が問題となる。そこで、均一応力場の問題と応力集中の著しい円孔やき裂問題に対して、着力点の境界からの距離を広範囲に変化させ、非特異直接法による BEM 弾性解析を行い、正しい解の得られる着力点の位置・配置について調べた。また、この非特異直接法が応力集中の著しい問題にも有効に適用できるかを検討した。

4.1 一様引張りを受ける正方形板の解析 まず、図5に示す一様引張応力 σ を受ける正方形板について、着力点の境界からの距離と解の精度との関係を調べた。問題の対称性から、ハッチングをした1/4の領域を解析した結果を図6に示す。境界は各辺それぞれ2要素に分割し、角点には無限微小要素を置いた⁽¹¹⁾。着力点は境界から法線方向に d だけ離して置き、各節点間の距離 L との比 d/L を横軸に、得られた④点反力の相対誤差の絶対値を縦軸にしてプロットした。図中、黒丸印でプロットしているのは、着力点を境界に近づけても、数値積分をなんら工夫しなかった場合の結果である。 $d/L = 0.5 \sim 10.0$ の広い範囲で破線で示した同一モデル、同一要素分割に対する通常的直接法の解よりも、高精度の解が得られている。しかし、 $d/L \geq 10.0$ では、解の誤差の出方は不安定になり、また $d/L < 0.5$ で、着力点が境界に近接した場合も精度が

図4 表面近くの内点の変位・応力解の誤差

悪くなる。

同じ着力点の配置で、着力点が節点間の距離よりも境界に近づいた時に、サブ要素に分割するスキームを取り入れ、数値積分の精度を上げると、図の白丸印で示すように、 $d/L \rightarrow 0$ まで高精度な解が得られた。

この問題の解析に要した CPUtime を、 d/L を変化させて図 7 に示す。ただし、図 6 の解析と異なり、各辺を 5 要素に分割し、全体で 20 要素の細かい分割の場合であるが、 d/L と誤差の関係は図 6 の場合とほぼ同

図 5 一様引張りを受ける正方形板

図 6 着力点の境界からの距離 d と反力 σ^* の相対誤差の関係 (8 要素)

図 7 着力点の位置と CPUtime の関係 (図 5, 20 要素)

様の結果を得ている。サブ要素法を用いなければ、CPU time は少なく済み、特に $d/L > 1$ でその効果は著しい。しかし、サブ要素法を用いると、当然積分時間が増加し、通常の直接法の CPU time と同じになり、もはや非特異直接法の特異積分をしないてよいという利点は失われる。

図 6 と図 7 の結果を総合して判断すると、このような均一応力場の問題に対しては、サブ要素法を用いなくても d/L の比較的広範囲に渡って直接法よりもよい精度の解が得られる。CPU time も軽減できるので、この非特異直接法は極めて有効であるといえる。また着力点を境界のごく近傍に置く場合には、CPU time は軽減できないが、特異積分の場合と同様にサブ要素に分割するスキームを用いて、数値積分の精度を上げると正しい解が得られることが明らかとなった。

なお、この種の問題では、着力点の配置の仕方はかなりの任意性があるが、境界の法線方向にある距離だけ離して置くほうが望ましいことが既報⁽¹²⁾で明らかとなったので本研究では、すべて境界の法線方向に一定距離の点に着力点を置くこととした。

4.2 円孔の応力集中問題の解析 応力場が複雑な問題でも非特異直接法が有効であるかどうか検討するため、図 8 のような一様引張りを受ける円孔のある正方形板の 1/4 領域を解析した。着力点を図 9 (a) のように、すべて境界の外に距離 d だけ離れた場合と、図 9 (b) のように応力の変化が著しい円孔の近辺は境界上に置き、他は境界の外に置いた場合とについて、

図 8 円孔のある正方形板

図 9 着力点の配置の仕方

応力集中係数を調べた。

図10は、全着力点を境界の外に置いた場合の結果である。通常の直接法で得られた値(図の破線)を信頼できる解とした場合、サブ要素法を用いないと、着力点が境界に近い時(d/L が小さい時)は7%程度小さい値となり、 $d/L \approx 0.25$ 付近で正解と一致するが、その d/L の範囲は極めて狭く、すぐに発散する。しかし、着力点が境界に近い時、サブ要素に分割するスキームを採用すると、図で示した全範囲で通常の直接法とほとんど等しい結果が得られた。図にはプロットしていないが、 $d/L = 0.75 \sim 2.5$ では、方程式は解けるが、得られた表面力の分布が振動しており方程式の係数行列の状態がよくないことがわかる。 $d/L > 2.5$ では係数行列が特異になり解が得られなかった。

このように、非特異直接法で円孔のような応力集中の問題も解くことができるが、応力の変化の少ない問題と違って、着力点をより境界に近づけなければならないことがわかった。また、その際、サブ要素に分割するスキームを採用することで、精度の安定した解が得られることがわかった。

図10 全着力点を外部に置いた時の応力集中係数 (19要素)

図11 一部の着力点を外部に置いた時の応力集中係数 (19要素)

しかし、この場合、着力点を境界の外に置いて特異積分を避ける利点は失われる。そこで、応力状態が複雑な円孔の周辺では、着力点を境界上に置き、他の部分は着力点を境界の外に置いて、通常の直接法と非特異直接法を併用する解法を開発した。その解析結果を図11に示す。全着力点を境界の外に置く場合に比べて、サブ要素に分割しなくても、比較的良好な精度の解(1%以内)が得られた。また、サブ要素に分割した場合、 d/L の全範囲にわたって良好な精度の解が得られた。この解法は、非特異直接法の利点を活かすことができ、しかも着力点の位置によらず、安定した精度のよい解が得られるので、有力な解法と考えられる。

4.3 き裂問題の解析 応力状態が極めて複雑な問題として、図12のような長さ $2a$ の直線き裂を有する幅 $2W$ の正方形板を解析し、得られたき裂先端近傍の変位の解から外挿法により応力拡大係数 K_I を求めた。対称性よりハッチングした部分の境界を26要素に分割し、き裂先端には特異要素を用いた。全着力点を境界の外に置いた場合と応力変化の激しいリガメント部は着力点を境界上に置き、他の部分は境界の外に置いた場合の解析結果を図13に併示した。

き裂の解析では、着力点を境界に近接して置かざるを得ず、そのため、いずれの場合もサブ要素分割のスキームを使って積分した。全着力点を境界の外に置い

図12 一様引張りを受ける中央直線き裂を有する正方形板

図13 着力点の位置と応力拡大係数の関係(図12)

た場合、平滑材や円孔の場合と大きく異なり、 $d/L < 10^{-3}$ で初めて正解が得られ、 $d/L > 10^{-3}$ となると得られた F_I の値は次第に大きくなった。 $d/L \approx 1.0$ では、見かけ上、 F_I の精度はよくなっているが、得られたリガメント部の表面力の分布は振動しており、方程式の係数行列の状態がよくないことがわかる。しかし、通常の直接法を、応力変化の激しい部分に併用すれば、図に示した d/L の全範囲にわたって通常の直接法と同程度の精度の解が得られることがわかった。

次に、本方法を混合モードき裂の解析に適用した。図 14 のような、長さ $2a$ 、傾斜角 45° の中央き裂を有する幅 $2W$ 、高さ $2H$ の長方形板を、き裂の上面と下面とに分ける領域分割法によって解析した。領域 1、領域 2 とともに 30 要素に分割し、き裂先端に特異要素を配した。全着重点を境界の外に置いた場合と、き裂面、リガメント部は着重点を境界上に置いた場合について、変位による外挿法で得られた F_I, F_{II} の解析結果を図 15 に示す。いずれも、着重点が境界に近い場合はサブ要素に分割して積分した。混合モードき裂の場合も、モード I の場合と同じ傾向の結果が得られた。ただし、この場合は $d/L > 0.05$ で、方程式の係数行列が特異になり、モード I の場合よりも、着重点をいっそう境界に近い所に置かなければならないことがわかった。また、応力変化の少ない所だけ着重点を境界の外に置き、通常の直接法を併用すれば、 $d/L \leq 0.25$ まで、通常の直接法と同じ精度の解が得られた。

以上の解析結果から、着重点を領域の外にとる非特異直接法によっても解が得られる事実は興味深いが、円孔からき裂と応力状態が厳しくなるに従い、着重点を境界のごく近傍に置かないと正しい解が得られなく

なることが明らかとなった。着重点を境界の近傍にとると、特異積分と同じスキームを用いなければならぬので、非特異直接法は実用上必ずしも有効とはいえない。しかし、本研究で提案したように応力変化の激しいことが予想される部分のみ、境界上に着重点を取り、直接法と併用することにより、着重点の位置によらず、精度のよい解が得られることがわかり、今後この解法が、直接法と非特異要素法の両者の利点を活かした効率的な BEM 解法となりうるものと期待される。

また、直接法と非特異直接法が容易に併用できることが明らかとなったので、これを利用した角点の問題の取扱いを以下に試みる。

5. 角点の両側で表面力が未知の問題の解析

角点の両側で変位を拘束してあるような問題⁽¹¹⁾は、高次適合要素を用いた通常の直接法では方程式が不足して解くことができない。このような問題は、領域分

表 1 節点 1~9 で得られる表面力
($\sigma = 0.4 \times 10^{-3}$, $E = 1.0$, $\nu = 0.3$ 平面応力)

NODE	OBTAINED TRACTION	
	t_x	t_y
1	0.0	-0.399979E-3
2	0.0	-0.400012E-3
3	0.0	-0.399997E-3
4	0.0	0.0
5	0.0	0.0
6	0.0	0.0
7	0.0	-0.399996E-3
8	0.0	-0.400000E-3
9	0.0	-0.399978E-3

図 14 一様引張りを受ける中央傾斜き裂を有する長方形板

図 15 着重点の位置と応力拡大係数の関係 (中央傾斜き裂)

図 16 領域分割法における結合部分の角点の未知量

図 17 折れ曲がった結合部分をもつ領域分割法における着重点の位置

割法において、結合部分の境界が滑らかでない場合にも生じる。すなわち、図 16 のように領域 1 と領域 2 の境界が鋭く折れ曲がっていると、角点において、変位ベクトル $\vec{u}$ と、角点の前後の表面力ベクトル $\vec{i}_{na}, \vec{i}_{nb}$ の三つの未知ベクトルが存在するため、方程式の不足が生じる。このような場合にも、着力点を境界の外に置けば、境界の節点数に拘束されないで、必要な数の方程式を作ることができるので、特別の工夫をしなくても容易に対処できる。その際、非特異直接法と、通常の直接法は併用できることが明らかとなったので、すべての着力点を境界の外に置く必要はなく、領域 1, 2 のいずれかで着力点を一つまたは二つ境界の外に置いて方程式を増やせばよい。例題として、前述の図 5 の一様引張応力を受ける正方形板の 1/2 の領域を図 17 のように折れ曲がった境界で二つの領域に分割して領域分割法で解析した。図のように、鋭角の角点は二つの着力点を境界から節点間の距離の 1/4 だけ離して外側に置き、鈍角の角点は、着力点を境界上に置いて計算した。表 1 に結合境界上の各節点で得られた表面力の解を示す。本解析により、表面力がよい精度で求められることがわかる。このように、折れ曲がった境界で分ける領域分割法や、複数の領域が一点で出合う領域分割法〔図 2 の (b)〕なども、通常の直接法に、非特異直接法を採用することで、非適合要素を用いなくても簡単に対処でき、しかも幾何学的に適合な解が得られることがわかった。領域分割法を有効に活用して、BEM の効率化を図る上で、ここで提案した方法は適用が容易であり、有力な解法となり得ると思われる。

6. 結 論

Somigliana の内部相反公式に基づく非特異直接法を二次元静弾性問題に適用し、本方法の有効性、可能性と限界について各種の数値解析例を通じ検討し、以下の主要な結果を得た。

(1) 均一応力場の問題に対しては、着力点の配置の仕方にはかなり任意性があり、着力点を境界の法線方向にかなり離して配置しても、通常の直接法よりよい精度の解が得られ、非特異直接法は有効である。

(2) 境界に近接して着力点を配置すると数値積分の誤差が大きくなるが、直接法の特異積分のスキームを取り入れ、サブ要素に分割して積分を実行すると着

力点を境界にいくら近づけてもよい精度の解が得られることがわかった。またこのスキームは、表面近くの内点の変位、応力の計算にも非常に有効である。

(3) 円孔のような応力集中のある問題では、着力点をより境界に近づけなければならない、特に、き裂問題のような応力変化の著しい問題では、境界のごく近傍に着力点を置かなければ、サブ要素分割スキームを取り入れてもよい精度の解が得られないことがわかった。したがって、このような問題においては非特異直接法の利点は失われる。

(4) しかし、この場合にも、応力変化の著しい境界では着力点を境界上に置き、それ以外は境界の外に置いて、通常の直接法と併用すれば、解は収束して精度よい解が得られる。

(5) 通常の直接法に、非特異直接法を併用すれば、角点の両側で表面力が未知の問題にも容易に対処でき、領域分割法への応用が期待できる。

文 献

- (1) Brebbia, C. A., ほか 2 名, "Boundary Element Techniques" (1984), Springer-Verlag. : 田中(正)訳, 「境界要素解析—理論と応用」, (昭 59), 丸善.
- (2) 鷲津・田中(正)・田中(喜), 「境界要素法—基礎と応用」, (昭 57), 丸善.
- (3) Lachat, J. C. and Watson, J. O., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10 (1976), 991.
- (4) Patterson, C. and Sheikh, M. A. (Taylor, C., ほか編), *Regular Boundary Integral Equations For Fluid Flow*, *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, (1981), Pineridge Press.
- (5) Patterson, C. and Sheikh, M. A. (Brebbia, C. A. 編), *Application of The Direct Regular Methods to Linear Elastic Fracture Mechanics*, *Boundary Elements* vi, (1984), 9-29, Springer-Verlag.
- (6) 本間・田中・加地, 第 2 回境界要素法シンポジウム, (昭 60), 25.
- (7) 本間・槌本・加地, 第 2 回境界要素法シンポジウム, (昭 60), 275.
- (8) Jaswan, M. A. and Symm, G. T., "Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics", (1977), Academic Press. : 関谷訳, 「境界要素法間接法と直接法」, (昭 58), 66, プレイン図書.
- (9) Patterson, C. and Sheikh, M. A. (Brebbia, C. A. 編), "Nonconforming Boundary Elements for Stress Analysis" *Recent Advances in Boundary Element Methods*, (1981), Springer-Verlag.
- (10) 木須・結城・北川, 機論, 51-463, A (昭 60), 660.
- (11) 結城・木須・松本, 第 1 回境界要素法シンポジウム, (昭 59), 85.
- (12) 松本・結城・木須, 第 2 回境界要素法シンポジウム, (昭 60), 215.

討 論

〔質問〕 関 谷 壮〔大阪電気通信大学工学部〕

穴やき裂のある有限領域の問題を非特異性有限要素法で解析する方法を示され、実際に扱われた多くの数値計算結果から、境界近傍での解の精度向上に有益な数々の結論を得られたことに敬意を表する。以下の諸点についてお伺いしたい。

(1) 境界要素法ではいったん積分方程式の形に基礎式を定式化し、しかる後なんらかの数値積分法で、連立代数方程式の形に基礎式を離散化するが、数値積分の重み係数と未知関数の積をひくくめて未知数とし、最初から積分に対応する総和の形で定式化する特異点法(代用電荷法)により取扱えば、数値積分の手数が省けるように思うが、いかがお考えか。

(2) 円孔またはき裂を含む有限領域の問題の場合、円孔またはき裂を含む無限領域問題に対する解析解を、与えられた有限領域の境界条件を満たすように、本論文の解析法によって補正すれば、少ない要素数で扱うことができるか。

〔回答〕 (1) 本方法は、着力点を境界の外に配置する以外は通常の直接法と全く同じであるため、離散化に際し数値積分を行わなければならない。しかし、

定式化の段階で積分核の特異性が存在していないので、一様応力場の正方形板の解析例からもわかるように数値積分の精度は確かに向上しているといえる。数値積分の手数の面だけから考えればほかにも種々の便利な方法が考えられ、代用電荷法、間接法などもその一つであろう。しかし静弾性問題においては、現在のBEM直接法のスキームは、精度、汎用性ともに優れていると考えられる。本報は、その汎用性をくずさない範囲内で、非特異直接法の改善、検討を行ったものである。

(2) まだ、そのような検討は加えていないが、有益な示唆であることに謝意を表したい。基本解として、円孔やき裂の境界条件を満たす解を用いることで、直接法、非特異直接法にかかわらず応力場の複雑な部分に未知数を置く必要がなくなり、少ない要素数で精度のよい解が得られることが期待できる。特に、非特異直接法の有効性が発揮されるものと考えられる。しかし、そのような解が存在する問題は、二次元弾性問題の一部に限定され、また存在したとしても式の複雑さ等の扱い難さのため汎用性を多少犠牲にしなければならないので、一長一短があるものと思われる。