円周みぞをもつ丸軸のねじりによる応力集中率*
(第 3 報, 設計公式)

加 藤 章**

Stress Concentration Factor of a Shaft with a Circumferential
Groove in Torsion
(3rd Report, Design Formula)

by Akira KATO

A design formula has been derived to obtain stress concentration factors of grooved shafts with several kinds of groove shapes in this investigation. This formula was derived based on the analytical result for infinitesimal grooves and experimental values of the author et al., and numerical values of other investigators for finite grooves. The formula agreed fairly well with the numerical values of Nishitani et al. for a wide range of groove sizes. A comparison with Neuber's formula showed that Neuber's formula gives much lower values than the present one, especially for deep grooves.

Key Words: Elasticity, Design Formula, Stress Concentration Factor, Grooved Shaft, Torsion

1. ま え が き

著者はこれまでに、半円形、浅い円弧形および深い U 形円周みぞをもつ丸軸のねじりによる応力集中率を銅めつき法によって測定した⁽¹⁾⁽²⁾。この問題についてはすでに西谷ら⁽³⁾⁽⁴⁾、Matthews ら⁽⁵⁾、長谷川ら⁽⁶⁾、浜田ら⁽⁷⁾、斎藤⁽⁸⁾が数値計算によって検討している。特に、西谷らは半だ円形、V 形円周みぞなどの場合に対して一連の計算結果を報告している。これらの計算結果と著者の実験値とは半円形円周みぞの場合について良く合っていることはすでに報告したとおりである⁽¹⁾。

また、著者は微小円周みぞをもつ丸軸がねじりを受ける場合の応力を流れ関数を用いて解く方法によって各種の形状の円周みぞの応力集中率を求めた⁽⁹⁾。そして、円周みぞの形状の違いによる応力集中率の相違について検討した。

円周みぞの応力集中率に対する広はんな設計公式として Neuber の公式があるが⁽¹⁰⁾、この公式は無限に小さい半だ円形円周みぞと無限に深い双曲線形円周みぞ

に対する理論解を基にして作られており、対象とするみぞ形状が明確ではない。この公式による計算値は少し小さめの値を与えることがすでに多くの研究者によって報告されている。

本研究では無限小円周みぞに対する著者の計算結果と有限の大きさの円周みぞに対する著者らの実験結果およびこれまでに多くの研究者によって得られている計算結果、特に広はんに求められている西谷らの結果を用いて各種のみぞ形状について容易に応力集中率を求めることができるような設計公式を求めてみた。そして、従来の計算結果および Neuber の公式などと比較し、その妥当性を検討した。

2. 無限小円周みぞに対する計算値

2・1 計算方法 無限小の円周みぞをもつ丸軸が

図 1 円周みぞをもつ丸軸

* 昭和 61 年 4 月 1 日 第 63 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 60 年 8 月 12 日。

** 正員、中部大学工学部 (〒487 春日井市松本町 1200)。

ねじりを受ける場合の計算方法について概略を述べる。いま図1のような円周みぞをもつ丸軸がねじりを受ける場合を考える。ここに、 t, ρ, d および D はそれぞれ、みぞの深さ、みぞ底の曲率半径、最小直径および軸径を示す。円周みぞの大きさは軸径に比べてきわめて小さいと考える。この場合の応力は図2に示すような物体が二次元一様流の中に置かれた場合の物体まわりの流速に置き換えられることはすでに報告したとおりである⁽⁹⁾⁽¹¹⁾。この場合の流速を求めるには、 $\zeta = \xi + i\eta$ 面上で速度 U の流れの中に置かれた単位円柱まわりの流れの複素速度ポテンシャル

$$F(\zeta) = U \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

を考え、これを写像関数 $z = z(\zeta)$ によって図2の物体まわりに写像すればよい。ここでは、この写像関数を次式のように級数で与え、

$$z(\zeta) = C_0 \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \zeta^{-n+1} \quad \dots\dots\dots (2)$$

(ここに、 $C_n = A_n + iB_n$)、この係数をすでに報告したような逐次近似法で求めるわけである⁽⁹⁾。写像関数が求まれば、流速は次式

$$u - iv = \frac{dF}{dz} = \frac{dF}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = U \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) / z'(\zeta) \quad \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる。また、 $u_{\infty} = U/A_0$ となるので、

$$u/u_{\infty} - iv/u_{\infty} = A_0 \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) / z'(\zeta) \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。応力は流速に対応するので、応力集中率は u_{∞} と図2のA点における流速 $u_{\max}$ との比で与えられ、次のようになる。

$$k_0 = \tau_{\max} / \tau_{\infty} = u_{\max} / u_{\infty} = 2A_0 / z'(i) \quad \dots\dots\dots (5)$$

以下この方法を用いて各種の形状の円周みぞの応力集中率を求めてみた。

2.2 浅い円弧形円周みぞの場合 半円形よりも浅い場合、すなわち、 $t/\rho < 1$ の場合に最も良く使われるのは円弧形円周みぞである。この場合にはすでに報告したように⁽¹¹⁾、写像関数は閉じた形で与えられ、厳

図2 二次元一様流中の物体

密解が得られている。この場合の応力集中率は次式

$$k_{0c} = \frac{2 - t/\rho}{2 \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(1 - \frac{t}{\rho} \right) \right\}^2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

で与えられる。

2.3 U形円周みぞの場合 次に、 $t/\rho > 1$ の深い場合について、みぞ底が半円形で、側面が平行なU形円周みぞについて計算してみた。ここでは、 $t/\rho = 1.25$ から40までについて計算を行った。計算結果は図3に示すとおりである。 $\log(k_{0U} - 1)$ と $\log(t/\rho)$ との間には直線関係があり、応力集中率は近似的に次式

$$k_{0U} = 1 + (t/\rho)^{0.556} \quad \dots\dots\dots (7)$$

で表されることがわかる。

2.4 V形円周みぞの場合 みぞ底が円弧形のV形円周みぞについて、応力集中率 k_{0V} と開き角 θ との関係を図4に示す。ここに、 $\theta = 0^\circ$ は前述のU形円周みぞの応力集中率である。 t/ρ が大きくなるほど、開き角による影響が大きくなるが、 $t/\rho \leq 4$ であれば、 θ が 90° 以内では応力集中率はあまり低下せず、U形の場合とそれほど違いがない。

次に、開き角の影響を明確にするために、角度係数 $(k_{0V} - 1) / (k_{0U} - 1)$ を求め、開き角との関係を表せば、図5に示すようになる。すでに報告したように角度係数と θ の間には次式

$$\frac{k_{0V} - 1}{k_{0U} - 1} = 1 - \left(\tan \frac{\theta}{4} \right)^4 \quad \dots\dots\dots (8)$$

の関係がある。ここで、 $A = 0.4 + 4.6 / \sqrt{t/\rho}$ で表されると以前に報告したが⁽⁹⁾、この計算式では t/ρ がかなり大きくなった場合に計算結果と合わない。そこで、今回 t/ρ が大きい場合の k_{0V} を求めて近似式を求めた

図3 U形円周みぞ(無限小)の応力集中率

ところ, $A=0.8+4.2/(t/\rho)^{0.6}$ で表されることがわかった。この定数 A を用いれば, 式(8)によって $t/\rho=40$ 程度の場合にも計算結果に良く合う。

3. 設計公式の導出

3.1 半円形円周みぞの応力集中率 一般の有限の大きさをもつ半円形円周みぞつき丸軸の応力集中率については, 西谷らをはじめとして⁽³⁾, Matthews ら⁽⁵⁾, 長谷川ら⁽⁶⁾, 浜田ら⁽⁷⁾, 齊藤⁽⁸⁾の各計算結果など数多く報告されている。図6に西谷ら, Matthews らの計算結果および著者の実験結果⁽¹⁾を示した。これらの結果は非常に良く合っていることがわかる。長谷川らの結果は西谷らの結果とほとんど同じであり, 浜田ら, 齊藤の結果は図に示した値よりわずかに高いが, ほぼ近い値になっている。

いま, $\log\{\tan\{(\pi/2)(k_0-k)/(k_0-1)\}\}$ と $\log(\rho/d)$ の関係を調べてみる。ここに, k_0 は無限小円周みぞの場合の k の値で, 半円の場合には2である。図6の結果からこの関係を求めれば, 図7に示したように直線関係にあることがわかる。したがって, 次式

$$\log\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{k_0-k}{k_0-1}\right)\right\} = B' + C \log(\rho/d) \cdots \cdots (9)$$

が成り立つことがわかる。すなわち, 応力集中率は

$$k = k_0 + (1-k_0) \frac{2}{\pi} \tan^{-1}\{B(\rho/d)^C\} \cdots \cdots (10)$$

で与えられることがわかる。ここで, 図7の結果からこの係数 B, C を求めれば, $B=8.1390, C=0.8885$ が得られる。図6の曲線はこの B, C の値を用い, 式(10)によって求めたものであるが, 数値計算および実験の結果と非常に良く合っていることがわかる。

3.2 係数 B, C の決定 半円形以外の円周みぞについて著者らは $t/\rho < 1$ の場合には円弧形, $t/\rho > 1$ の場合には U 形円周みぞについて銅めっき法を用いて応力集中率を測定した⁽²⁾。それらの測定値を表1(a)に示す。また, 西谷らは半円形円周みぞについて広範囲に計算を行っている⁽⁴⁾。それらの一部を表1(b)に示す。

図4 V形円周みぞ(無限小)の応力集中率

図5 角度係数

図6 半円形円周みぞの応力集中率

以上の結果から、各 t/ρ の値について式(10)の定数 B, C を求めてみた。ここで、各 t/ρ の場合について $\rho/d \rightarrow 0$ の無限小円周みぞの場合の応力集中率 k_0 の値は半だ円形円周みぞの場合には $k_0 = 1 + \sqrt{t/\rho}$ で与えられる。また、円弧あるいはU形円周みぞの場合には2章に述べたとおりである。それぞれの k_0 の値を表2に示した。これらの値を用いて求めた B, C の値はそれぞれ表2に示すとおりである。これらを図示したのが図8(a), (b)である。著者らの実験結果と西谷らの計算値では扱った円周みぞの形状が少し異なるが、 B, C の値はほぼ同じような値を示している。このことは多少みぞ形状が異なっても、 k は同様に式(10)で表されることを示しているといえる。

図8から、 $\log B$ と $\log(t/\rho)$ の関係はほとんど直線上に乗っていることがわかる。また、 $\log C$ と $\log(t/\rho)$ の関係は $t/\rho = 0.5$ の実験値を除けば、ほぼ一つの直線で表されるといえる。これらの関係から B, C はそれぞれ次式

$$B = 7.63(t/\rho)^{0.45}, C = 0.87/(t/\rho)^{0.059} \dots\dots(11)$$

で与えられることがわかる。したがって、円周みぞの応力集中率を求めるには、まず考えている円周みぞの寸法比、 t/ρ 、に関して2章で述べた無限小円周みぞに対する応力集中率 k_0 を求め、上式によって、 B, C を求めて、式(10)を用いればよいことになる。

4. 設計公式による計算値

4.1 半だ円形円周みぞの場合 半だ円形円周みぞの場合について、 $k_0 = 1 + \sqrt{t/\rho}$ を用いて、式(10)、(11)より広い範囲にわたって応力集中率を求めてみると、図9のようになる。図中で○印は西谷らの半だ円形に対する計算値であるが⁽⁴⁾、西谷らの値と本公式とはかなり良く合っており、最も違いの大きいところでも、その差は2%以内である。本公式は限られた範囲

の t/ρ 、あるいは ρ/d に対する実験値あるいは計算値から求められた近似式にすぎないが、かなり広い範囲の寸法比に対して西谷らの値に合っていることがわかる。

図9中の破線は Neuber の公式による値であるが、かなり低い値を示していることがわかる。

4.2 浅い円弧形および深いU形円周みぞの場合 円周みぞの形状として最も広く用いられている $t/\rho < 1$ の浅い場合の円弧形および $t/\rho > 1$ の深い場合のU形円周みぞについて考えてみる。この場合の k_0 の値は2章で述べたとおり、円弧形の場合には式(6)の k_{0c} で、U形の場合には式(7)の k_{0u} で与えられる。

表1 円周みぞをもつ丸軸の応力集中率

(a) 実験値 ⁽²⁾ (円弧およびU形)			(b) 西谷ら ⁽⁴⁾ (半だ円形)		
t/ρ	ρ/d	k	t/ρ	ρ/d	k
0.25	0.1	1.36	0.2	0.2778	1.224
	0.125	1.34		0.625	1.125
	0.15	1.31	0.5	0.0526	1.537
	0.176	1.28		0.1111	1.418
	0.2	1.29		1	1.079
0.5	0.1	1.44	2	0.0278	1.969
	0.125	1.39		0.0625	1.691
	0.15	1.35		0.1667	1.365
	0.176	1.31	4	0.0313	2.062
	0.2	1.29		0.0813	1.602
2	0.1	1.53	0.5	0.0125	2.809
	0.125	1.43		0.0214	2.407
	0.15	1.39	10	0.05	1.851
	0.176	1.35		0.0167	2.671
	0.2	1.32		0.0375	2.025
4	0.1	1.58	20	0.025	2.321
	0.125	1.46		0.15	1.388
	0.15	1.38	30		
	0.176	1.36			
	0.2	1.32			

表2 係数 B, C の値

(a) 実験値			
t/ρ	k_0	B	C
0.25	1.4760	3.4023	0.9233
0.5	1.6875	6.8512	1.0301
1	2	7.8212	0.8882
2	2.4668	10.4870	0.8128
4	3.1637	16.4228	0.8488

(b) 西谷ら			
t/ρ	k_0	B	C
0.2	1.4472	3.3053	0.9355
0.5	1.7071	5.6042	0.9052
1	2	8.2481	0.8918
2	2.4142	10.0475	0.8172
4	3	15.2421	0.8155
10	4.1623	20.4594	0.7407
20	5.4721	26.7749	0.7037
30	6.4772	34.3578	0.7091

図7 $\log\{\tan\{(\pi/2)(k_0-k)/(k_0-1)\}\}$ と $\log(\rho/d)$ の関係

(a) B と t/ρ の関係 (b) C と t/ρ の関係図 8 係数 B, C

これらを用いれば、式(10), (11)から応力集中率を求めることができる。表3および図10は著者らの実験値⁽²⁾および西谷らの計算値⁽¹²⁾と比較したものである。 $t/\rho=4$ の場合には本公式は少し高めの値を与えるようであるが、他の場合には良く合っていることがわかる。

図11は広い範囲の寸法比に対して本公式による計算値を示したものである。Neuberの公式による値とはかなり違いがあり、彼の公式は最大で15%程度低い値を示している。

4.3 V形円周みぞの場合 V形円周みぞの k_0 の値は2.3の k_{0V} で与えられるので、これを用いれば、式(10), (11)より k を求めることができる。一例として、60°V形円周みぞに対する応力集中率を図12に示す。西谷らが開き角60°の場合について広はんに計算しているが⁽⁴⁾、その計算値も合せて図12に示す。これらを比較すると、両者はほぼ合っているが、 t/ρ がかなり大きい場合、すなわち $2\rho/D$ がかなり小さく、 $2t/D$ が大きい場合には少し違いがあることがわかる。 $2\rho/D=0.02$ の場合には違いの最も大きいところでそ

図 9 半円形円周みぞをもつ丸軸の応力集中率

表 3 実験値および数値計算結果との比較

t/ρ	ρ/d	Eq. (10)	Experimental (2)	Nishitani et al. (12)
0.25	0.1	1.3441	1.36	1.341
	0.125	1.3181	1.34	1.318
	0.15	1.2947	1.31	1.296
	0.176	1.2728	1.28	1.276
	0.2	1.2548	1.29	1.260
0.5	0.1	1.4223	1.44	1.422
	0.125	1.3796	1.39	1.383
	0.15	1.3436	1.35	1.349
	0.176	1.3120	1.31	1.319
	0.2	1.2872	1.29	1.296
2	0.1	1.5436	1.53	1.544
	0.125	1.4669	1.43	1.467
	0.15	1.4096	1.39	1.409
	0.176	1.3637	1.35	1.361
	0.2	1.3300	1.32	1.326
4	0.1	1.5760	1.58	1.568
	0.125	1.4900	1.46	1.480
	0.15	1.4279	1.38	1.416
	0.176	1.3792	1.36	1.365
	0.2	1.3438	1.32	1.329

図 10 実験値および西谷らの計算結果との比較 (円弧形および U 形)

図 11 浅い円弧形および深い U 形円周みぞをもつ丸軸の応力集中率

の差は約5%である。

本公式による計算値は半だ円の場合には西谷らの値と良く合っているのにもかかわらず、V形円周みぞの場合には t/ρ がかなり大きい場合にのみ違いがあるという点については理解に苦しむところである。しかしながら、違いが比較的大きくなるのは図で $2\rho/D$ が0.02の場合には、 $2t/D$ が0.4以上、 $2\rho/D$ が0.03の場合、 $2t/D$ が0.5以上であり、 t/ρ では15以上という非常に深い場合である。このような深い円周みぞを実際に使用することはほとんどないので、あまり問題にならない。したがって、本公式は実際に使用される寸法比の範囲では十分な精度の応力集中率を与えるものと考えられる。

破線は Neuber の公式による計算値である。Neuber の公式では V 形円周みぞの場合には図表を用いて補正することになっているが、図表による補正では正確な値が求められないので、ここでは半だ円形円周みぞに対する値を示した。もし、補正を行えば、図に示した値よりもさらに低い値になり、本公式あるいは西谷らの値との違いはさらに大きくなる。したがって、Neuber の公式はかなり低い値を与えるものと考えられる。

5. む す び

本研究では無限小切欠きの計算値、銅めっき法による有限の大きさの円弧形および U 形円周みぞの実験値、そして同じく西谷ら、および Matthews らの半円形および半だ円形円周みぞに対する計算値を基にして各種の形状に対して実際に使用しやすいように設計公式を作成した。本公式による計算値は西谷らの半だ円および V 形円周みぞの計算値と広い寸法比の範囲で良く合っていることがわかった。

本公式をまとめれば、次のようになる。

$$k = k_0 + (1 - k_0) \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \{ B(\rho/d)^C \}$$

ただし、 $B = 7.63(t/\rho)^{0.45}$, $C = 0.87/(t/\rho)^{0.059}$

(1) 半だ円の場合

$$k_0 = 1 + \sqrt{t/\rho}$$

(2) 浅い円弧形の場合

$$k_0 = \frac{2 - t/\rho}{2 \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(1 - \frac{t}{\rho} \right) \right\}^2}$$

図 12 V 形円周みぞをもつ丸軸の応力集中率

(3) U 形円周みぞの場合

$$k_0 = 1 + (t/\rho)^{0.556}$$

(4) V 形円周みぞの場合

$$k_0 = 1 + (k_{0U} - 1) \left\{ 1 - \left(\tan \frac{\theta}{4} \right)^4 \right\}$$

$$\text{ただし, } A = 0.8 + 4.2 / (t/\rho)^{0.6}$$

k_{0U} : 円弧形あるいは U 形円周みぞの k_0

最後に, 本研究に対する動機を与えられた元中部工業大学教授の故大久保肇氏に深く感謝したい。また, 研究結果を引用させていただいた方々に謝意を表したい。

文 献

- (1) 加藤, 機論, 46-412, A (昭 55), 1378.

- (2) 加藤・水野, 機論, 51-462, A (昭 60), 386.
 (3) 西谷・橋本, 機論, 43-374, (昭 52), 3642.
 (4) 西谷・野田, 機論, 50-457, A (昭 59), 1592.
 (5) Matthews, G. J. and Hooke, C. J., *J. Strain Anal.*, 6-2 (1971), 124.
 (6) 長谷川・栗山, 機論, 49-443, A (昭 58), 838.
 (7) 浜田・ほか 2 名, 機論, 33-256 (昭 42), 1916.
 (8) Saito, K., *Mem. Fac. Ind. Arts, Kyoto Tech. Univ. Sci. & Technol.*, 21 (1972), 1.
 (9) 加藤, 中部大学工学部紀要, 20 (昭 59), 1.
 (10) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (1958), Springer, Berlin.
 (11) 加藤, 応力と歪, 4-1 (昭 53), 6.
 (12) 文献(2)の 392 ページ (西谷・野田の質問).

討 論

〔質問〕 長谷川 久夫 (明治大学工学部)

(1) 本論文で式(9)あるいは式(10)の関係を見つけた点に最も興味をもたれた。半円形の場合, 結果として, この関係がかなり厳密に成立しているらしいことが図 7 からわかるが, この関係を理論的に証明できるのか。

(2) 半円形のときの図 7 では極めてよく直線上に結果はのっているが, 半円形以外のときの図 8 では, 直線上に厳密にはのっていない。したがって, この場合に対しては, 式(9)あるいは式(10)にこだわらずに別の形を考えたほうがよいのではないか。

〔回答〕 (1) 式(10)は $\rho/d \rightarrow 0$ の場合に $k \rightarrow k_0 = 2$ (半円形), $\rho/d \rightarrow \infty$ の場合に $k \rightarrow 1$ になるような関数の中から図 6 の実験値あるいは数値計算値に最もよく合うと思われる関数を選んだものである。この式は実験式であって, $\rho/d \rightarrow 0$ と $\rho/d \rightarrow \infty$ の場合以外の有限の大きさの円周みぞに対しては理論的根拠はない。

(2) 本研究では各種の形状の円周みぞに対して容

易に適用できるような公式を導くことを目的としている。確かに, 円周みぞの形状ごとに式の形を変えたほうが厳密によく合うと思う。しかし, そのようにすると公式が非常に複雑になり, 設計公式として使いにくくなる。本研究では実用的な意味を考えて一つの式で表すことを考えてみた。

また, 係数 B, C については図 8 に示すように直線にあまり載っていないように見えるが, 直線と仮定して導いた公式による計算値は 4 章以下に示したように, 数値計算値あるいは実験値にかなりよく合っている。例えば, 違いの大きい場合で, 図 10 の $t/\rho = 4$ の U 形円周みぞの場合でも西谷らの計算値との違いは 1% 以内であるし, 図 12 の V 形円周みぞの場合には t/ρ が 15 以上といった非常に深い場合には違いが 5% 程度になるが, それ以外の場合にはよく合っている。したがって, 半円形以外の場合についても式(10)を用い, B, C の関係として式(11)を用いても実用的に十分であると思う。