ねじりを受ける段付棒の段部形状の最適化*

辻 知章** , 渋谷 寿一** , 小泉 堯**

An Optimum Configuration for a Stepped Bar under Torsion.

by Tomoaki TSUJI, Toshikazu SHIBUYA
and Takashi KOIZUMI

An optimum configuration for a stepped bar under torsion is obtained. The optimum configuration is obtained to minimize the stress concentration factor, when a length of the stepped region and two radii of the bar are given. First, the torsion problem of the stepped bar, whose configuration is given, is analyzed by the series expansion technique. Next, the optimum configuration is obtained by the Simplex method. Furthermore, stresses of the bar with the optimum configuration are obtained and are compared with stresses of the bar with the circular notch.

Key Words: Elasticity, Stepped bar, Optimum configuration, Stress concentration factor, Torsion

1 緒 言

段付棒が外力を受けると、側面形状が変化する段部に応力集中が生じ、これを緩和する方法はいくつか報告されている。Thum および Baud⁽¹⁾ は容器の穴から流れ落ちる摩擦の無い理想流体の流線プロファイルを提案したが、Lansard⁽²⁾ は 2 次元光弾性実験により、この形状は側面形状と等色線が完全には一致していないことから、応力集中は緩和されているが最適形状にはなっていないことを指摘した。Durelli⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾ は、帯び板や円板内の穴あるいはフィレットの最適形状を、光弾性実験により得られる等色線が境界に一致するように境界を削ることによって求めた。Babuska⁽⁶⁾ は、平面問題におけるフィレットやノッチ部に生じる最大応力を最小にする形状を求めた。Fracavilla⁽⁷⁾ はフィレット部を持つ弾性板の最適形状を有限要素法を用いて求めた。尾田ら⁽⁸⁾ や 薦ら⁽⁹⁾ は有限要素法を用いて物体内の応力を設定した許容応力以下にするような最適化を行った。また、村川ら⁽¹⁰⁾ は境界要素法を用

いて、長方形ノッチを有する平板の最適形状などを求めた。しかし、与えられた形状の制約条件下で、最大応力を最小にする形状を求める研究は F. E. M. や B. E. M. では繰り返し計算が非常に多くなるためにあまり行われていないようである。

本論文では、級数解法を用いてねじり荷重を受ける段付棒の応力集中係数が最小となるような最適形状を求める一方法を報告する。まず、段部が任意の側面形状を有する段付棒がねじり荷重を受ける問題を解析する方法を示す。次に、この方法を用いて段付棒の段部長さと大径と小径を与えた時に生じる応力集中を最小にする形状を、非線形シンプレックス法を用いて求め、得られた応力分布と円弧形状の場合の結果とを比較する。

2 応力関数

円柱座標系 (r, θ, z) における変位、応力成分をそれぞれ (u, v, w) , $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z})$ とすれば、軸対称ねじり問題における変位および応力は、Boussinesq の応力関数 $\lambda, (r, z)$ を用いて次のように表せる。

$$v_r = -\frac{\partial \lambda}{\partial r}, \quad \frac{\tau_{rz}}{G} = -\frac{\partial^2 \lambda}{\partial r \partial z}$$

* 昭和 61 年 4 月 3 日 第 63 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 60 年 9 月 26 日。

** 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

図1 ねじりを受ける段付棒

$$\frac{\tau_{rz}}{G} = -\frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \quad (1)$$

$$u_r = w_r = 0, \quad \sigma_r = \sigma_z = \sigma_{rz} = \tau_{rz} = 0$$

ここで、 G は横弾性係数、 λ は $\nabla^2 \lambda = 0$ を満足する円柱調和関数である。

3 応力解析

図1に示すように、段部断面半径が $R(z)$ で変化する長さ h の段部、および半径 r_I と r_{II} の半無限棒部分よりなる段付棒が、無限遠においてトルク T でねじられる問題を級数解法によって解析を行ない、変位、応力成分を与える方法を示す。

段部形状を段部における横断面半径を表す関数 $R(z)$ を用いて表せば、本問題の境界条件は次のように表せる。

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r_I, z) &= 0, \quad h \leq z < \infty \\ \tau_{rz} - \tau_{rz} \frac{dR}{dz} &= 0, \quad r = R(z), \quad 0 \leq z \leq h \\ \tau_{rz}(r_{II}, z) &= 0, \quad 0 \geq z > -\infty \end{aligned} \quad (2)$$

$$T = 2\pi \int_0^{r_I} r^2 \tau_{rz} dr, \quad z \rightarrow \infty$$

$$T = 2\pi \int_0^{r_{II}} r^2 \tau_{rz} dr, \quad z \rightarrow -\infty$$

$$\tau_{rz}(r, 0) = 0, \quad R(0) < r \leq r_{II}$$

上式の第1～第3式はこの棒の側面で応力自由の条件、第4と5式は無限遠でトルク T でねじる条件、第6式は $R(0) < r_{II}$ の場合、半無限棒IIの上面の一部が自由表面となる条件である。解析を容易にするために、本問題を図2に示すように半無限棒領域I, IIと段部領域IIIに分け、さらに段部を $(N+1)$ 個の円板要素に分解し、各要素を上から順に $i = -1 \sim N+1$ と番号を付けて表し、各要素の諸量をこの番号を用い

図2 要素分割

て表すことにする。ここで、棒I, IIはそれぞれ $i = -1, N+1$ とする。また、 i 番めの円板要素の上下面の z 座標および半径をそれぞれ、 $z_i, R_i (=R(z_i))$ と $z_{i+1}, R_{i+1} (=R(z_{i+1}))$ ($i = 0 \sim N$)で表す。そして、 $z = z_i$ の各面に生じるせん断応力を $\tau_i(r)$ ($i = 1 \sim N+1$)で表す。この $\tau_i(r)$ を用いて各要素の変位、応力成分を表し、各要素間端面において変位が連続となるように $\tau_i(r)$ を決定すれば、この棒内の変位および応力が得られることになる。境界条件式(2)は各要素に対して、次のように書き換えられる。

[領域I]

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r_I, z) &= 0, \quad z_i (=h) \leq z < \infty \\ \tau_{rz}(r, h) &= \tau_i(r), \quad 0 \leq r \leq r_I \end{aligned} \quad (3)$$

[領域II]

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r_{II}, z) &= 0, \quad z_{N+1} (=0) \geq z > -\infty \\ \tau_{rz}(r, 0) &= \begin{cases} \tau_{N+1}(r), & 0 \leq r \leq R_{N+1} \\ 0, & R_{N+1} < r \leq r_{II} \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

[領域III] ($i = 0 \sim N$)

$$\begin{aligned} \tau_{rz} - \tau_{rz} \frac{dR}{dz} &= 0, \quad r = R(z), \quad z_i \leq z \leq z_{i+1} \\ \tau_{rz}(r, z_{i+1}) &= \tau_{i+1}(r), \quad 0 \leq r \leq R_{i+1} \\ &\quad (j = 0, 1) \end{aligned} \quad (5)$$

[トルク T でねじる条件] ($i = 0 \sim N+1$)

$$T = 2\pi \int_0^{R_i} r^2 \tau_i(r) dr \quad (6)$$

[変位の連続条件] ($i = 0 \sim N+1$)

$$\begin{aligned} v_i(r, z_i) &= v_{i+1}(r, z_i), \quad (0 \leq r \leq R_i) \\ \text{せん断応力 } \tau_i(r) \quad (i = 0 \sim N+1) &\text{は } r=0 \text{ で零, } r \end{aligned} \quad (7)$$

$=R(z)$ で有限値になることを考慮して, Jacobi の多項式 $G_k(a, b; x)$ を用いて次のように一般に級数表示することができる.

$$\frac{\tau_i(r)}{r^j} = \frac{r}{R_i} \sum_{k=0}^{\infty} x_k (-1)^k (k+1) G_k(2, 2; \frac{r^2}{R_i^2}) \quad (0 \leq r \leq R_i, i=0 \sim N+1) \quad (8)$$

ここで, τ_i は, 棒 I をトルク T で単純にねじった時側面に生じる最大せん断応力

$$\tau_i = \frac{2T}{\pi r_i^2} \quad (9)$$

である. 以下, 応力はこの τ_i を用いて無次元化する. トルク T でねじる条件式 (6) に式 (8) を代入し Jacobi の多項式の直交性を考慮すれば, x_k は,

$$x_k = \frac{r_i^2}{R_i^2} \quad (i=0 \sim N+1) \quad (10)$$

となる.

領域 III ($i=0 \sim N$) 内において, 断面半径は任意に変化するため, 段部側面すなわち $r=R(z)$ 曲面上において式 (5) の第 1 式の境界条件を完全に満足させるためには解析が煩雑になる. そこで図 3 に示すように, この円板の形状より大きい半径 R_i' の仮想円柱を考え, この円柱の上下面にせん断応力 $\tau_i(r)$, $\tau_{i+1}(r)$ を加えた場合の解を用いて目的とする円板の解を求める. 仮想円柱の上下面において半径 R_i , R_{i+1} よりも外の領域にせん断応力 $g_i^*(r)$ と $g_{i+1}^*(r)$ をそれぞれ分布させ, 側面で応力自由となるように仮想円柱に対する境界条件を次のように置く.

$$\begin{aligned} \tau_{i,j}(R_i', z) &= 0, \quad (z \geq z \geq z_{i+1}) \\ \tau_{i,j}(r, z_{i+1}) &= \begin{cases} \tau_{i+1}(r) & (0 \leq r \leq R_{i+1}) \\ g_{i+1}^*(r) & (R_{i+1} < r \leq R_i') \end{cases} \end{aligned} \quad (j=0, 1)$$

$$\int_{R_i}^{R_i'} r^j g_i^*(r) dr = \int_{R_{i+1}}^{R_i'} r^j g_{i+1}^*(r) dr \quad (11)$$

$$\tau_{i,j}(R_{i+1}) = g_{i+1}^*(R_{i+1}) \quad (j=0, 1)$$

$$\frac{d\tau_{i,j}(r)}{dr} = \frac{dg_{i+1}^*(r)}{dr}, \quad (r=R_{i+1}, j=0, 1)$$

第 1 式は仮想円柱の側面で応力自由の条件, 第 2 式は上下面に与えるせん断応力 $\tau_{i,j}$, 第 3 式は領域外に与えるせん断応力により生じる z 軸方向の合トルクが釣り合う条件, 第 4, 5 式はそれぞれ $z=z_i$ 面の $r=R_i$ および $z=z_{i+1}$ 面の $r=R_{i+1}$ において, $\tau_i(r)$ と $g_i^*(r)$ および $\tau_{i+1}(r)$ と $g_{i+1}^*(r)$ が連続かつ滑らかに接続する条件である. ここで, 境界条件式 (5) の第 1 式, つまり段部側面で応力自由の条件は, 次に示す z 軸方向の合トルク一定の条件に置き換えることができる.

図 3 円板要素

$$2\pi \int_0^{R(z)} r^j \tau_{i,j} dr = T \quad (12)$$

i 番目の円板要素の上面に与えるせん断応力 $\tau_i(r)$ と $\tau_{i+1}(r)$ により加わるトルクは, 式 (6) より, 合トルク T であるから, この円柱の上下面において式 (12) は成立している. また, 領域外に与えるせん断応力 $g_i^*(r)$ と $g_{i+1}^*(r)$ により加わる力は, 境界条件式 (11) の第 3 式より釣り合っている. 逆に式 (12) を満足させるような (R_i, z_i) と (R_{i+1}, z_{i+1}) を結ぶ曲面 $R(z)$ を求めることもできる. このようにして得られる曲面を目的とする曲面と区別して $R^*(z)$ と表す. $R^*(z)$ を段部側面形状とする段付棒は, 式 (5) の第 1 式の境界条件を完全に満足しており, また分割数 N を増せば求めたい曲面 $R(z)$ と $R^*(z)$ は近づくことができる. さらに, 式 (11) の第 4, 5 式の条件と変位の連続条件式 (7) より, $R^*(z)$ は $z=z_i$ において連続かつ滑らかになる. 式 (11) の条件を満足させるために関数 $g_i^*(r)$ と $g_{i+1}^*(r)$ を r のべき級数表示を用いて次のように表す.

$$\begin{aligned} \frac{g_i^*(r)}{r^j} &= \sum_{k=0}^{\infty} T_{i,k}^{(j)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{2k-1} H(R_i''-r) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} T_{i,k}^{(j)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{2k-1} H(r-R_i'') \end{aligned} \quad (R_i \leq r \leq R_i', R_i < R_i'' < R_i') \quad (13)$$

$$\frac{g_{i+1}^*(r)}{r^j} = \sum_{k=0}^{\infty} T_{i+1,k}^{(j)} \left(\frac{r}{R_{i+1}}\right)^{2k-1} H(R_{i+1}''-r) \quad (R_{i+1} \leq r \leq R_{i+1}', R_{i+1} < R_{i+1}'' < R_{i+1}')$$

ここで, 上式の右辺第 1 項はそれぞれ, $\tau_i(r)$, $\tau_{i+1}(r)$ と連続になるようにするための項であり, 第 1 式の右辺第 2 項は領域外に分布させるせん断応力のトルクの釣り合いを取るために, $R_i'' < r \leq R_i'$ に分布させるせん断応力に対する項である. まず, $r=R_{i+1}$, $z=z_{i+1}$ ($j=0, 1$) で $\tau_{i+1}(r)$ に滑らかに接続する条件式 (11) の第 4, 5 式より次式が得られる.

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_i^{(j)} = \sum_{j=0}^{\infty} T_i^{(j)} \quad (j=0, 1)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_i^{(j)} [1+2k(k+2)] = \sum_{j=0}^{\infty} (2l-1) T_i^{(j)} \quad (14)$$

$$(j=0, 1)$$

次に、境界条件式(11)の第3式および $r=R_i''$ で式(13)の第1式右辺第1項と2項が連続になる条件より次式が得られる。

$$\sum_{j=0}^{\infty} T_i^{(j)} (R_i''/R_i)^{j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} T_i^{(j)} (R_i''/R_i)^{j+1}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_i^{(j)}}{2l+2} \left[\left(\frac{R_i''}{R_i} \right)^{j+1} - 1 \right]$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_i^{(j)}}{2l+2} \left[\left(\frac{R_i''}{R_i} \right)^{j+2} - \left(\frac{R_i''}{R_i} \right)^{j+1} \right] \quad (15)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_i^{(j)}}{2l+2} \left[\left(\frac{R_i''}{R_i} \right)^{j+2} - 1 \right] \left(\frac{R_i''}{R_i} \right)^j$$

式(14), (15)を用いて $T_i^{(j)}$ ($j=0, 2, l=0, 1, \dots, L$)を決めるのであるが、これらの式には6個の方程式がある。そこで、 $L=1$ とすれば未知係数 $T_i^{(j)}$ の個数が6となり、他の条件を取ることなくこの未知係数を求めることができる。従って、 $\tau_{i,j}(r)$ が決めれば $g_i'(r)$ を決定できる。結局、境界条件式(5)は式(11)の第1, 2式および式(14), (15)に置き換えられるから、これらの式と境界条件式(3), (4)より $\tau_i(r)$ ($i=0 \sim N+1$)を用いて各要素の変位、応力を表す式を導く。

本問題は、軸対称ねじり問題であるから各要素に対する応力関数 λ_i ($i=-1 \sim N+1$)を棒の単純ねじり解と変数分離解との重ね合わせにより次のように置く。

$$\lambda_i = A_i' (r^2 - 2z^2) + A_i (2z^2 - 3r^2 z)$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}' J_0(a_j' r) e^{-a_j' (z-z_{i-1})}$$

$$\lambda_i = A_{i+1}' (r^2 - 2z^2) + A_{i+1} (2z^2 - 3r^2 z)$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} a_{i+1,j}' J_0(a_{i+1,j}' r) e^{a_{i+1,j}' (z-z_{i+1})} \quad (16)$$

$$\lambda_i = A_i' (r^2 - 2z^2) + A_i (2z^2 - 3r^2 z)$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}' \cosh[a_j' (z-z_{i-1})] J_0(a_j' r)$$

$$(i=0 \sim N, z_i \leq z \leq z_{i+1})$$

変位、応力は上式を式(1)に代入すれば各要素に対して次のようになる。

[領域I] ($z \geq z_0$)

$$\frac{\tau_{0,1}}{G} = 6rA_{0,1} - \sum_{j=1}^{\infty} a_{0,j}' (a_j')^2 J_1(a_j' r)$$

$$\times e^{-a_j' (z-z_0)}$$

$$\frac{\tau_{0,1}}{G} = - \sum_{j=1}^{\infty} a_{0,j}' (a_j')^2 J_1(a_j' r) e^{-a_j' (z-z_0)}$$

$$v_{0,1} = -2rA_{0,1} + 6rzA_{0,1} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{0,j}' a_j' J_1(a_j' r)$$

$$\times e^{-a_j' (z-z_0)} \quad (17)$$

[領域II] ($z \leq z_{N+1}$)

$$\frac{\tau_{N+1,1}}{G} = 6rA_{N+1,1} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{N+1,j}' (a_j')^2 J_1(a_j' r)$$

$$\times e^{a_j' (z-z_{N+1})}$$

$$\frac{\tau_{N+1,1}}{G} = - \sum_{j=1}^{\infty} a_{N+1,j}' (a_j')^2 J_1(a_j' r) e^{a_j' (z-z_{N+1})}$$

$$v_{N+1,1} = -2rA_{N+1,1} + 6rzA_{N+1,1}$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} a_{N+1,j}' a_j' J_1(a_j' r) e^{a_j' (z-z_{N+1})} \quad (18)$$

[領域III] ($z_0 \leq z \leq z_{N+1}$)

$$\frac{\tau_{i,1}}{G} = 6rA_{i,1} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j,k}' (a_j')^2$$

$$\times \sinh[a_k' (z-z_{i-1})] J_1(a_j' r)$$

$$\frac{\tau_{i,1}}{G} = - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j,k}' (a_j')^2$$

$$\times \cosh[a_k' (z-z_{i-1})] J_1(a_j' r)$$

$$v_{i,1} = -2A_{i,1}' r + 6rzA_{i,1}' + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j,k}' a_j'$$

$$\times \cosh[a_k' (z-z_{i-1})] J_1(a_j' r) \quad (19)$$

未定係数 $\{a_j'\}$, $\{a_{i,j,k}'\}$, A_i , A_i' ($j=0, 1, i=-1 \sim N+1$)を境界条件式より $\tau_i(r)$, $g_i'(r)$ を用いて表す。式(3), (4), (11)の第1式より、 $\{a_j'\}$ は次式の正根として求められる。

$$J_2(a_j' R_i') = 0, \quad 0 < a_j' < a_{j+1}' < \dots \quad (20)$$

ここで、領域IIIにおいては仮想円柱の側面 $r=R_i'$ で $\tau_{i,1}=0$ になるようにしてあることに注意を有する。なお、 $i=-1, N+1$ の時 R_i' はそれぞれ

$$R_{-1}' = r_0, \quad R_{N+1}' = r_{N+1}$$

と置く。式(20)より次のベッセル関数の直交関係が得られる。

$$\int_0^{R_i'} r J_1(a_j' r) J_1(a_k' r) dr$$

$$= \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ \frac{R_i'^2}{2} J_1^2(a_j' R_i') & (j = k) \end{cases}$$

$$\int_0^{R_i'} r^2 J_1(a_j' r) dr = 0 \quad (21)$$

境界条件式 (3), (4), (11) の第 2 式の τ_{ij} を式 (17) - (19) で置き換え, 上の関係を用いれば, 未定係数 $A_i, (\alpha_{ij})$ ($j=0, 1, i=-1 \sim N+1$) はそれぞれ次のように $\tau_i(r)$ と $G_i^*(r)$ の展開係数 $x_i^{(j)}, T_i^{(j)}$ を用いて表せる.

$$\begin{aligned} 6A_i r_i \frac{G}{r_i} &= x_i^* \\ -\alpha_{i-1}^* (\alpha_{i-1}^*)^2 \frac{G}{r_i} &= \sum_{j=0}^{\infty} x_i^{(j)} J_i^{(j)} \\ 6A_{i+1} r_i \frac{G}{r_i} &= \left(\frac{R_{i+1}}{r_i}\right)^2 \frac{r_i}{r_{i+1}} x_i^{(i+1)} \\ \alpha_{i+1}^* (\alpha_{i+1}^*)^2 \frac{G}{r_i} &= \sum_{j=0}^{\infty} x_i^{(j+1)} J_i^{(j+1)} \\ 6A_i r_i \frac{G}{r_i} &= \left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right)^2 \frac{r_i}{R_i} [x_i^{(i+1)} \\ &\quad + \sum_{j=0}^i \frac{4T_i^{(j+1)}}{2l+2} \left\{ \left(\frac{R_i'}{R_{i+1}}\right)^{2l+2} - 1 \right\}] \\ \alpha_{i-1}^* (\alpha_{i-1}^*)^2 \frac{G}{r_i} &= \sum_{j=0}^{\infty} x_i^{(j)} J_i^{(j)} \\ &\quad + \sum_{j=0}^i T_i^{(j)} K_i^{(j)} + \delta_{i-1} \sum_{j=0}^i T_i^{(j)} K_i^{(j)} \\ &\quad (j=0, 1, i=0 \sim N) \end{aligned} \quad (22)$$

ここで,

$$\begin{aligned} J_i^{(j)} &= (-1)^j \frac{2J_{i+1}(\alpha_{i-1}^* r_i)}{\alpha_{i-1}^* r_i J_i^*(\alpha_{i-1}^* r_i)} \\ J_i^{(j+1)} &= (-1)^{j+1} \frac{2J_{i+1}(\alpha_{i+1}^* R_{i+1})}{\alpha_{i+1}^* r_{i+1} J_i^*(\alpha_{i+1}^* r_{i+1})} \frac{R_{i+1}}{r_{i+1}} \\ J_i^{(i)} &= (-1)^{i+1} \frac{R_{i+1}}{R_i} J_{i+1}(\alpha_{i+1}^* R_{i+1}) G_i^* \\ K_i^{(j)} &= [J_i(\alpha_{i-1}^* R_i) - J_i(\alpha_{i-1}^* R_i)] G_i^* \\ K_i^{(j)} &= \left[\left(\frac{R_i'}{R_i}\right)^2 J_i(\alpha_{i-1}^* R_i) - J_i(\alpha_{i-1}^* R_i)\right] G_i^* \\ K_i^{(j)} &= [J_i(\alpha_{i-1}^* R_i) - J_i(\alpha_{i-1}^* R_{i+1})] \frac{R_{i+1}}{R_i} G_i^* \\ K_i^{(j)} &= J_i(\alpha_{i-1}^* R_{i+1}) \frac{R_{i+1}}{R_i} G_i^* \\ K_i^{(j)} &= [J_i(\alpha_{i-1}^* R_i) - J_i(\alpha_{i-1}^* R_i)] G_i^* \\ K_i^{(j)} &= -J_i(\alpha_{i-1}^* R_i) \left(\frac{R_i'}{R_i}\right)^2 G_i^* \\ G_i^* &= \frac{2}{R_i' \alpha_{i-1}^* J_i^*(\alpha_{i-1}^* R_i) \sinh[\alpha_{i-1}^* (z_i - z_{i+1})]} \frac{R_i}{R_i'} \end{aligned}$$

式 (22) のように未定係数 $A_i, (\alpha_{ij})$ ($j=0, 1, i=-1 \sim N+1$) は未知係数 $x_i^{(j)}, T_i^{(j)}$ を用いて表せ, 式 (17) - (19) より各要素内の変位, 応力はこれらの未知係数を用いて表すことができる. 式 (14), (15) より $T_i^{(j)}$ は $x_i^{(j)}$ が決まれば決定できるから, 残る条件, 要

素間の変位の連続条件式 (7) より未知係数 $x_i^{(j)}$ を求める式を導く. 式 (17) - (19), (22) を代入すれば式 (7) は $\{T_i^{(j)}\}, \{x_i^{(j)}\}$ に関する方程式となる. この方程式を代数方程式に変換するために, ベッセル関数 $J_i(\alpha r)$ が Jacobi の多項式を用いて領域 $0 \leq r \leq R$ に於いて次のように展開できることを用いる.

$$J_i(\alpha r) = \frac{4}{\alpha R} \frac{r}{R} \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)^2 J_{i+1}(\alpha R) \times G_i(2, 2; \frac{r^2}{R^2}) \quad (23)$$

上の展開式を用いてベッセル関数 $J_i(\alpha_{i-1}^* r)$ の展開を行ない, $G_i(2, 2; r^2/R_i^2)$ の各項を等値し整理すれば, 以下のような無限連立一次方程式が得られる.

$$\begin{aligned} -2\delta_{i-1} \frac{A_i' G}{r_i} + \sum_{j=0}^i \sum_{p=0}^{\infty} x_i^{(j+1)} V X_i^{(j+1,p)} (1 - \delta_{i-1} \delta_{i+1}) \\ + \sum_{j=0}^i \sum_{p=0}^{\infty} T_i^{(j+1)} V T_i^{(j+1,p)} (1 - \delta_{i-1}) \\ = -2\delta_{i-1} \frac{A_i' G}{r_i} + \sum_{j=0}^i \sum_{p=0}^{\infty} x_i^{(j)} V X_i^{(j,p)} (1 - \delta_{i-1} \delta_{i+1}) \\ + \sum_{j=0}^i \sum_{p=0}^{\infty} T_i^{(j)} V T_i^{(j,p)} (1 - \delta_{i-1} \delta_{i+1}) \\ (i=0 \sim N+1, p=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (24)$$

ここで,

$$\begin{aligned} V X_i^{(j+1,p)} &= -4 \sum_{l=0}^{\infty} J_{i+1}^{(l)} \frac{J_{i+1}(\alpha_{i+1}^* R_{i+1})}{(\alpha_{i+1}^* r_i)^2} + \delta_{i-1} \delta_{i+1} \frac{z_i}{r_i} \\ V X_i^{(j,p)} &= 4 \sum_{l=0}^{\infty} J_i^{(l)} \frac{J_{i+1}(\alpha_{i+1}^* R_{i+1})}{(\alpha_{i+1}^* R_{i+1})^2} \\ &\quad + \delta_{i-1} \delta_{i+1} \left(\frac{R_{i+1}}{r_{i+1}}\right)^2 \frac{r_i}{r_{i+1}} \frac{z_{i+1}}{r_i} \\ \left(\frac{V X_i^{(j,p)}}{V T_i^{(j,p)}}\right) &= 4 \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{J_i^{(l)}}{K_i^{(l)}}\right) \\ &\quad \times \frac{\cosh[\alpha_{i-1}^* (z_{i+1} - z_{i+2})] J_{i+1}(\alpha_{i-1}^* R_{i+1})}{(\alpha_{i-1}^* R_{i+1})^2} \\ &\quad + \delta_{i-1} \delta_{i+1} \left\{ \frac{\delta_{i-1} \xi_i}{\eta_i} \right\} \frac{z_{i+1}}{r_i} \quad (j=0, 1) \\ V T_i^{(j,p)} &= 4 \sum_{l=0}^{\infty} K_i^{(l)} \\ &\quad \times \frac{\cosh[\alpha_{i-1}^* (z_{i+1} - z_{i+2})] J_{i+1}(\alpha_{i-1}^* R_{i+1})}{(\alpha_{i-1}^* R_{i+1})^2} \\ \xi_i &= \left(\frac{R_{i+1}}{R_i'}\right)^2 \frac{r_i}{R_i'} \\ \eta_i &= \left(\frac{R_{i+1}}{R_i'}\right)^2 \frac{r_i}{R_i'} \frac{2}{l+1} \left[\left(\frac{R_i'}{R_{i+1}}\right)^{2l+2} - 1\right] \end{aligned}$$

結局本問題は無限連立一次方程式 (24) に帰着された. $x_i^{(j)}$ は式 (10) のように表されているから, 無限連立 1 次方程式 (24) と $\{x_i^{(j)}\}, \{T_i^{(j)}\}$ の関係式 (14), (

15)を連立させて解けば、未知係数 $\{x_i\}$, $\{T_i\}$, $(A_{i+1}-A_i)$ を求めることができる。係数 A_i ($i=-1 \sim N+1$)は応力には無関係で剛体回転に関する項であり、個々に決定することはできず、差の形でしか求まらない。そこで、本論文では $z=z_0$, $r=R_0$ の変位が零となるように A_i を定めることにする。以上より、式(17)~(19)を用いて段部形状が $R(z)$ で表せる段付棒が、ねじり荷重を受ける場合の変位、応力を求めることができる。

4 数値結果

4-1 精度の検討 数値解を求めるためには無限連立1次方程式(24)において、 $\{x_i\}$ を有限項で打ち切って解かなければならず、また係数 VX_i , $V T_i$ は無限級数表示されているから、この項数を有限項で打ち切らなければならず、さらに段部の分割数をどの程度取ればよいのかを知る必要がある。また、図3に示した仮想円柱の半径 R_1' および R_2'' を R_0 に対してどの程度に取ればよいのかも知る必要がある。そこで、まず段部形状が円弧形状で表せる棒の応力集中係数が、これらの打ち切り項数、分割数、および R_1'/R_0 , R_2''/R_0 によりどの程度影響を受けるかどうかを調べる。 $R(z)$ は次のように表せる。

$$R(z) = r_0 + \rho - \sqrt{2\rho z - z^2}, \quad h = \rho, \quad (0 \leq z \leq h) \quad (25)$$

ここで、 ρ は段部側面の曲率半径である。なお、応力集中係数(S.C.F.)は次式で定義される。

$$\text{S.C.F.} = \max (\sqrt{\tau_{\theta\theta}^2 + \tau_{r\theta}^2} / \tau_0) \quad (26)$$

また、段部は

$$z_i = h \cdot \cos \frac{i}{N+1}, \quad (i=0 \sim N+1) \quad (27)$$

断面において分割した。これは、応力が集中する点が $z=h$ 付近にあることから、この付近の分割を細かくするためである。無限級数の打ち切り項数 M , $\{x_i\}$ の打ち切り項数 K , 段部の分割数 $N+1$ を種々に変えて $r_{11}/r_0=1.5$, $\rho/r_0=0.5$ の場合において、S.C.F.を計算したところ、それぞれ $M=100$, $K=9$, $N=9$ 以上にすればS.C.F.=1.1875となり小数点以下第3位まで等しくなる。また、 $R_1'/R_0=1.2$, 1.3 , 1.4 , $R_2''/R_0=1.1$, 1.2 と変化させてもS.C.F.は1.1875~1.1876の範囲内になった。そこで、以下の計算にはこれらの打ち切り項数および R_1'/R_0 , R_2''/R_0 の値を用いた。

図4は ρ とS.C.F.の関係を示したもので、実線は

図4 ρ とS.C.F.の関係

表1 精度の検討

n	x_n	
	$N=2$	$N=4$
1	0.1553	0.1572
2	-0.0025	-0.0027
3	—	0.0005
4	—	0.0005
S.C.F.	1.084	1.082

本解法による $r_{11}/r_0=1.2$ と 2.0 の結果を示し、 Δ 印、 $\circ$ 印はそれぞれJacobsen⁽¹⁾の電気類似法による結果である。 $r_{11}/r_0=2.0$ の分布は ρ/r_0 が小さくなるとともに、また $r_{11}/r_0=1.2$ の分布は $\rho/r_0=2.0$ の分布に比べ ρ が小さい所で数値結果との差がややあるけれども、両者はほぼ一致していると考えられる。

4-2 段部形状の最適化 段部長さ h と棒の半径 r_0 と r_{11} を与えた時に、段部に生じる応力集中係数を最小にする形状を求める。段部形状を表す関数 $R(z)$ をチェビシェフの多項式 T_n を用いて、 $z=h$ と $z=0$ において形状が滑らかに変化するように、

$$\frac{R(z)}{r_0} = 1 + \sum_{n=1}^N x_n [1 - T_n(\cos \theta)] \quad (28)$$

$$z = h(1 - \sin \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2)$$

と表す。ここで、 θ は形状を表すためのパラメータである。上式の側面形状に対するS.C.F.を最小にする x_n を求める最適化の方法として、S.C.F.の x_n による微係数を解析的に求めることが困難であることから、関数の値のみを用いて種々の問題に対して確実に最適値近傍に収束することが確かめられている非線形シンプレックス法を用いる⁽¹¹⁾。

まず、 x_n の展開項数をどの程度に取ればよいのかを調べるために、 $r_{11}/r_0=1.5$, $h/r_0=0.5$ の場合に

チェビシェフの多項式による展開項数 $N=2, 4$ と変えて最適な段部形状を求め、得られた (α_1) および S.C.F. の値を表1に示す。 α_1 の収束はよく、また S.C.F. の値は両者ともほぼ等しくなっている。このことから、展開項数は2項程度取れば十分であることがわかる。以下、 $N=2$ として最適形状を求めた。ここで、非線形シンプレックス法の収束の判定基準は、S.C.F., α_1 の変動がすべて0.5%以内となった場合とし、種々の α_1 の初期値および初期増分に対して計算を行った結果、10~50回程度の繰り返し数で収束した。

図5-7に $r_{II}/r_I=1.5$, $h/r_I=0.5$ の時の最適形状に対する合せん断応力 τ およびせん断応力 τ_{θ} , τ_{ϕ} の等応力線分布を示す。図5より側面上において τ はほぼ一定となる。最適形状(太線)に対する応力集中係数 S.C.F. = 1.08 であり、円弧形状(破線)に対する S.C.F. = 1.19 に比べ小さくなっている。なお、図6によれば τ_{θ} の分布は段部側面ではほぼ一定であり、段下部から棒 II に向かって急に減少し、棒 II の $z=0$ 端面で零となる。また、図7より τ_{ϕ} の分布は段部終点 ($z=0$, $r=R(0)$) を中心としてほぼ同心円状の分布を示す。

図8は $r_{II}/r_I=1.5$, $h/r_I=0.5$ の場合の側面上の τ の分布を用いて最適形状と円弧部の曲率半径 $\rho/r_I=0.5$ の円弧形状との比較を行なったもので、実線は最適形状の分布、破線は円弧形状の分布である。円弧形状の場合、側面の最大せん断応力は段開始部より少し下で最大となり、その後単調に減少する。一方、最適化した形状に対する τ の分布では、段部側面ではほぼ一定値を取り、分布が平坦になり、応力集中が緩和されていることがわかる。

図9と10に、 $r_{II}/r_I=2.0$ と一定値として、 h/r_I を種々変えて求めた最適形状、および段部長さ h/r_I と S.C.F. の関係を示す。なお、破線は $\rho/r_I=0.5$ の円弧形状の場合である。図9より $h/r_I=1.0 \sim 0.1$ と変化しても段下部付近、つまり $z=0$ 付近の形状はあまり変化していない。また、 h/r_I が大きくなるほど段開始部での断面半径の増加は少なく、ゆるやかになっている。図10は最適形状における h/r_I と応力集中係数の関係で、図中の破線は比較のために円弧部の曲率半径 $\rho=h$ とした時の円弧形状の結果を示したものである。 h/r_I が小さければ最適形状と円弧形状との応力集中係数にそれほど差はないが、 h/r_I が大きくなるとともにその差は大きくなり、最適化による効果が顕著に表れる。

仮に $\rho/r_I=1.0$ ($h/r_I=1.0$) の円弧形状に対する S.C.F. と同程度の S.C.F. を持つ段付棒を最適化

図5 τ の等応力線分布 ($r_{II}/r_I=1.5$, $h/r_I=0.5$)

図6 τ_{θ} の等応力線分布
($r_{II}/r_I=1.5$, $h/r_I=0.5$)

図7 τ_{ϕ} の等応力線分布
($r_{II}/r_I=1.5$, $h/r_I=0.5$)

図8 側面上の応力分布 ($r_{II}/r_I=1.5$, $h/r_I=0.5$) 図9 最適形状と h/r_I の関係 ($r_{II}/r_I=2.0$)

状で作るとすると、図10より段部長さは約 $h/r_I=0.5$ となり、円弧形状の場合の半分であり、さらに、図9より、 $h/r_I=0.5$ に対する最適形状は、 $\rho/r_I=1.0$ の円弧形状（破線）に比べ、かなり段部の肉を削った形状となっている。従って、ここで得られた最適形状を用いることにより、円弧形状に比べ同じ許容応力値に対して段部長さを短く、かつ段部の余分な肉を少なくすることができる。なお、Fracavilla⁽¹¹⁾ は引張り荷重を受ける段付棒板に対して段部の最適形状を求め、平面問題の場合も円弧形状に比べ肉厚の少ない形状となることを示している。

図11は段部長さを $h/r_I=0.5$ と一定にした時の、 r_{II}/r_I に対する応力集中係数を表したものである。破線は円弧形状の結果を示したものである。この図より、円弧形状および最適形状ともに、 $r_{II}/r_I \geq 1.5$ の所ではS.C.F. はほぼ一定となり、棒IIが半無限体となった場合の結果にほぼ等しくなる。これは、 h

図10 h/r_I と応力集中係数の関係 ($r_{II}/r_I=2.0$) 図11 r_{II}/r_I と応力集中係数の関係 ($h/r_I=0.5$)

$/r_I$ を一定にした場合 r_{II}/r_I がある値以上になるとS.C.F. におよぼす r_{II}/r_I の影響はほとんどなくなること示している。また、 r_{II}/r_I が1.5より小さくなるに従い、S.C.F. は両方とも小さくなる。

5 結 言

段部を有する棒がねじり荷重を受ける場合に、応力集中係数を最小にする段部の最適形状を級数解法を用いて求めた。最適形状における合せ断面応力 τ の分布は段部側面で平坦になる傾向がある。また、同程度のS.C.F. を取る円弧形状に比べ段部長さを短く、かつ段部の余分な肉を少なくすることができることを明らかにした。

文 献

- (1) 西田, 応力集中, (昭51), 森北出版, 112.
- (2) Lansard, R., Proc. SESA., Vol.13 (1955), 97.
- (3) Durelli, A.J., et al., J. Appl. Mech., Vol.35 (1968), 403.
- (4) Durelli, A.J., et al., Exp. Mech., Vol.18 (1978), 303.
- (5) Durelli, A.J., Rajaiah, K., J. Mech. Design, Vol.103 (1981), 866.
- (6) Babuska, V.I., ZAMM, Vol.43 (1963), 47.
- (7) Fracavilla, A., et al., J. Strain Analysis, Vol.10 (1975), 63.
- (8) 尾田・山崎, 機論, 43-368 (昭52-4), 1182.
- (9) 高・山地, 機論, 44-386 (昭53-10), 3333.
- (10) 村川 他3名, 機論, 49-439 (昭58-3), 396.
- (11) Jacobsen, L.S., Trans. ASME, Vol. 47 (1925), 619.
- (12) Kowalik, J., Osbrne, M.R., 最適化問題, (昭46), 培風館.

討 論

〔質問〕 尾 田 十 八〔金沢大学工学部〕

手法は異なるが、有限要素法と SLP 法を用いて、段付き丸棒のフィレット部の引張り、曲げおよびねじりの各負荷を受ける場合における応力集中を最小化する形状決定問題がすでに Pedersen^(付1)らによって解かれている。それによると引張りに対する最適形状が結局、他の負荷に対しても望ましいことが述べられている。とにかく、本報の結果がこのような類似問題の研究結果と比較、検討されると、より興味深い点が出てくるものと思う。

〔回答〕 ご助言に感謝する。今後の研究の参考にさせていただきたい。

〔質問〕 長谷川 久 夫〔明治大学工学部〕

段付丸棒のねじりについて興味深く拝読させていただいた。下記の点についてご教示いただければ幸いです。

(1) $r=R(z)$ での境界条件がどうして式(2)の第2式で表せるのか。

(2) 図3の円板要素の $r=R(z)$ の面は、平均値として(合力=0)境界条件を満足させているのか。

(3) 図4の本結果と Jacobsen の結果はどちらのほうが精度がよいと考えられるのか。

〔回答〕 (1) 側面で応力自由の条件は、 ν を法線方向として、

$$\tau_{\theta z} \cdot \cos(z, \nu) + \tau_{r\theta} \cdot \cos(r, \nu) = 0 \quad \cdots \cdots (i)$$

と表せる。ここで、 S を表面上の線路とすると、

$$\cos(z, \nu) = -\frac{dr}{dS}, \quad \cos(r, \nu) = \frac{dz}{dS}$$

より、式(i)は

$$-\frac{dr}{dS} \tau_{\theta z} + \frac{dz}{dS} \tau_{r\theta} = 0$$

ここで、

$$\frac{dr}{dS} = \frac{dz}{dS} \cdot \frac{dr}{dz} = \frac{dz}{dS} \frac{dR(z)}{dz}$$

の関係を用いて整理すると式(2)を得る。

(2) 表面 $[r=R(z)$ 面] で応力自由の条件と、式(12)は等価となることから、得られた $r=R^*(z)$ 面上においては完全に応力自由の境界条件を満足している。

(3) 4-1 の精度の検討の部分からわかるように、本解法による S. C. F. の精度は小数点以下第2位までは十分に信頼できるものと著者らは考えており、本解法による値のほうが精度がよいと考える。

(付1) Pedersen, P. and Laursen, C. L., *J. Struct. Mech.*, 10-4 (1982), 375.