理想化繊維強化材の有限平面変形*
(第5報, 等分布荷重を受ける段付きはりの大たわみ)

高橋 敬二**, 倉茂 道夫***

Finite Plane Deformations of an Ideal Fiber-Reinforced Material
(5th Report, Large Deformations of a Stepped Beam under Pressure)

by Keiji TAKAHASHI and Michio KURASHIGE

Large deformations of a fiber-reinforced straight beam with a central step attached on the beam bottom is analysed in the framework of the theory of ideal fiber-reinforced composite materials. The beam is reinforced in its axial direction and simply supported in two ways; (A) with horizontally movable supports and (B) with fixed roller fulcrums. The equilibrium condition of the part of the beam corresponding to the step edge is reduced to a Fredholm type integral equation of the second kind with respect to the curvature radius of the uppermost fiber.

Key Words: Elasticity, Stepped Beam, Large Deformation, Fiber-Reinforced Composite, Ideal Theory, Inextensibility, Incompressibility

1. 緒 言

理想化繊維強化複合材の理論に基づき, 第4報⁽¹⁾では, 集中荷重を受ける, 両端単純支持による段付きはりの有限変形解析を行い, 厳密解を得た. 本報では, 同様の, 軸方向に繊維強化され, 中央部下面に段部を有する段付きはりに, 等分布荷重の作用する場合の有限変形解析を行った. ただし, 支持方法は, 第4報と同様な両端単純支持のほか, 軸間を固定された両端ローラ支持による場合も考え, 両者の異同を検討した.

はりの有限変形状態は, 運動学的拘束条件を考慮しつつ仮定し, その変形状態が静的学および運動学的条件を完全に満足するような完全解を得た. また, 段部の平衡条件は, 第4報の集中荷重の場合と同様に, 二つのケースとともに, はり上面の繊維の曲率半径を未知関数とするフレドホルム形第2種積分方程式に帰せられた.

2. 基 礎 式

理想化繊維強化複合材の平面変形に関する基礎式および運動学上の一般的結論は第1報⁽²⁾に示したが, ここでもそれをそのまま利用する.

3. 問題の設定とはりの変形

両端の支持方法の違いによる二つの解析を並行して進める. はりは, 軸方向に繊維強化されており, 変形前長さ $2L$, 高さ H_0 で, 中央部下面には, 長さ $2L_0$, 高さ H_1 の段部を有する.

ケース A では, 上記の段付きはりを, はり軸方向へ可動な両端単純支持によって支持するものとする.

ケース B では, 同様のはりを, 軸間を $2l_0$ に固定された二つのローラによって両端支持するものとする. この時, はりは変形後もローラからはずれないように適当な長さ $2L$ を有する. また, はりとローラの間の摩擦は無視する. これらの様子を図1(a)に示す.

問題はこれらのはりの上面に等分布荷重(圧力) p_0 が作用する有限変形状態を考える. ただし, ケース A では, はりの全長にわたって, ケース B では, 両支点の内側(長さ $2l_0$)にだけ等分布荷重 p_0 が作用する. この時の変形状態を図1(b)のように仮定する. これは,

* 昭和61年6月21日 東北支部秋田地方講演会において講演, 原稿受付 昭和60年10月23日.

** 学生員, 東北大学工学部 (〒980 仙台市荒巻字青葉).

*** 正員, 東北大学工学部.

第1報の第2節最後の運動学上の一般的結論および第4報の結果を考慮したものである。

変形したはり内の各点に、 $a_1, a_2, \dots$ の記号を図1(b)のように付ける。曲線 a_4a_5 は、点 b_4 (ケース A) および支持ローラの中心軸 O_1 (ケース B) を中心とする円弧である。はり端 a_5b_4 (ケース A), a_5b_5 (ケース B) は直線であるが、段部端面 b_3c_2 は繊維の非伸縮条件より決定される曲線である。また、変形後も繊維間隔は保存されて、 $a_5b_4(a_5b_5) = a_4b_4 = a_3b_3 = a_2b_2 = a_1b_1 = H_0$, $b_1c_1 = b_2c_2 = H_1$ である。扇形変形部 $b_4a_4a_5$ (ケース A), $o_1a_4a_5$ (ケース B) の頂角を β_0 とし、この中に極座標 (η, β) (ケース A), $(\eta + \eta_0, \beta)$ (ケース B) を図のようにとる。これ以外の部分では、それぞれの領域の n -曲線のなす角を $\alpha_0, \theta_0, \varphi_0$ とし、領域内に準極座標 $(\xi, \alpha), (\xi, \theta), (\xi, \varphi)$ をとる。 ξ は、それぞれ弧 a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4 から距離である。また、それぞれの曲率半径を、 $\rho_1(\alpha), \rho_2(\theta), \rho_3(\varphi)$ とする。

これまでのことより、問題は運動学および静力学的条件を満足するような未定定数 $\alpha_0, \beta_0, \theta_0, \varphi_0$ と未知関数 $\rho_1(\alpha), \rho_2(\theta), \rho_3(\varphi)$ を見い出せるか否かに帰着された。

ところで、繊維は非伸縮であり、変形前後において $a_1a_5b_4b_1$ 部内 (ケース A), $a_1a_5b_5b_1$ 部内 (ケース B) の任意の繊維の長さは一定であることから、

(a) 変形前

(b) 変形後

図1 等分布荷向を受ける段付きはりの曲げ

$$L = \beta_0(H_0 - \xi) + \int_0^{\alpha_0} \{\rho_1(\alpha) + \xi\} d\alpha + \int_0^{\theta_0} \{\rho_2(\theta) + \xi\} d\theta + \int_0^{\varphi_0} \{\rho_3(\varphi) + \xi\} d\varphi \quad \dots\dots\dots (1 \cdot A)$$

$$L = \beta_0(H_0 + \eta_0 - \xi) + \zeta_0 + \int_0^{\alpha_0} \{\rho_1(\alpha) + \xi\} d\alpha + \int_0^{\theta_0} \{\rho_2(\theta) + \xi\} d\theta + \int_0^{\varphi_0} \{\rho_3(\varphi) + \xi\} d\varphi \quad \dots\dots\dots (1 \cdot B)$$

これ以降、ケース A に関する式には、A を、ケース B に関する式には、B を式番に付記する。同じ式となる場合には、これを付けない。

上2式が ξ の値にかかわらず (すなわち、任意の繊維に対し) 成立するためには、

$$\beta_0 = \alpha_0 + \theta_0 + \varphi_0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$L = \beta_0 H_0 + \int_0^{\alpha_0} \rho_1(\alpha) d\alpha + \int_0^{\theta_0} \rho_2(\theta) d\theta + \int_0^{\varphi_0} \rho_3(\varphi) d\varphi \quad \dots\dots\dots (3 \cdot A)$$

$$L = \zeta_0 + \beta_0(H_0 + \eta_0) + \int_0^{\alpha_0} \rho_1(\alpha) d\alpha + \int_0^{\theta_0} \rho_2(\theta) d\theta + \int_0^{\varphi_0} \rho_3(\varphi) d\varphi \quad \dots\dots\dots (3 \cdot B)$$

また、繊維 c_1c_2 の非伸縮条件より

$$L_0 = \int_0^{\alpha_0} \{\rho_1(\alpha) + H\} d\alpha \quad \dots\dots\dots (4)$$

繊維 b_3b_4 (ケース A), b_3b_5 (ケース B) の非伸縮条件より、

$$L_1 = \int_0^{\varphi_0} \{\rho_3(\varphi) + H_0\} d\varphi \quad \dots\dots\dots (5 \cdot A)$$

$$L_1 = \zeta_0 + \beta_0 \eta_0 + \int_0^{\varphi_0} \{\rho_3(\varphi) + H_0\} d\varphi \quad \dots\dots\dots (5 \cdot B)$$

式(3)~(5)より、

$$\int_0^{\theta_0} \rho_2(\theta) d\theta = H_1 \alpha_0 - H_0 \theta_0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

段部 $b_1b_3c_2c_1$ 内の任意の繊維の長さが不変であることから、

$$L_0 = \int_0^{\alpha_0} \{\rho_1(\alpha) + \xi\} d\alpha + \int_0^{\theta_0} \{\rho_2(\theta') + \xi\} d\theta' \quad \dots\dots\dots (7)$$

上式と式(4)より、段部端面 b_3c_2 の形状 $\xi = \xi(\theta)$ は、

$$\xi = \xi(\theta) = \frac{1}{\alpha_0 + \theta} \left\{ \alpha_0 H - \int_0^{\theta} \rho_2(\theta') d\theta' \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

また、ケース B では、支持ローラ軸間の距離 $2l_0$ は変形後も不変であることから、繊維 a_1a_5 に関し次のように書ける。

$$\begin{aligned}
I_0 = & \int_0^{\alpha_0} \rho_1(\alpha) \cos \alpha d\alpha + \int_0^{\theta_0} \rho_2(\theta) \cos (\theta + \alpha_0) d\theta \\
& + \int_0^{\varphi_0} \rho_3(\varphi) \cos (\varphi + \alpha_0 + \theta_0) d\varphi \\
& + \int_0^{\beta_0} (H_0 + \eta_0) \cos \beta d\beta \quad \cdots \cdots (9 \cdot B)
\end{aligned}$$

4. 応力分布と平衡条件

前章で求めた (仮定した) 変形状態に対応する応力分布と特異応力を求める。

4・1 応力分布 図1(b)に示したはりの各部分ごとに応力分布を決定する。

●領域 $a_4a_5b_4$ (ケース A), $a_4a_5b_5b_4$ (ケース B) 内せん断変形の大きさ γ とせん断応力 S は, 第1報⁽²⁾の基礎式(5)により, 端面 a_5b_4 (ケース A), n -曲線 a_5b_5 (ケース B) におけるせん断応力自由の条件を考慮し,

$$\gamma = \beta, S = S(\beta) \quad \cdots \cdots (10)$$

第1報, 基礎式(7)の平衡条件を積分し, 端面 a_5b_4 (ケース A), n -曲線 a_5b_5 (ケース B) における垂直応力自由の条件を考慮すると,

$$T = 2W(\beta) \quad \cdots \cdots (11)$$

$$P = -\{2W(\beta) + S'(\beta)\} + C_1(\beta)/\eta \quad \cdots \cdots (12 \cdot A)$$

$$\begin{aligned}
P = & -\frac{\eta}{\eta + \eta_0} \{2W(\beta) + S'(\beta)\} + \frac{C_1(\beta)}{\eta + \eta_0} \\
& \cdots \cdots (12 \cdot B)
\end{aligned}$$

ここで, $C_1(\beta)$ は, β に関する任意関数, また, $W(\beta)$, $S'(\beta)$ は, 次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
W(\beta) = & \int_0^\beta S(\beta') d\beta', S'(\beta) = \frac{dS(\beta)}{d\beta} \\
& \cdots \cdots (13)
\end{aligned}$$

●領域 $a_3a_4b_4b_3$ 内 第1報, 基礎式(5)により, 領域の境界 a_4b_4 におけるせん断応力の連続条件を考慮すると, せん断変形の大きさ γ とせん断応力 S は,

$$\begin{aligned}
\gamma = & \varphi - \varphi_0 + \beta_0 = \alpha_0 + \theta_0 + \varphi \\
S = & S(\alpha_0 + \theta_0 + \varphi)
\end{aligned} \quad \cdots \cdots (14)$$

ここで, 式(2)を用いた。

第1報, 基礎式(7)の平衡条件式に準極座標を適用しこれに領域の境界 a_4b_4 での垂直応力の連続条件を考慮して, 上式を積分すると,

$$\begin{aligned}
T = & 2W(\varphi + \alpha_0 + \theta_0) \\
P = & -\frac{\xi}{\rho_3(\varphi) + \xi} \{2W(\varphi + \alpha_0 + \theta_0) \\
& + S'(\varphi + \alpha_0 + \theta_0)\} + \frac{C_2(\varphi)}{\rho_3(\varphi) + \xi} \quad \cdots \cdots (15)
\end{aligned}$$

ここで, $C_2(\varphi)$ は φ の任意関数である。

●領域 $a_2a_3b_3b_2$ 内 領域 $a_3a_4b_4b_3$ 内と同様にし

て,

$$\begin{aligned}
\gamma = & \theta - \theta_0 - \varphi_0 + \beta_0 = \theta + \alpha_0 \\
S = & S(\theta + \alpha_0)
\end{aligned} \quad \cdots \cdots (16)$$

$$T = 2W(\theta + \alpha_0) \quad \cdots \cdots (17)$$

$$\begin{aligned}
P = & -\frac{\xi}{\rho_2(\theta) + \xi} \{2W(\theta + \alpha_0) + S'(\theta + \alpha_0)\} \\
& + \frac{C_3(\theta)}{\rho_2(\theta) + \xi} \quad \cdots \cdots (18)
\end{aligned}$$

ここで, $C_3(\theta)$ は θ の任意関数である。

●領域 $a_1a_2b_2b_1$ 内 上と同様にして,

$$\gamma = \alpha, S = S(\alpha) \quad \cdots \cdots (19)$$

$$T = 2W(\alpha) \quad \cdots \cdots (20)$$

$$\begin{aligned}
P = & -\frac{\xi}{\rho_1(\alpha) + \xi} \{2W(\alpha) + S'(\alpha)\} \\
& + \frac{C_4(\alpha)}{\rho_1(\alpha) + \xi} \quad \cdots \cdots (21)
\end{aligned}$$

ここで, $C_4(\alpha)$ は α の任意関数である。

●領域 $b_1b_2c_2c_1$ 内 上と同様にして,

$$\gamma = \alpha, S = S(\alpha) \quad \cdots \cdots (22)$$

$$T = T_0 + 2W(\alpha) \quad \cdots \cdots (23)$$

$$\begin{aligned}
P = & -\frac{\xi}{\rho_1(\alpha) + \xi} \{T_0 + 2W(\alpha) + S'(\alpha)\} \\
& + \frac{C_5(\alpha)}{\rho_1(\alpha) + \xi} \quad \cdots \cdots (24)
\end{aligned}$$

ここで, T_0 は定数, $C_5(\alpha)$ は α の任意関数である。

●領域 $b_2b_3c_3c_2$ 内 上と同様にして,

$$\gamma = \theta + \alpha_0, S = S(\theta + \alpha_0) \quad \cdots \cdots (25)$$

$$T = T_0 + 2W(\theta + \alpha_0) \quad \cdots \cdots (26)$$

$$\begin{aligned}
P = & -\frac{\xi}{\rho_2(\theta) + \xi} \{T_0 + 2W(\theta + \alpha_0) + S'(\theta + \alpha_0)\} \\
& + \frac{C_6(\theta)}{\rho_2(\theta) + \xi} \quad \cdots \cdots (27)
\end{aligned}$$

ここで, $C_6(\theta)$ は θ の任意関数である。

4・2 段部端での応力自由条件 変形前, 繊維の方向に垂直だった境界が, 変形後も応力自由であるためには,

$$T = \gamma S(\gamma), P = -S(\gamma)/\gamma \quad \cdots \cdots (28)$$

である⁽¹⁾。

段部端面 b_3c_2 に関する式(25), (26)を式(28)の第1式に代入すると,

$$\begin{aligned}
T_0 + 2W(\theta + \alpha_0) = & (\theta + \alpha_0) S(\theta + \alpha_0) \\
& \cdots \cdots (29)
\end{aligned}$$

上式が, 任意の θ に関し成立するためには, $S(0) = W(0) = 0$ を考慮し,

$$T_0 = 0, S(\gamma) = G\gamma \quad \cdots \cdots (30)$$

でなければならない。ここで, G はせん断弾性係数である。これは, 弾性(準弾性)応答が線形でなければな

らないことを示す。

式(28)第2式に、式(25)、(27)を代入し、式(30)を適用すると、

$$C_6(\theta) = \xi G(\theta + \alpha_0)^2 - G\rho_2(\theta) \quad \cdots \cdots \cdots (31)$$

これに、式(8)を適用し、

$$C_6(\theta) = GH(\theta + \alpha_0)\alpha_0 - G\rho_2(\theta) - G(\theta + \alpha_0) \int_0^{\theta_0} \rho_2(\theta') d\theta' \quad \cdots \cdots \cdots (32)$$

を得る。

4・3 特異応力と境界条件 特異応力の大きさ Q と前節で出てきた未知関数 $C_1(\beta) \sim C_6(\theta)$ を求める。特異応力は、繊維 $a_1a_2a_3a_4a_5$, c_1c_2 , $b_1b_2b_3b_4(b_5)$ に沿って発生する。

●弧 a_4a_5 弧に沿った微小部分の繊維方向の力の釣り合いより、

$$dQ = -H_x S(\beta) d\beta \quad \cdots \cdots \cdots (33)$$

ここで、 H_x は、

$$\left. \begin{aligned} H_x &= H_0 & (\text{ケース A}) \\ H_x &= H_0 + \eta_0 & (\text{ケース B}) \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (34)$$

である。

上式を、点 a_5 で特異応力が零であることを考慮して積分すると、

$$Q(\beta) = -H_x W(\beta) \quad \cdots \cdots \cdots (35)$$

弧に垂直な方向の力の釣り合いより、

$$Q = H_x P(H_0, \beta) - H_x p_0 \quad \cdots \cdots \cdots (36)$$

上式に、式(12)、(35)を代入すると、

$$C_1(\beta) = H_0 \{W(\beta) + S'(\beta) + p_0\} \quad \cdots \cdots \cdots (37 \cdot A)$$

$$C_1(\beta) = H_0 \{W(\beta) + S'(\beta) + p_0\} + \eta_0 \{p_0 - W(\beta)\} \quad \cdots \cdots \cdots (37 \cdot B)$$

●弧 a_3a_4 弧に沿った微小部分の力の釣り合いに、点 a_4 での連続性を考慮し、積分すると、

$$Q(\varphi) = -H_x W(\beta_0) - \int_{\varphi}^{\varphi_0} \rho_3(\varphi') S(\varphi' + \alpha_0 + \theta_0) d\varphi' \quad \cdots \cdots \cdots (38)$$

弧に垂直な方向の力の釣り合いより、

$$Q(\varphi) = -\rho_3(\varphi) P(0, \varphi) + \rho_3(\varphi) p_0 \quad \cdots \cdots \cdots (39)$$

上式に、式(15)、(38)を代入することにより、

$$C_2(\varphi) = H_x W(\beta_0) + \rho_3(\varphi) p_0 + \int_{\varphi}^{\varphi_0} \rho_3(\varphi') S(\varphi' + \alpha_0 + \theta_0) d\varphi' \quad \cdots \cdots \cdots (40)$$

●弧 a_2a_3 同様に、接線方向の釣り合いより、

$$\begin{aligned} Q(\theta) &= -H_x W(\beta_0) \\ &\quad - \int_0^{\theta_0} \rho_3(\varphi') S(\varphi' + \alpha_0 + \theta_0) d\varphi' \\ &\quad - \int_0^{\theta_0} \rho_2(\theta') S(\theta' + \alpha_0) d\theta' \quad \cdots \cdots \cdots (41) \end{aligned}$$

垂直方向の釣り合いより、

$$Q(\theta) = -\rho_2(\theta) P(0, \theta) + \rho_2(\theta) p_0 \quad \cdots \cdots \cdots (42)$$

上式に、式(18)、(41)を代入すると、

$$\begin{aligned} C_3(\theta) &= H_x W(\beta_0) + \rho_2(\theta) p_0 \\ &\quad + \int_0^{\theta_0} \rho_3(\varphi) S(\varphi + \alpha_0 + \theta_0) d\varphi \\ &\quad + \int_0^{\theta_0} \rho_2(\theta') S(\theta' + \alpha_0) d\theta' \quad \cdots \cdots \cdots (43) \end{aligned}$$

●弧 a_1a_2 同様に、接線方向の釣り合いより、

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= -H_x W(\beta_0) - \int_{\alpha}^{\alpha_0} \rho_1(\alpha') S(\alpha') d\alpha' \\ &\quad - \int_0^{\theta_0} \rho_2(\theta) S(\theta + \alpha_0) d\theta \\ &\quad - \int_0^{\varphi_0} \rho_3(\varphi) S(\varphi + \alpha_0 + \theta_0) d\varphi \quad \cdots \cdots \cdots (44) \end{aligned}$$

垂直方向の釣り合いより、

$$Q(\alpha) = -\rho_1(\alpha) P(0, \alpha) + \rho_1(\alpha) p_0 \quad \cdots \cdots \cdots (45)$$

上式に、式(21)、(44)を代入して、

$$\begin{aligned} C_4(\alpha) &= H_x W(\beta_0) + \rho_1(\alpha) p_0 \\ &\quad + \int_{\alpha}^{\alpha_0} \rho_1(\alpha') S(\alpha') d\alpha' + \int_0^{\theta_0} \rho_2(\theta) S(\theta + \alpha_0) d\theta \\ &\quad + \int_0^{\varphi_0} \rho_3(\varphi) S(\varphi + \alpha_0 + \theta_0) d\varphi \quad \cdots \cdots \cdots (46) \end{aligned}$$

●弧 c_1c_2 同様に、接線方向の釣り合いより、

$$Q(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha_0} \{\rho_1(\alpha') + H\} S(\alpha') d\alpha' \quad \cdots \cdots \cdots (47)$$

垂直方向の釣り合いより、

$$Q(\alpha) = \{\rho_1(\alpha) + H\} P(H, \alpha) \quad \cdots \cdots \cdots (48)$$

上式に、式(24)、(47)を代入し、式(30)第1式を適用すると、

$$\begin{aligned} C_5(\alpha) &= H \{2W(\alpha) + S'(\alpha)\} \\ &\quad + \int_{\alpha}^{\alpha_0} \{\rho_1(\alpha') + H\} S(\alpha') d\alpha' \quad \cdots \cdots \cdots (49) \end{aligned}$$

●弧 b_4b_5 (ケース B のみ) 接線方向の力の釣り合いに対し、点 b_5 で応力は零になること、および、はりとローラの間に摩擦が働かないことを考慮し、積分すると、

$$Q(\beta) = \eta_0 W(\beta) \quad \cdots \cdots \cdots (50 \cdot B)$$

垂直方向の力の釣り合いより、

$$Q(\beta) = \eta_0 \{-P(0, \beta) + p_1(\beta)\} \quad \cdots \cdots \cdots (51 \cdot B)$$

ここで、 $p_1(\beta)$ ははりと支持ローラとの接触圧力である。上式に、式(12・B)、(50・B)を代入すると、

$$C_1(\beta) = \eta_0 \{p_1(\beta) - W(\beta)\} \quad \cdots \cdots \cdots (52 \cdot B)$$

●弧 b_3b_4 接線方向の釣り合いより、

$$\begin{aligned} Q(\varphi) &= Q(\varphi_0) \\ &\quad + \int_{\varphi}^{\varphi_0} \{\rho_3(\varphi') + H_0\} S(\varphi' + \alpha_0 + \theta_0) d\varphi' \quad \cdots \cdots \cdots (53) \end{aligned}$$

ここで、積分値 $Q(\varphi_0)$ は、ケース A では、後節で支持点 b_4 での力の釣り合いより求まる定数であり、ケース B では、特異応力の連続条件から式(50・B)より、

$$Q(\varphi_0) = Q(\beta = \beta_0) = \eta_0 W(\beta_0) \quad \cdots \cdots \cdots (54)$$

と求まる。

垂直方向の釣合いより、

$$Q(\varphi) = \{\rho_3(\varphi) + H_0\}P(H_0, \varphi) \quad \dots\dots\dots(55)$$

上式に、式(15)、(53)を代入すると、

$$\begin{aligned} C_2(\varphi) &= Q(\varphi_0) \\ &+ H_0\{2W(\varphi + \alpha_0 + \theta_0) + S'(\varphi + \alpha_0 + \theta_0)\} \\ &+ \int_{\varphi_0}^{\varphi} \{\rho_3(\varphi') + H_0\}S(\varphi' + \alpha_0 + \theta_0)d\varphi' \\ &\dots\dots\dots(56) \end{aligned}$$

●弧 b_2b_3 弧 b_2b_3 の上下に働くせん断応力は、式(16)、(25)により、等しいことがわかるので特異応力は一定である。したがって、式(53)より、

$$\begin{aligned} Q &= Q(\varphi = 0) \\ &= Q(\varphi_0) + \int_0^{\varphi_0} \{\rho_3(\varphi) + H_0\}S(\varphi + \alpha_0 + \theta_0)d\varphi \\ &\dots\dots\dots(57) \end{aligned}$$

垂直方向の力の釣合いより、式(18)、(27)を用い、

$$Q = C_3(\theta) - C_6(\theta) + H_0T_0 \quad \dots\dots\dots(58)$$

上式と式(57)を等置し、

$$\begin{aligned} C_3(\theta) - C_6(\theta) &= Q(\varphi_0) \\ &+ \int_0^{\varphi_0} \{\rho_3(\varphi) + H_0\}S(\varphi + \alpha_0 + \theta_0)d\varphi \quad \dots\dots(59) \end{aligned}$$

●弧 b_1b_2 同様に、特異応力は式(57)に等しい。

垂直方向の力の釣合いより、

$$Q = C_4(\alpha) - C_5(\alpha) + T_0H_0 \quad \dots\dots\dots(60)$$

上式に式(55)を代入し、

$$\begin{aligned} C_4(\alpha) - C_5(\alpha) &= Q(\varphi_0) \\ &+ \int_0^{\varphi_0} \{\rho_3(\varphi) + H_0\}S(\varphi + \alpha_0 + \theta_0)d\varphi \quad \dots\dots(61) \end{aligned}$$

以上、ケース A の $Q(\varphi_0)$ を除いて、すべての特異応力と $C_1(\beta) \sim C_6(\theta)$ を決定することができた。

4・4 積分方程式 先に求めた関数 $C_1(\beta) \sim C_6(\alpha)$ に関する式から、未知であった曲率半径 $\rho_1(\alpha)$ 、 $\rho_2(\theta)$ 、 $\rho_3(\phi)$ を求める。

式(61)に、式(46)、(49)を代入すると、曲率半径 $\rho_1(\alpha)$ に関する式が、次のように得られる。

$$\begin{aligned} p_0\rho_1(\alpha) &= Q(\varphi_0) + H\{W(\alpha) + W(\alpha_0) + G\} \\ &- H_0W(\alpha_0 + \theta_0) - \int_0^{\theta_0} \rho_2(\theta)S(\theta + \alpha_0)d\theta \\ &\dots\dots\dots(62\cdot A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_0\rho_1(\alpha) &= H\{W(\alpha) + W(\alpha_0) + G\} \\ &- H_0W(\alpha_0 + \theta_0) - \int_0^{\theta_0} \rho_2(\theta)S(\theta + \alpha_0)d\theta \\ &\dots\dots\dots(62\cdot B) \end{aligned}$$

式(59)に、式(32)、(43)を代入することにより、曲率半径 $\rho_2(\theta)$ に関する積分方程式が得られる。

$$\rho_2(\theta) + k_0^2 \int_0^{\theta_0} K(\theta, \theta')\rho_2(\theta')d\theta' = f(\theta) \quad \dots\dots\dots(63)$$

ただし、

$$K(\theta, \theta') = \begin{cases} \theta + \alpha_0 & \theta' < \theta \\ \theta' + \alpha_0 & \theta' > \theta \end{cases} \quad \dots\dots\dots(64)$$

$$f(\theta) = \begin{cases} k_0^2 H\alpha_0(\theta + \alpha_0) + k_0^2 Q(\varphi_0)/G \\ -k_0^2 H_0W(\alpha_0 + \theta_0)/G & \dots\dots\dots(65\cdot A) \\ k_0^2 H\alpha_0(\theta + \alpha_0) \\ -k_0^2 H_0W(\alpha_0 + \theta_0)/G & \dots\dots\dots(65\cdot B) \end{cases}$$

$$k_0^2 = G/(G + p_0) \quad \dots\dots\dots(66)$$

上式のフレドホルム形第2種積分方程式(63)は、段部端面に対応する領域 $a_2a_3b_3c_2$ のはり軸線に垂直な方向の力の釣合いを表す。この積分方程式の解を次のように仮定する。

$$\rho_2(\theta) = C_1 \cos k_0\theta + C_2 \sin k_0\theta \quad \dots\dots\dots(67)$$

ここで、 C_1 、 C_2 は、上式を式(63)に代入することにより、ただちに求められる。

$$\begin{aligned} C_1 &= [k_0^2 Q(\varphi_0)/G - k_0^2 H_0(\alpha_0 + \theta_0)^2/2 \\ &+ k_0 H\alpha_0\{k_0(\theta_0 + \alpha_0)\cos k_0\theta_0 \\ &- \sin k_0\theta_0\}]/\{k_0(\alpha_0 + \theta_0)\sin k_0\theta_0 \\ &+ \cos k_0\theta_0\} \quad \dots\dots\dots(68\cdot A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= [-k_0^2 H_0(\alpha_0 + \theta_0)^2/2 \\ &+ k_0 H\alpha_0\{k_0(\alpha_0 + \theta_0)\cos k_0\theta_0 \\ &- \sin k_0\theta_0\}]/\{k_0(\alpha_0 + \theta_0)\sin k_0\theta_0 \\ &+ \cos k_0\theta_0\} \quad \dots\dots\dots(68\cdot B) \end{aligned}$$

$$C_2 = k_0 H\alpha_0 \quad \dots\dots\dots(69)$$

式(40)と(56)を等置することによって、曲率半径 $\rho_3(\varphi)$ を求める式を得る。

$$p_0\rho_3(\varphi) = Q(\varphi_0) + H_0\{W(\varphi + \alpha_0 + \theta_0) + G\} \quad \dots\dots\dots(70\cdot A)$$

$$p_0\rho_3(\varphi) = H_0\{W(\varphi + \alpha_0 + \theta_0) + G\} \quad \dots\dots\dots(70\cdot B)$$

4・5 支持部における力の釣合い

●ケース A 点 b_4 における繊維に垂直方向と接線方向の力の釣合いは、それぞれ、

$$\begin{aligned} R \cos \beta_0 \\ = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^{\beta_0} P(\eta, \beta)\eta \cos(\beta_0 - \beta)d\beta \quad \dots\dots(71\cdot A) \end{aligned}$$

(ここで、 R は支持反力である。)

$$\begin{aligned} -Q(\varphi_0) + R \sin \beta_0 \\ = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^{\beta_0} P(\eta, \beta)\eta \sin(\beta_0 - \beta)d\beta \quad \dots\dots(72\cdot A) \end{aligned}$$

式(71・A)に、式(12・A)を代入すると、

$$R = H_0\{p_0 \sin \beta_0 + S(\beta_0)\}/\cos \beta_0 \quad \dots\dots(73\cdot A)$$

式(72・A)に、式(12・A)、(73・A)を代入すると、

$$Q(\varphi_0) = -GH_0\beta_0(\beta_0/2 - \tan \beta_0)$$

$$+p_0 H_0 (1 - \cos \beta_0) / \cos \beta_0 \cdots \cdots (74 \cdot A)$$

これは、今まで未知であった点 b_4 における特異応力の大きさである。

●ケース B 式(37・B)と式(52・B)を等置すると、

$$p_1(\beta) = \{H_0 W(\beta) + H_0 S'(\beta) + (H_0 + \eta_0) p_0\} / \eta_0 \cdots \cdots (75 \cdot B)$$

この支持反力 $p_1(\beta)$ をローラとはりの接触面全体で積分した全反力は、作用する等分布荷重の全体の垂直成分に釣合うから、

$$l_0 p_0 = \int_0^{\beta_0} p_1(\beta) \eta_0 \sin \beta d\beta \cdots \cdots (76 \cdot B)$$

以上により、はりの変形状態が完全に決定された。

すなわち、

●ケース A 式(62), (67), (70)を式(3)~(5)に代入し、その結果の3式と式(2)とから、 $\alpha_0, \beta_0, \theta_0, \varphi_0$ に関する四元連立方程式が導かれる。これを解いてはりの変形状態が完全に決定される。

●ケース B 式(76・B)を解くことによって、 β_0 が決定される。この結果と、式(62), (67), (70)を、式(4), (9・B)に代入した2式および式(2)とから、 $\alpha_0, \theta_0, \varphi_0$ に関する三元連立方程式が導かれる。これを解いてはりの変形状態が完全に決定される。

5. 考 察

5・1 はりの変形状態 等分布荷重 p_0 を変化させた場合のはりの変形状態を図2に示す。図で、ケース A は左側、ケース B は右側に示す。荷重 p_0 は、ケース A では、変形前のはり長さ $2L$ に、ケース B では、支持ローラ軸間 $2l_0$ (不変) にわたって、はり上面に作用する。変形前に L と l_0 を等しく設定するが、変形に伴い、ケース A では、荷重の作用する水平長さは減少する。図に示すように、荷重の増加に従い、変形状態に相異が生じるが、これを中央部上面におけるたわみ量 D_{ef} によって比較すると、図3のようになる。

荷重 p_0 の増加に従い、ケース A では、たわみ増加の割合は減少し、ケース B では、かえって増大する。これは、その支持方法の違いによるためで、特にケース B では、部材は次々に支点間に送り込まれるために、ケース A のような部材長さの制約は受けていない。

次に、ケース B で、支持ローラ径を変えた場合の中央部上面のたわみ量 D_{ef} の変化を図4に示す。明らかに、ローラ径が大きいほど、変形しにくい状態となる。

5・2 曲率半径 ケース A において、図2中央の変形状態にあるはりの上面の曲率半径を、図5に示

す。

それぞれの領域における曲率半径は、領域境界部において不連続である。段部に対応する部分の曲率半径 ρ_2 は他の部分のそれに比べて大変小さい。この点、第4報の集中荷重の場合に、 $\rho_1 \rightarrow \infty, \rho_3 \rightarrow \infty$ であったことと考え合わせると、等分布荷重の場合でも、類似した変形状態を生じることがわかる。

5・3 段部底部のはく離応力 段部底部点 b_3 で繊維方向に働くせん断応力 τ_d と、繊維に垂直方向に働く引張応力 σ_d を考える。これらは段部が上の部分とはく離するように働く応力なので、それぞれはく離せん断応力、はく離垂直応力と呼ぶ。

$\tau_d = S(\xi = H_{0+}, \theta = \theta_{0-})$ であるから、式(25), (30), (2)より、

$$\tau_d / G = \alpha_0 + \theta_0 \cdots \cdots (77)$$

一方、 $\sigma_d = -P(\xi = H_{0+}, \theta = \theta_{0-})$ であるから、式(27)に、式(32), (67)を適用すると、

図2 はりの変形状態

図3 荷重 p_0 とたわみ量との関係

図4 支持ローラ径とたわみ量との関係 (ケース B)

図5 変形状態における曲率半径

図6 はく離せん断応力とはく離垂直応力

$$\sigma_d/G = 1 \dots\dots\dots (78)$$

はく離せん断応力 τ_d は、変形状態、すなわち、分布荷重 p_0 に依存し、はく離垂直応力 σ_d は常に一定値をとる。これを図6に示す。このはく離応力に関する事情は、二つのケースで本質的相異はなく、また、集中荷重の場合とも同じである。

6. 結 言

理想化繊維強化複合材の理論に基づき、等分布荷重を受ける段付きはりの有限変形解析を行い、その解法と解析解を示した。得られた知見は以下のとおりである。

- (1) 等分布荷重を受ける段付きはりの変形状態は、図2のように得られる。ただし、はりの材料が線形弾性(準弾性)応答をする場合に限る。
- (2) はり支持部形式の相違によって、変形状態が異なる。すなわち、荷重 p_0 の増加に従い、両端単純支持では、たわみ量の増加の割合は減少し、変形しにくい状態となり、ローラ支持では、かえって増加の割合は増大し、変形は大きくなる。

- (3) 段部に対応する部分の平衡条件は、はり上面

の繊維の曲率半径を未知関数とするフレドホルム形第2種積分方程式で表される。

- (4) はりの上面の繊維の曲率半径は、仮定した変形領域境界で不連続である。段部に対応する部分の曲率半径は他に比べて極めて小さい。

- (5) はり段部底部のはく離せん断応力は、等分布荷重の増加によって、単調増加する。一方、はく離垂直応力は、荷重に依らず一定で、小さな荷重に対しても大きな値となる。

最後に、本研究に際し、東北大学名誉教授・八戸工業大学教授 渥美光先生には、温かいご激励、ご助言をいただいた。記して謝意を表す。また、本研究の一部は文部省科学研究費一般(C)の補助によるものである。

文 献

- (1) 倉茂, 機論, 52-480, A (昭61), 2010.
- (2) 七海・ほか2名, 機論, 52-473, A (昭61), 208.