理想化クロスプライ繊維強化材の有限平面変形* (第1報, 基礎式とき裂はりの三点曲げ)

倉 茂 道 夫**

Finite Plane Deformations of an Ideal Cross-Ply Fiber-Reinforced Material (1st Report, Basic Equations and Three-Point Bending of a Cracked Beam)

by Michio KURASHIGE

The finite three-point bending of a cross-ply fiber-reinforced beam with an edge crack is analysed in the framework of the theory of ideal fiber-reinforced composite materials. The beam is reinforced in its axial and lateral directions and simply supported at its ends. Its deformed configurations are compared with those of a uni-directionally fiber-reinforced beam of the same dimensions. The results of the analysis are shown in figures with an emphasis on the crack opening angle and the singular fiber stress at the crack tip.

Key Words: Elasticity, Beam, Edge Crack, Three-Point Bending, Finite Deformation, Cross-ply Fiber-reinforced Composite, Ideal Theory, Inextensibility

1. 緒 言

ゴム系繊維強化複合材は FRP などよりもはるかに古い複合材ではあるが、母材が高弾性のゴムであるため、その巨視的変形挙動の解析は有限変形論によらなければならず、必ずしも理論的解明が十分行われてきたとはいえない。それは有限変形であることによる困難に加えて、繊維強化による異方性などの効果による困難によるものである。この困難を解決(回避)するための一方策として、いわゆる「理想化繊維強化複合材の理論」⁽¹⁾⁽²⁾を用いるのが有力である。以下、「理想化理論」と呼ぶ。

実際の長繊維強化ゴム(FRR)では、母材のゴムのヤング率に対し繊維のヤング率は多くの場合1000倍にもなり、そのため、繊維に平行なせん断変形に比し繊維方向の伸び変形は無視できるほど小さい。この事実を繊維の方向に全く伸び縮みができないという理想化によって表現するのが、本報で採用する「理想化理論」である。すなわち、繊維の方向に伸縮しがたいという材料の力学的特性を構成関係によって表現するのでは

なく、全く伸び縮みしないという運動学的内部拘束⁽³⁾によって表現するものである。

著者らは、これまで、一方向にのみ繊維強化された複合材の有限平面変形を「理想化理論」により解析してきた。すなわち、軸方向に繊維強化された各種はりの大たわみの解析解を求めた^{(4)~(7)}。本報では、直交する二方向に繊維強化された複合材の有限平面変形(平面応力状態)の「理想化理論」を取扱う。両者を区別するために、前報の場合を「理想化一方向繊維強化材」、本報の場合を「理想化クロスプライ繊維強化材」と呼ぶことにする。前者は、一方向の非伸縮性と非圧縮性の二つの運動学的内部拘束を仮定し、後者は直交する二方向の非伸縮性の二つの運動学的内部拘束を仮定している。

第1報では、「理想化クロスプライ繊維強化材」の有限変形の基礎式を示し、軸方向および高さ方向に繊維強化され、き裂を中央下部に有するはりの三点曲げの解析法と解析解を示す。第2報は同じはりが等分布荷重を受ける場合を取扱う。

2. 基 礎 式

「理想化クロスプライ繊維強化材」の有限変形の基礎式を非伸張ネットワークの理論から借用する。Pip-

* 昭和61年6月21日 東北支部秋田地方講演会において講演, 原稿受付 昭和60年10月23日。

** 正員, 東北大学工学部 (〒980 仙台市荒巻字青葉)。

kin のネットワークの理論⁽⁸⁾は、非伸張性の直交する繊維で作られたネットワークの平面内変形の連続体理論で、直交する繊維間の角度の変化に対する弾性的抵抗を考慮している。ネットワークであるので、圧縮応力を支えることができず、つぶれて線状になった領域 (Collapsed region) や折りたたまれた領域 (fold) が発生したりするが、基礎式の借用に当たっては、若干解釈し直す必要がある。すなわち、「理想化クロスプライ繊維強化材」の有限平面変形 (平面応力状態) の場合、圧縮応力を支えることができ、したがって、つぶれて線状になった領域や折りたたまれた領域の発生は生じないものとする。

2.1 運動学 互いに直交する二つの長繊維群によって強化された複合材の平面変形を考える。母材は十分にコンプライアンスが大きく、繊維はその伸縮が無視できるほどヤング率の大きいものとする。数理的な取扱い上は、繊維と母材を区別せず、繊維の方向には完全に伸び縮みしないという運動学的な内部拘束を導入する。繊維は初め (変形前) 直交直線座標 (X, Y) に平行であるものとする。したがって、互いに直交する二つの長繊維群は $X = \text{const.}$ または $Y = \text{const.}$ によって表される。

有限平面変形により、変形前、点 (X, Y) にあった物質点が、変形後点 $x(X, Y)$ へ移動したものとす。この平面変形 (写像) で、繊維の微小要素 $d\mathbf{x}$ が $d\mathbf{x} = \mathbf{a}dX$ に写されたものとする。繊維の非伸縮の内部拘束条件により、 $\mathbf{a}$ は単位ベクトルでなければならない。したがって、ベクトル場 $\mathbf{a}$ は $Y = \text{const.}$ の変形後の繊維に接する単位ベクトル場である。同様に、微小要素 $d\mathbf{y}$ は $d\mathbf{y} = \mathbf{b}dY$ に写され、 $\mathbf{b}$ は $X = \text{const.}$ の変形後の繊維に接する単位ベクトル場である。すなわち

$$\mathbf{x}_x = \mathbf{a}, \mathbf{x}_y = \mathbf{b}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1 \quad (1)$$

最初の二式より

$$\mathbf{a}_y = \mathbf{b}_x \quad (2)$$

式 (1) の第三式と上式より

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(X), \mathbf{b} = \mathbf{b}(Y) \quad (3)$$

以上より

$$d\mathbf{x} = \mathbf{a}(X)dX + \mathbf{b}(Y)dY \quad (4)$$

積分して

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(X) + \mathbf{g}(Y) \quad (5)$$

かくして、それぞれの繊維群内の繊維は変形後合同な曲線であることがわかる。

ここで、変形前後の面積の変化比を表す量 J を次のように定義する。

$$J = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (6)$$

ただし、 $\mathbf{k}$ は変形平面に垂直な方向の単位ベクトルである。前述のつぶれて線状になった領域 ($J=0$) や折りたたまれた領域 ($J<0$) が発生しないためには

$$J > 0 \quad (7)$$

2.2 応力ポテンシャル 物体力の作用していない「理想化クロスプライ繊維強化材」の平衡条件を考える。変形平面内の2点、例えば、点 $(0, 0)$ と点 (X, Y) を結ぶ曲線を横切って働く力の合力を $\mathbf{F}(X, Y)$ とする。材料が平衡状態にあるならば、明らかに、 $\mathbf{F}(X, Y)$ は経路独立であり、逆に、経路独立ならば平衡状態にある。微小線素 (dX, dY) を横切って働く力は $d\mathbf{F}$ である。点 $(0, 0)$ まわりのモーメントは

$$\mathbf{M} = \int_0^X \mathbf{x}(X, Y) \times d\mathbf{F}(X, Y) \quad (8)$$

モーメントの平衡が成り立つためには、 $\mathbf{F}$ と同様、 $\mathbf{M}$ も経路独立でなければならない。そのためには

$$\mathbf{F}_y \times \mathbf{a} = \mathbf{F}_x \times \mathbf{b} \quad (9)$$

長さ dY の $\mathbf{b}$ -方向の線素を横切って働く力は $\mathbf{F}_y dY$ であり、長さ dX の $\mathbf{a}$ -方向の線素を横切って働く力は $\mathbf{F}_x dX$ である。したがって、 $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_x$ は応力ベクトルであり、それぞれを $\mathbf{a}$ -方向と $\mathbf{b}$ -方向の成分に分解すると

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_y &= T_a \mathbf{a} + S \mathbf{b} \\ \mathbf{F}_x &= -T_b \mathbf{b} - S \mathbf{a} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし、分解に当たり、モーメントの平衡条件式 (9) を満足するよう考慮した。 T_a , T_b は、それぞれ、 $\mathbf{a}$ -繊維、 $\mathbf{b}$ -繊維に働く張力 (応力)、 S はせん断応力である。

式 (10) から、 T_a , T_b , S を求めると

$$T_a = J^{-1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}_y, T_b = -J^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}_x \quad (11)$$

$$S = J^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}_y = -J^{-1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}_x \quad (12)$$

ただし、 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ は次式で定義されるベクトルである。

$$\mathbf{A} = \mathbf{b} \times \mathbf{k}, \mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{a} \quad (13)$$

2.3 応力と変形の関係 繊維の張力 (応力) T_a と T_b は繊維の非伸縮性に対する反作用応力で、「理想化クロスプライ繊維強化材」の平面変形中なんらの仕事をなさない。これに対し、せん断応力 S は $\mathbf{a}$ -方向と $\mathbf{b}$ -方向の角度の変化に対し、変形前の単位面積当たり $Sd(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ の仕事をする。したがって、ひずみエネルギー関数を W とすると

$$S = W'(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (14)$$

ここで、 W' は指数による微分を表す。

以下、Pipkin の提案になる特別なひずみエネルギー関数を考える。

すなわち

$$W = G(1 - J) \quad (15)$$

式 (14), (15) より

$$S = G\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} / J \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ はせん断角の正弦であり、 J は式(16)によりせん断角の余弦である。したがって、式(15)あるいは式(16)は、せん断応力 S はせん断角の正接に比例することを示す。

式(15)あるいは式(16)の構成関係は互いに直交する繊維の間の角度の変化に対し、弾性的な抵抗のあるネットワークに対し提案されたものであり、本報での「理想化クロスプライ繊維強化材」に借用する際には、その有限平面変形は平面応力状態と考えなければならない（あえて、平面ひずみ状態を考える場合には、 J は体積変化を意味するから、「理想化クロスプライ繊維強化材」の母材はフォーム・ラバーのような圧縮されやすい材料を考えなくてはならない）。

いずれにせよ、式(15)あるいは式(16)はまだ実験的に検証されているわけではないが、後述のように、このような構成関係を採用することは応力ポテンシャル $F(X, Y)$ を解析的に求めることができるという大きな利点を有する。

2・4 平衡式の積分 式(12)と式(16)を等置すると

$$\begin{aligned} B(X) \cdot F_{,Y}(X, Y) &= -A(Y) \cdot F_{,X}(X, Y) \\ &= G\mathbf{a}(X) \cdot \mathbf{b}(Y) \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

上式を Y および X で積分し、それぞれ積分定数を $M(X)$ および $N(Y)$ とすると

$$\begin{aligned} B(X) \cdot F(X, Y) &= M(X) + G\mathbf{a}(X) \cdot \mathbf{x}(X, Y) \\ A(Y) \cdot F(X, Y) &= N(Y) - G\mathbf{b}(Y) \cdot \mathbf{x}(X, Y) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ところで、式(13)を考慮すると

$$\mathbf{F} = (J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{A})\mathbf{a} + (J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{B})\mathbf{b} \quad \dots\dots\dots (19)$$

であるから、式(18)を代入すると、若干の計算の後に、次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= G\mathbf{k} \times \mathbf{x}(X, Y) \\ &+ J^{-1}(X, Y) \{N(Y)\mathbf{a}(X) + M(X)\mathbf{b}(Y)\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

変形が決定されると（あるいは、変形を仮定すると）、上式中の $\mathbf{x}(X, Y)$ 、 $\mathbf{a}(X)$ 、 $\mathbf{b}(Y)$ 、 $J(X, Y)$ が決まる。 $M(X)$ と $N(Y)$ は、式(18)において、境界上の外力から、境界上の $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0(X, Y)$ を決定すれば、求められる。外荷重が死荷重ならば、境界上の $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0(X, Y)$ を決定することは容易である。

3. き裂を有するはりの三点曲げ

変形前、長さが $2L$ で高さが H のはりの中央部に下面から垂直に長さ H_1 のき裂が入っている。リガメ

ント長さは $H_2 = H - H_1$ である。このはりはその軸方向および高さ方向に繊維強化されており、両端は水平方向に可動な支点で単純支持されている〔図1(a)参照〕。き裂の先端 O に原点をもつ直交直線座標 (X, Y) をとり、また、はり内の各点に図のように A, B, C, D, M の記号をつける。長方形 $OCDM$ を領域 I、長方形 $OABC$ を領域 II とする。

このはりが上面中央に集中荷重 P_0 を受ける三点曲げの状態を考える。この時の変形状態を図1(b)のように仮定する。領域 I 内の $\mathbf{a}$ -繊維の傾きを α_0 、領域 II 内の $\mathbf{a}$ -繊維の傾きを α_0 、 $\mathbf{b}$ -繊維の傾きを β_0 とする。 X -方向および Y -方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ とすると、明らかに、領域 I では

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{i} \cos \alpha_0 + \mathbf{j} \sin \alpha_0 \\ \mathbf{b} &= \mathbf{j} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{i} \cos \alpha_0 + \mathbf{j} \sin \alpha_0)X + \mathbf{j}Y \quad \dots\dots\dots (22)$$

領域 II では

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{i} \cos \alpha_0 + \mathbf{j} \sin \alpha_0 \\ \mathbf{b} &= -\mathbf{i} \sin \beta_0 + \mathbf{j} \cos \beta_0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\mathbf{i} \cos \alpha_0 + \mathbf{j} \sin \alpha_0)X \\ &+ (-\mathbf{i} \sin \beta_0 + \mathbf{j} \cos \beta_0)Y \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

したがって、式(6)、(13)を用いると、領域 I では

$$J = \cos \alpha_0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}, \mathbf{B} = -\mathbf{i} \sin \alpha_0 + \mathbf{j} \cos \alpha_0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

領域 II では

$$J = \cos(\beta_0 - \alpha_0) \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{i} \cos \beta_0 + \mathbf{j} \sin \beta_0 \\ \mathbf{B} &= -\mathbf{i} \sin \alpha_0 + \mathbf{j} \cos \alpha_0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (28)$$

(a) 変形前

(b) 変形後

図1 き裂を有するはりの三点曲げ

次に、境界における応力ポテンシャル $F_0(X, Y)$ を求める。容易に

$$\left. \begin{aligned} \text{OA} : F_0(0, Y) &= 0 \\ \text{BC} : F_0(L, Y) &= (P_0/2)j \\ \text{AB} : F_0(X_1 - H_1) &= 0 \\ \text{CD} : F_0(L, Y) &= (P_0/2)j \\ \text{DM} : F_0(X, H_2) &= (P_0/2)j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

式(18)の第1式に式(23), (24), (28), 式(29)の第3式を代入すると

$$\text{AB} : M(X) = -G\{X + H_1 \sin(\beta_0 - \alpha_0)\} \dots\dots (30)$$

同様に、式(18)の第1式に式(21), (22), (26), 式(29)の第5式を代入すると

$$\text{DM} : M(X) = (P_0/2) \cos \alpha_0 - G(X + H_2 \sin \alpha_0) \dots\dots\dots (31)$$

上の2式を等置すると

$$(P_0/2) \cos \alpha_0 = G\{H_2 \sin \alpha_0 - H_1 \sin(\beta_0 - \alpha_0)\} \dots\dots\dots (32)$$

式(18)の第2式に式(23), (24), (28), 式(29)の第1式を代入すると

$$\text{OA} : N(Y) = GY \dots\dots\dots (33)$$

同様に、式(18)の第2式に式(23), (24), (28), 式(29)の第2式を代入すると

$$\text{BC} : N(Y) = (P_0/2) \sin \beta_0 + G\{Y - L \sin(\beta_0 - \alpha_0)\} \dots\dots\dots (34)$$

上の2式を等置すると

$$(P_0/2) \sin \beta_0 = GL \sin(\beta_0 - \alpha_0) \dots\dots\dots (35)$$

最後に、式(18)の第2式に式(21), (22), (26), 式(29)の第4式を代入すると

$$\text{CD} : N(Y) = G(Y + L \sin \alpha_0) \dots\dots\dots (36)$$

以上により、 $M(X)$ は領域I, II共通に式(30)または式(31)で与えられ、 $N(Y)$ は領域Iでは式(36)により、領域IIでは式(33)または式(34)によって与えられる。また、式(32)および式(35)は未知の定数 α_0, β_0 を決定するために用いられる。

求めた $M(X), N(Y)$ を用いて、応力ポテンシャル $F(X, Y)$ を決定する。まず、領域Iに対しては、式(20)に式(21), (22)と式(30), (36)を代入すると

$$F = G\{(L - X)(i \cos \alpha_0 + j \sin \alpha_0) + (Y - H_2)j\} \tan \alpha_0 + (P_0/2)j \dots\dots\dots (37)$$

領域IIに対しては、式(20)に式(23), (24)と式(30), (33)を代入すると、若干の計算の後、次式を得る。

$$F = G\{X(i \cos \alpha_0 + j \sin \alpha_0) - (Y + H_1)(-i \sin \beta_0 + j \cos \beta_0)\} \tan(\beta_0 - \alpha_0) \dots\dots\dots (38)$$

結局、求めた応力ポテンシャル $F(X, Y)$ と式(11)(12)より、領域Iでは

$$T_a = T_b = 0, S = G \tan \alpha_0 \dots\dots\dots (39)$$

領域IIでは

$$T_a = T_b = 0, S = G \tan(\beta_0 - \alpha_0) \dots\dots\dots (40)$$

すなわち、領域I, II内では繊維に張力は働かず、せん断応力のみが働いている状態になっている。

しかしながら、はりの境界の繊維およびはり内の繊維OC, OMに特異応力が発生していることは明らかである。各繊維における特異応力の強さは以下のよう

$$\text{OA} : F(0, Y) - F_0(0, Y) = -G(Y + H_1) \times (-i \sin \beta_0 + j \cos \beta_0) \tan(\beta_0 - \alpha_0) \dots\dots (41)$$

$$\text{AB} : F(X_1 - H_1) - F_0(X, -H_1) = GX(i \cos \alpha_0 + j \sin \beta_0) \tan(\beta_0 - \alpha_0) \dots\dots (42)$$

$$\text{BC} : F(L, Y) - F_0(L, Y) = -G\{L \cos \alpha_0 / \sin \beta_0 + Y + H_1\}(-i \sin \beta_0 + j \cos \beta_0) \tan(\beta_0 - \alpha_0) \dots\dots\dots (43)$$

$$\text{CD} : F(L, Y) - F_0(L, Y) = -G(H_2 - Y)j \tan \alpha_0 \dots\dots\dots (44)$$

$$\text{DM} : F(X, H_2) - F_0(X, H_2) = G(L - X) \times (i \cos \alpha_0 + j \sin \alpha_0) \tan \alpha_0 \dots\dots\dots (45)$$

$$\text{OM} : F(0_-, Y) - F(0_+, Y) = -P_0j - 2G\{L \sin \alpha_0 - (H_2 - Y)\} \tan \alpha_0 j \dots\dots (46)$$

$$\text{OC} : F(X, 0_+) - F(X, 0_-) = G\{(L - X) \tan \alpha_0 - X \tan(\beta_0 - \alpha_0) - H_1 \sin \beta_0 \tan(\beta_0 - \alpha_0) / \cos \alpha_0\}(i \cos \alpha_0 + j \sin \alpha_0) \dots\dots (47)$$

求めた特異応力は点O, A, B, C, D, Mで釣合っていることを容易に示すことができる。

以上、最初に仮定した変形状態に対し、境界条件を満足する応力・特異応力を完全に決定することができた。

4. 数値計算と結果

前章までの解析に基づいて、若干の数値計算を行い、「理想化クロスプライ繊維強化材」のき裂はりの三点曲げの有限変形の様相とき裂開口角およびき裂先端の特異応力について明らかにした。式(32), (35)による α_0 と β_0 の決定はニュートン法によった。

図2ははりの大変形の様子を示すもので、はりの半長 $L/H=1.2$, き裂の深さ $H_1/H=0.4$ に対し、荷重を $P_0/2GH=0.2, 0.4, 0.6$ とした。はり全体が純せん断状態にあり、き裂先端は尖っており、き裂面は直線である。本報の「理想化クロスプライ繊維強化はり」と比較するため、図3に、「理想化一方向繊維強化はり」の大変形の様子を示した⁽⁶⁾。一見して、両者の相違は

明白である。前者は全体が純せん断状態にあるのに対し、後者では荷重点の下および両端部に扇状の変形部が存在し、それらの中間部が純せん断状態になっている。前者ではき裂先端を通る軸方向および縦の繊維は

変形の不連続線（静弾性ショック）⁽⁹⁾になっているが、後者では繊維はすべて滑らかな変形をしている。荷重点のたわみ量は前者のほうがやや大きい。

図4と5は荷重 $P_0/2GH$ に対するき裂開口角（の

図2 理想化クロスプライ繊維強化はりの大変形の様子 ($L/H=1.2$, $H_1/H=0.4$)

図3 理想化一方向繊維強化はりの大変形の様子 ($L/H=1.2$, $H_1/H=0.4$)

図4 荷重に対するき裂開口角の変化 (き裂深さの影響)

図5 荷重に対するき裂開口角の変化 (はりの長さの影響)

図6 荷重に対するき裂先端の特異応力の変化
(き裂深さの影響)

図7 荷重に対するき裂先端の特異応力の変化
(はりの長さの影響)

半分) β_0 の変化の様子を示す。図4はき裂深さの影響を示すもので、 $H_1/H=0.1, 0.3, 0.5$ の場合を示した。当然にも、き裂が深いほうがき裂開口角は大きい。図5ははりの長さ (の半分) L の影響を示すもので、 $L/H=1.0, 1.4, 1.8$ の場合を示した。同じ荷重に対し、はりが長いほど、き裂開口角が小さく、繊維強化されていはいりと対照的である。これは、き裂の開口がはりのせん断変形、とりわけ、領域IIの部分のせん断変形によるものであるため、はりが長ければ同じ外荷重に対しせん断変形が小さくなるからである。

図6と7は荷重 $P_0/2GH$ に対するき裂先端の軸方向繊維に働く特異応力の強さ Q/GH を示すもので、 Q は式(46)より

$$Q = G \{ L \tan \alpha_0 - H_1 \sin \beta_0 \tan(\beta_0 - \alpha_0) / \cos \alpha_0 \} \quad \dots\dots\dots(48)$$

図6はき裂の深さの影響を示すもので、 $H_1/H=0.1, 0.3, 0.5$ の場合を示した。特異応力の大きさははりの深さの違いによって大きく異なっている。図7ははりの長さの影響を示すもので、 $L/H=1.0, 1.4, 1.8$ の場合を示した。き裂開口角の場合とは反対に、はりが長いほど特異応力は大きい。

5. 結 言

「理想化クロスプライ繊維強化材」の有限平面変形理論の基礎式について説明し、その簡単な応用例として、き裂を有するはりの三点曲げの有限変形解析を行い、解法と解を示した。得られた知見は以下のとおりである。

- (1) き裂を有するはりの三点曲げの変形状態は図2に示すようなもので、全体が純せん断状態にある。
- (2) き裂先端を通る軸方向および縦の繊維は変形の不連続線 (静弾性ショック) になっている。
- (3) き裂開口角は、荷重の大きいほど、またき裂が深いほど、大きい。しかし、はりが長いほど、開口角は小さい。
- (4) き裂先端の軸方向繊維に働く特異応力は、荷重、き裂深さ、はりの長さの増大とともに、大きくなる。

終わりに、本研究に際し、東北大学名誉教授 渥美光先生には温かいご激励・ご助言をいただいた。記して謝意を表す。また、本研究は文部省科学研究費一般 (C) の補助によるものである。

文 献

- (1) Pipkin, A. C. (Sendekyj, G. P. 編), *Composite Materials, Mechanics of Composite Materials*, 2 (1974), 252, Academic Press.
- (2) Spencer, A. J. M., *Deformations of Fiber-reinforced Materials*, (1972), 1, Clarendon Press.
- (3) Truesdell, C. (Flügge, S. 編), *Encyclopedia of Physics, The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, III/3 (1965), 69, Springer-Verlag.
- (4) 七海・ほか2名, 機論, 52-473, A (昭61), 208.
- (5) 高橋・ほか2名, 機論, 52-474, A (昭61), 512.
- (6) 倉茂, 機論, 52-476, A (昭61), 926.
- (7) 倉茂, 機論, 52-480, A (昭61), 2010.
- (8) Pipkin, A. C., *Q. Appl. Math.*, 38 (1980), 343.
- (9) Kurashige, M., *Tech. Rep. Tohoku Univ.*, 49-2 (1984), 115.