金属系複合材料の構成方程式に関する研究*

(第 1 報, 一方向強化材の応力ひずみ関係式)

浜 中 順 一**, 大 矢 弘 史**
富 岡 史 城**, 大 鍋 寿 一**

The Constitutive Equations of Fiber Reinforced Materials (1st Report, The Stress-Strain Relations of Unidirectionally Fiber Reinforced Metals)

by Jyunichi HAMANAKA, Hiroshi OHYA,
Fumiki TOMIOKA, and Hisaichi OONABE

The constitutive equations of unidirectionally fiber reinforced metals were derived. A modified fraction model's concept was applied to matrix and fiber separately. Additionally, equilibrium and compatibility were considered between matrix and fiber for deriving constitutive relations. The proposed theory is expected to describe the inelastic behaviour of FRM, and the strain rate dependency of stress-strain relations.

Key Words: Constitutive Equations, Fiber Reinforced Materials, Fraction Model

1. 結 言

金属系複合材料 FRM は, そのマトリックスが金属であることから FRP に比べてより高い耐衝撃性, 耐熱性を期待されている。したがって FRM 部材の変形挙動, 破壊挙動を解析するためには次の二つの条件を満足する多軸異方性の構成方程式を開発する必要がある。

(1) 静的負荷から衝撃負荷まで広いひずみ速度域にわたって材料挙動を記述できること。

(2) 高温または高負荷のもとで塑性, クリープなどの非弾性挙動を記述できること。

著者らの知る限り, このような複合材料の構成式はまだ発表されていない。そこで本報告では上記 2 条件を満足する可能性をもつ一方向強化 FRM の新しい構成方程式を提案する。

2. 単位要素のモデル化

一方向強化材の単位要素を図 1 のごとくモデル化する。ここでは議論を簡単にするため繊維は長方形に配

* 昭和 61 年 3 月 14 日 東海支部第 35 期総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 60 年 4 月 26 日。

** 正員, 石川島播磨重工業(株) (〒135 東京都江東区豊洲 3-1-15)。

列されているものとする。さらに単位要素のマトリックスの部分を図 2 のように 3 種類の一様応力場(一様ひずみ場)をもつ部分マトリックス $m1, m2, m3$ に分割する。この単位要素に働く巨視的な応力およびひずみを各々 $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ とする。また単位要素を構成している部分マトリックスの応力, ひずみを $\sigma_m^1, \sigma_m^2, \sigma_m^3, \epsilon_m^1, \epsilon_m^2, \epsilon_m^3$ とし繊維の応力, ひずみを σ_f, ϵ_f とす

図 1 単位要素のモデル化

図 2 単位要素を構成するマトリックスおよび繊維

る。

単位要素の繊維方向 (z 方向) の力のつりあいから

$$\sigma_z = V_f \cdot \sigma_z^f + V_{m1} \sigma_z^{m1} + V_{m2} \sigma_z^{m2} + V_{m3} \sigma_z^{m3} \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる。ここで $V_f, V_{m1}, \dots, V_{m3}$ は各々繊維と部分マトリックスの体積率である。一方ひずみの適合条件は

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^f = \varepsilon_z^{m1} = \varepsilon_z^{m2} = \varepsilon_z^{m3} \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。同様に x 方向, y 方向の力のつりあいは

$$\sigma_x = V_f \cdot \sigma_x^f + V_{m1} \sigma_x^{m1} + V_{m2} \sigma_x^{m2} + V_{m3} \sigma_x^{m3} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\sigma_x^f = \sigma_x^{m2}, \quad \sigma_x^{m1} = \sigma_x^{m3} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\sigma_y^f = \sigma_y^{m1}, \quad \sigma_y^{m2} = \sigma_y^{m3} \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。また x, y 方向のひずみの適合条件は

$$a \cdot \varepsilon_x = c \cdot \varepsilon_x^{m1} + (a-c) \cdot \varepsilon_x^{m3} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$= c \cdot \varepsilon_x^f + (a-c) \cdot \varepsilon_x^{m2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$b \cdot \varepsilon_y = c \cdot \varepsilon_y^{m2} + (b-c) \cdot \varepsilon_y^{m3} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$= c \cdot \varepsilon_y^f + (b-c) \cdot \varepsilon_y^{m1} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。

次に面内せん断をうける場合を図3に示す。まず単位要素の力のつりあいから

$$a \cdot \tau_{xy} = c \cdot \tau_{xy}^{m1} + (a-c) \cdot \tau_{xy}^{m3} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$a \cdot \tau_{xy} = c \cdot \tau_{xy}^f + (a-c) \cdot \tau_{xy}^{m2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$b \cdot \tau_{xy} = c \cdot \tau_{xy}^{m2} + (b-c) \cdot \tau_{xy}^{m3} \quad \dots\dots\dots (12)$$

が成り立つ。また巨視的なせん断ひずみ γ_{xy} を

$$\gamma_{xy} = \Delta a / a + \Delta b / b \quad \dots\dots\dots (13)$$

と定義するとひずみの適合条件は次式で表せる。

$$b \cdot \gamma_{xy} = c / a \cdot \{ (a-c) \cdot \gamma_{xy}^{m2} + c \gamma_{xy}^f \} + (b-c) / a \cdot \{ (a-c) \cdot \gamma_{xy}^{m3} + c \gamma_{xy}^{m1} \} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\gamma_{xy}^{m1} - \gamma_{xy}^{m3} = \gamma_{xy}^f - \gamma_{xy}^{m2} \quad \dots\dots\dots (15)$$

同様に面外せん断応力 τ_{yz}, τ_{zx} のつりあい、面外せん断ひずみ γ_{yz}, γ_{zx} の適合条件を導くわけであるが式の詳細は省略する。

3. フラクシオンモデルの導入

2章では巨視的応力、ひずみと単位要素を構成する繊維、部分マトリックスの応力、ひずみとの関係を規定した。この章ではまず繊維、部分マトリックス各々の応力-ひずみ関係式をフラクシオンモデルによって定式化する。このフラクシオンモデルはメカニカルサブレイヤモデルとも呼ばれ、材料の非弾性挙動を特性の異なる部分要素の並列結合の応答で表現する。このモデルは理論の構造が簡単であり、材料の複雑な非弾性挙動をかなり忠実に表現することができる。また後に述べるごとくこのモデルを修正することで非弾性挙動の、ひずみ速度依存性をも組み入れることが可能である。

いまある体積率を持つ N 個の部分要素が結合したモデルを考える。このモデルに作用する応力速度を $\dot{\sigma}_{ij}$ 、ひずみ速度を $\dot{\varepsilon}_{ij}$ とすると、部分要素 k の応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}^k$ 、およびひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^k$ との間に

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^k, \quad \dot{\sigma}_{ij} = \sum_{k=1}^N \psi^k \cdot \dot{\sigma}_{ij}^k \quad \dots\dots\dots (16)$$

が成り立つとする。ここで ψ^k は部分要素 k の体積率で

$$\sum_{k=1}^N \psi^k = 1$$

の関係がある。Besseling⁽¹⁾は金属の非弾性挙動を表すために式(16)の $\dot{\varepsilon}_{ij}^k$ を弾性ひずみと塑性ひずみとクリープひずみの和として表現した。ところがこのようにするとクリープひずみに関するパラメータを実験結果と合うように決定するのが困難であることがわかった。そこで鈴木ら⁽²⁾はこの点を改良するために各部分要素の全ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^k$ を弾性ひずみ速度と時間依存の非弾性ひずみ速度の和であるとして

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^k = \dot{\varepsilon}_{ij:e}^k + \dot{\varepsilon}_{ij:i}^k \quad \dots\dots\dots (17)$$

と表した。ここで $\dot{\varepsilon}_{ij:e}^k, \dot{\varepsilon}_{ij:i}^k$ は各々部分要素 k の弾性ひずみ速度および非弾性ひずみ速度である。本報ではマトリックス、繊維とも部分要素の並列結合としてモデル化するが、その際式(17)を用いることにする。

いま単位要素を構成する部分マトリックスが各々ある体積率 (2章で述べた $V_f, V_{m1}, \dots$ ではなくフラクシオンモデルとしての体積率) をもつ N 個の部分要素の並列結合からなっていると考える。また繊維も同様に M 個の部分要素の結合であるとする。マトリックス ml ($l=1, 2, 3$) を構成する k 番めの部分要素の応力とひずみを $m_l \sigma_{ij}^k, m_l \varepsilon_{ij}^k$ とし繊維のそれを $f \sigma_{ij}^k, f \varepsilon_{ij}^k$ とする。またマトリックス ml の k 番めの部分要素の体積率を $m \psi^k$ (ml に共通とする)、繊維のそれを $f \psi^k$ とする。するとマトリックスに関して

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{ml} = m_l \dot{\varepsilon}_{ij}^k, \quad k=1, 2, \dots, N \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^{ml} = \sum_{k=1}^N m \psi^k \cdot m_l \dot{\sigma}_{ij}^k \quad \dots\dots\dots (19)$$

が成立する。ここで $i, j=1, 2, 3$ であり $l=1, 2, 3$ である。同様に繊維に対しては

図3 xy 方向のせん断応力とせん断ひずみ

$$\dot{\epsilon}_{ij}^k = f \dot{\epsilon}_{ij}^k, \quad k=1, 2, \dots, M \quad (20)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \sum_{k=1}^M f \psi^k \cdot f \dot{\sigma}_{ij}^k \quad (21)$$

となる。ここで $\sum_m \psi^k = 1$, $\sum_f \psi^k = 1$ である。マトリックスと繊維のひずみ速度は式(17)より

$$m \dot{\epsilon}_{ij}^k = m \dot{\epsilon}_{ij:e}^k + m \dot{\epsilon}_{ij:i}^k \quad (22)$$

$$f \dot{\epsilon}_{ij}^k = f \dot{\epsilon}_{ij:e}^k + f \dot{\epsilon}_{ij:i}^k \quad (23)$$

となる。ただし $l=1, 2, 3$ である。マトリックスと繊維の弾性係数を $m E_{ijkl}$, $f E_{ijkl}$ とすると弾性成分は

$$m \dot{\sigma}_{ij}^k = m E_{ijkl} \cdot m \dot{\epsilon}_{kl:e}^k \quad (24)$$

$$f \dot{\sigma}_{ij}^k = f E_{ijkl} \cdot f \dot{\epsilon}_{kl:e}^k \quad (25)$$

となる。また非弾性成分は式の変形を行うと

$$\dot{\epsilon}_{ij:i}^{ml} = \sum_{k=1}^N m \psi^k \cdot m \dot{\epsilon}_{ij:i}^k \quad (26)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij:i}^f = \sum_{k=1}^M f \psi^k \cdot f \dot{\epsilon}_{ij:i}^k \quad (27)$$

となる。ここで $\dot{\epsilon}_{ij:i}^{ml}$, $\dot{\epsilon}_{ij:i}^f$ は各々マトリックスと繊維のひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^{ml}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^f$ の非弾性成分である。また部分要素 k の非弾性成分は各々

$$m \dot{\epsilon}_{ij:i}^k = \frac{m \dot{\epsilon}^k}{2 \cdot m \bar{\sigma}^k} \cdot \frac{\partial (m \bar{\sigma}^k)^2}{\partial m \dot{\sigma}_{ij}^k} \quad (28)$$

$$f \dot{\epsilon}_{ij:i}^k = \frac{f \dot{\epsilon}^k}{2 \cdot f \bar{\sigma}^k} \cdot \frac{\partial (f \bar{\sigma}^k)^2}{\partial f \dot{\sigma}_{ij}^k} \quad (29)$$

より求める。ここでマトリックス、繊維ともに単独には等方性と考えられるから $m \bar{\sigma}^k$, $f \bar{\sigma}^k$ には通常のミーゼスの等価応力を用いる。また等価ひずみ速度 $m \dot{\epsilon}^k$, $f \dot{\epsilon}^k$ の関数形は、FRM 材のひずみ速度依存性および非弾性特性を表しうる次の2式を用いる。

$$\dot{\epsilon}^k = B^k (\bar{\sigma}^k)^{n^k} \quad (\text{べき乗形}) \quad (30)$$

$$\dot{\epsilon}^k = C^k \cdot \exp \left\{ -\frac{U_0}{kT} \left(1 - \frac{\bar{\sigma}^k}{\sigma_s^k} \right) \right\} \quad (\text{指数形}) \quad (31)$$

式(30), (31)でサブスクリプト ml, f は省略してある。また式中の定数はマトリックス、繊維各々の定ひずみ速度試験から求めることができる。

4. 巨視的な応力とひずみの関係

3章ではマトリックス、繊維各々にフラクシオンモデルを適用する方法を述べた。この章ではこれらのマトリックス、繊維からなる単位要素の巨視的応力と巨視的ひずみの関係を求める。巨視的な応力とひずみの関係はひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ を与えて求める場合と応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ を与えて求める場合とが考えられる。いずれの方法も定式化は可能であるがここでは $\dot{\epsilon}_{ij}$ を与えて巨視的応力 σ_{ij} と巨視的ひずみ ϵ_{ij} の関係を求める。

まずある時点でマトリックス、繊維の部分要素の応

力状態 $m \sigma_{ij}^k$, $f \sigma_{ij}^k$ とひずみ状態 $m \epsilon_{ij}^k$, $f \epsilon_{ij}^k$ がすべて既知であるとする。すると式(28), (29)より部分要素の非弾性ひずみ速度 $m \dot{\epsilon}_{ij:i}^k$, $f \dot{\epsilon}_{ij:i}^k$ を求めることができる。次に部分要素の応力速度 $m \dot{\sigma}_{ij}^k$, $f \dot{\sigma}_{ij}^k$ を求める。そのために式(18), (20)を用いて部分要素の弾性ひずみ速度を

$$m \dot{\epsilon}_{ij:e}^k = \dot{\epsilon}_{ij}^{ml} - m \dot{\epsilon}_{ij:i}^k \quad (32)$$

$$f \dot{\epsilon}_{ij:e}^k = \dot{\epsilon}_{ij}^f - f \dot{\epsilon}_{ij:i}^k \quad (33)$$

と表す。すると弾性側より部分要素の応力速度は

$$m \dot{\sigma}_{ij}^k = m E_{ijpq} (\dot{\epsilon}_{pq:e}^{ml} - m \dot{\epsilon}_{pq:i}^k) \quad (34)$$

$$f \dot{\sigma}_{ij}^k = f E_{ijpq} (\dot{\epsilon}_{pq:e}^f - f \dot{\epsilon}_{pq:i}^k) \quad (35)$$

となる。ここで $m E_{ijpq}$, $f E_{ijpq}$ は各々マトリックスと繊維の弾性係数である。次に単位要素を構成しているマトリックス、繊維の応力速度は式(19), (21)より

$$\dot{\sigma}_{ij}^{ml} = m E_{ijpq} \left(\dot{\epsilon}_{pq}^{ml} - \sum_{k=1}^N m \psi^k \cdot m \dot{\epsilon}_{pq:i}^k \right) \quad (36)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^f = f E_{ijpq} \left(\dot{\epsilon}_{pq}^f - \sum_{k=1}^M f \psi^k \cdot f \dot{\epsilon}_{pq:i}^k \right) \quad (37)$$

となる。上式で部分要素の非弾性ひずみ速度は既知であるが単位要素を構成しているマトリックス $m1, m2, m3$ と繊維のひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{pq}^l$ ($l=1, 2, 3$), $\dot{\epsilon}_{pq}^f$ が未知である。これらの値は与えられた巨視的なひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ と2章で述べた単位要素内の力のつりあいと適合条件から決定することができる。以下に $\dot{\epsilon}_{pq}^{ml}$, $\dot{\epsilon}_{pq}^f$ を求める具体的な方法を示す。

まず次のような各種のベクトル $\tilde{\epsilon}_x, \tilde{\epsilon}_y, \dots, \tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \dots, \tilde{\epsilon}_x:i, \tilde{\epsilon}_y:i, \dots$ を定義する。

$$\tilde{\epsilon}_x^T = (\dot{\epsilon}_x^{m1}, \dot{\epsilon}_x^{m2}, \dot{\epsilon}_x^{m3}, \dot{\epsilon}_x^f) \quad (38)$$

$$\tilde{\sigma}_x^T = (\dot{\sigma}_x^{m1}, \dot{\sigma}_x^{m2}, \dot{\sigma}_x^{m3}, \dot{\sigma}_x^f) \quad (39)$$

$$\tilde{\epsilon}_x^T:i = \left(\sum_{k=1}^N m \psi^k \cdot m \dot{\epsilon}_x^k:i, \sum_{k=1}^M f \psi^k \cdot f \dot{\epsilon}_x^k:i \right) \quad (40)$$

上式でスーパースクリプト T は転置を示す。 $\tilde{\epsilon}_y, \tilde{\sigma}_y, \dots$, についても同様である。次に対角項が $(2\mu+\lambda)_m, (2\mu+\lambda)_m, (2\mu+\lambda)_m, (2\mu+\lambda)_f$ で他は零である (4×4) の矩形マトリックスを $[A]$ とする。ここでサブスクリプト m, f はマトリックス、繊維を示し μ, λ は各々

$$\mu = G, \quad \lambda = 2\nu G / (1 - 2\nu) \quad (41)$$

である。さらに対角項が $\lambda_m, \lambda_m, \lambda_m, \lambda_f$ で他の項は零である (4×4) のマトリックスを $[B]$, 対角項が $\mu_m, \mu_m, \mu_m, \mu_f$ で他の項が零である (4×4) のマトリックスを $[C]$ と表す。すると式(36), (37)は

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x &= [A] \cdot \tilde{\epsilon}_x + [B] \cdot \tilde{\epsilon}_y + [B] \cdot \tilde{\epsilon}_z \\ &\quad - [A] \cdot \tilde{\epsilon}_x:i - [B] \cdot \tilde{\epsilon}_y:i - [B] \cdot \tilde{\epsilon}_z:i \quad (42) \end{aligned}$$

$$\tilde{\sigma}_{xy} = [C] \cdot \tilde{\epsilon}_{xy} - [C] \cdot \tilde{\epsilon}_{xy:i} \quad (43)$$

とマトリックス表示することができる。次に2章の式(4), (6), (7)をマトリックス表示し式(42)を代入すると

$$[s_x] \cdot [A] \cdot \tilde{\epsilon}_x + [s_x] \cdot [B] \cdot \tilde{\epsilon}_y = \tilde{q}_x \quad (44)$$

$$[e_x] \cdot \tilde{\epsilon}_x = \tilde{\epsilon}_x \cdot \tilde{l}_x \quad (45)$$

となる。ここで $[s_x]$, $[e_x]$, $\tilde{l}_x$, $\tilde{q}_x$ は各々

$$[s_x] = \begin{bmatrix} 0, 1, & 0, -1 \\ 1, 0, -1, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{l}_x^T = (a, a)$$

$$[e_x] = \begin{bmatrix} c, & 0, & a-c, & 0 \\ 0, & a-c, & 0, & c \end{bmatrix}$$

$$\tilde{q}_x = -[s_x] \cdot [B] \cdot \tilde{\epsilon}_x + [s_x] \{ [A] \cdot \tilde{\epsilon}_x : i \\ + [B] \cdot \tilde{\epsilon}_y : i + [B] \cdot \tilde{\epsilon}_z : i \}$$

なるマトリックスである。同様に式(5), (8), (9)をマトリックス表示し式(42)と同様の $\dot{\sigma}_y$ を代入すると

$$[s_y] \cdot [B] \cdot \tilde{\epsilon}_x + [s_y] \cdot [A] \cdot \tilde{\epsilon}_y = \tilde{q}_y \quad (46)$$

$$[e_y] \cdot \tilde{\epsilon}_y = \tilde{\epsilon}_y \cdot \tilde{l}_y \quad (47)$$

となる。ここでマトリックス $[s_y]$, $[e_y]$, $\tilde{l}_y$, $\tilde{q}_y$ は

$$[s_y] = \begin{bmatrix} 1, 0, & 0, -1 \\ 0, 1, -1, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{l}_y^T = (b, b)$$

$$[e_y] = \begin{bmatrix} 0, & c, & b-c, & 0 \\ b-c, & 0, & 0, & c \end{bmatrix}$$

$$\tilde{q}_y = -[s_y] \cdot [B] \cdot \tilde{\epsilon}_x + [s_y] \{ [B] \cdot \tilde{\epsilon}_x : i \\ + [A] \cdot \tilde{\epsilon}_y : i + [B] \cdot \tilde{\epsilon}_z : i \}$$

である。なお式(45), (47)中の $\tilde{\epsilon}_x$, $\tilde{\epsilon}_y$ は与えられた既知の巨視的ひずみ速度である。また $\tilde{q}_x$, $\tilde{q}_y$ 式中の $\tilde{\epsilon}_z$ の成分 $\tilde{\epsilon}_z^1$, $\tilde{\epsilon}_z^2$, $\tilde{\epsilon}_z^3$, $\tilde{\epsilon}_z^4$ は式(2)よりすべて $\tilde{\epsilon}_x$ と等しくなり既知の量である。以上式(44)~(47)をまとめると次式に示すような未知量 $\tilde{\epsilon}_x$, $\tilde{\epsilon}_y$ に関する8元連立方程式となる。

$$[M^*] \cdot \tilde{\epsilon}^* = \tilde{q}^* \quad (48)$$

ここで

$$[M^*] = \begin{bmatrix} [s_x] \cdot [A] & [s_x] \cdot [B] \\ [e_x] & \text{zero} \\ [s_y] \cdot [B] & [s_y] \cdot [A] \\ \text{zero} & [e_y] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\epsilon}^{*T} = (\tilde{\epsilon}_x^T, \tilde{\epsilon}_y^T)$$

$$\tilde{q}^{*T} = (\tilde{q}_x^T, \tilde{\epsilon}_x \tilde{l}_x^T, \tilde{q}_y^T, \tilde{\epsilon}_y \tilde{l}_y^T)$$

である。式(48)を解くことによって未知量 $\tilde{\epsilon}_x$, $\tilde{\epsilon}_y$ を求めることができる。また前述のごとく $\tilde{\epsilon}_x$ は既知である。また面内せん断成分についても式(10)~(15)をもとに $\tilde{\epsilon}_{xy}$ に関する連立方程式を導くことができる。面外せん断成分 $\tilde{\epsilon}_{yz}$, $\tilde{\epsilon}_{zx}$ についても同様にして求めることができる。以上 $\tilde{\epsilon}_x$, $\tilde{\epsilon}_y$, ..., すなわち $\tilde{\epsilon}_i^j$, $\tilde{\epsilon}_i^k$

が決定できると式(42), (43)より単位要素を構成しているマトリックス, 繊維の応力速度を求めることができる。

単位要素を構成しているマトリックス, 繊維の応力速度が求まると式(3), (10)などにより巨視的な応力速度 $\dot{\sigma}_x$, $\dot{\sigma}_y$, ... が次式のように求まる。

$$\dot{\sigma}_x = \tilde{\beta}^T \cdot \tilde{\sigma}_x \quad (49)$$

$$\dot{\sigma}_y = \tilde{\beta}^T \cdot \tilde{\sigma}_y \quad (50)$$

⋮

$$\dot{\tau}_{xy} = \tilde{\beta}_{xy}^T \cdot \tilde{\sigma}_{xy} \quad (51)$$

⋮

ここで $\tilde{\beta}^T = (V_{m1}, V_{m2}, V_{m3}, V_f)$

$$\tilde{\beta}_{xy}^T = (c/a, 0, (a-c)/a, 0)$$

である。以上必要な応力速度が求まったので各ステップでの巨視的応力 σ_{ij} , 巨視的ひずみ ϵ_{ij} は

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij0} + \dot{\sigma}_{ij} \cdot \Delta t, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij0} + \dot{\epsilon}_{ij} \cdot \Delta t \quad (52)$$

となる。ここでサブスクリプトは前のステップでの値を示す。また次のステップの初期値として必要な、マトリックス, 繊維の部分要素応力 $m_i \sigma_{ij}^k$, $r_j \sigma_{ij}^k$ は式(34), (35)より Δt を乗じて求めればよい。

一方巨視的な応力速度を与えて巨視的な応力と巨視的なひずみの関係を求めることも可能である。この場合は $\tilde{\epsilon}_i^j$, $\tilde{\epsilon}_i^k$ を未知変数にとる代わりに、単位要素を構成するマトリックス, 繊維の応力速度 $\dot{\sigma}_i^j$, $\dot{\sigma}_i^k$ を未知変数にとればよい。これらの値はひずみ速度を与える場合と同様に単位要素の力のつりあいと適合条件から求めることができる。

5. 解 析 例

熱間プレス成形で成形したボロン(繊維), Al(マトリックス)の一方向強化FRM材を例にとって引張試験時の応力ひずみ挙動の解析を行った。繊維方向の解析結果($\dot{\epsilon} = 10^{-4}/s$, $\dot{\epsilon} = 10^4/s$)を図4に、繊維に直角方向の解析結果($\dot{\epsilon} = 10^{-4}/s$, $\dot{\epsilon} = 10^0/s$, $\dot{\epsilon} = 10^4/s$)を図5に実線で示してある。解析に際しては機械的性質(ヤング率, ポアソン比), 応力ひずみ線図の多直線近似式, 降伏点のひずみ速度依存性をボロンとAlで別々に与え, 4章で述べた方法で複合材料としての応答値を求めた。なおマトリックスであるAlの特性はFRMの成形に用いたものと同じ6061- $\bar{O}$ 材の引張試験より求めた応力ひずみ線図の非弾性域を5本の折れ線で近似して決定した。また降伏点のひずみ速度依存性はCarden⁽³⁾の $\dot{\epsilon} = 10^{-2}/s$ から $10^{-5}/s$ での実験結果をもとに決定した。またボロンのヤング率は 4×10^5 MPa, ポアソン比は0.2を用いた。またボロンは弾性体としてのみ挙動するとした。これらの解析結果から

図4 FRM材の応力ひずみ関係(繊維方向)

図5 FRM材の応力ひずみ関係(繊維と直角方向)

繊維と直角方向では応力ひずみ線図のひずみ速度依存性が認められるが、繊維方向ではひずみ速度の依存性がほとんどないことがわかる。

また図4, 図5にはひずみ速度 $10^{-4}/s$ での実験結果(丸印, 四角印, 三角印)をあわせて示してある。このひずみ速度に関する限り、実験結果と解析結果の一致は良好である。ただし繊維と直角方向の解析結果は実験結果より少なめのひずみを与える。これは解析に用いた6061- $\bar{O}$ 材の特性と熱間プレス成形により成形されたFRMマトリックスの特性との差によるかまたはマトリックスと繊維との複合化不完全によるものと推定される。

以上ひずみ速度を変化させた解析結果および低ひずみ速度域における実験との比較により、本構成方程式がこのひずみ速度域で方向FRM材の応力ひずみ挙動を記述しうることがわかった。なお高速引張試験による理論の検証は次報で行う。

6. 結 言

金属系複合材料FRMのマトリックスと繊維各々にフラクションモデルを適用することで方向強化材の新しい構成方程式を導いた。この構成方程式は材料の非弾性挙動、応力ひずみ関係式のひずみ速度依存性を表現することが期待できる。

この研究は、通産省工業技術院の次世代産業基盤技術研究開発制度に基づき、(財)次世代金属・複合材料研究開発協会が委託を受けた「複合材料の研究開発」の一環として行われたものである。

文 献

- (1) Besseling, J. F., *J. Appl. Mech.*, **25** (1958), 529.
- (2) 鈴木・土屋, 機論, **50-453**, A (昭59), 1026.
- (3) Carden, A. E., ほか2名, Meyers, M. S. and Murr, L. E. (編), *Shock Waves and High-Strain-Rate Phenomena in Metals*, (1981), 37, Plenum Press.

討 論

〔質問〕 香 川 豊〔三菱電機(株)材料研究所〕

FRMの構成方程式を導いた論文として意義のあるものと思う。二、三の疑問点について質問する。

(1) x, y 方向に関する力の釣合いを図2に示される構成素材の体積率を用いた式(3)の表現で可能な理由について説明していただきたい。また、繊維軸と垂直方向では、実験と理論の対応がよくない原因として、FRM側の要因とは別に式(3)の適用が考えられるのではないか。

(2) 式(16)で部分要素 k としてどのように取扱えば実験より求められる現実の材料を正しく表現でき

るのか。

(3) 実験事実との対応で繊維の体積率はいくつの場合か。また、体積率が変化した場合の理論と実験との対応について、理論的な予測が可能な繊維体積率の範囲をどのように考えているのか。

〔回答〕 (1) x, y 方向の釣合い式(3)は次のように導かれる。 x 方向を例にとると図2より

$$\begin{cases} b\sigma_x = c\sigma_x^{m^2} + (b-c) \cdot \sigma_x^{m^3} \\ \sigma_x' = \sigma_x^{m^2}, \sigma_x'' = \sigma_x^{m^3} \end{cases}$$

となる。ここで上の第1式の両辺に a を乗じて式を変形すると

付図 1 変形モデル

付図 2 論文中的変形モデル

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot \sigma_x &= a \cdot c \sigma_x^{m_2} + a \cdot (b-c) \cdot \sigma_x^{m_3} \\ &= (a-c) \cdot c \sigma_x^{m_2} + c^2 \cdot \sigma_x^{m_2} \\ &\quad + (a-c) \cdot (b-c) \sigma_x^{m_3} + c \cdot (b-c) \sigma_x^{m_3} \end{aligned}$$

となる。ここで $\sigma_x^f = \sigma_x^{m_2}$, $\sigma_x^{m_1} = \sigma_x^{m_3}$, $V_f = c^2/(a \cdot b)$, $V_{m_1} = c \cdot (b-c)/(a \cdot b)$, $V_{m_2} = c(a-c)/(a \cdot b)$, $V_{m_3} = (a-c) \cdot (b-c)/(a \cdot b)$ を代入すれば本文中の式(3)が求まる。また繊維軸と垂直方向で実験と理論の一致が繊維軸方向ほどよくないのは、マトリックスの成形アルミ材と物性値を求めるために用いたアルミ材の特性に差があったためと考えている。

(2) 部分要素の特性および要素数はすべてマトリックスおよび繊維各々の応力ひずみ曲線および降伏点のひずみ速度依存性から決定できる。一例をあげると今回アルミは応力ひずみ曲線を五つの折れ線で近似し要素数を5とした。

(3) 今回の実験および解析は繊維の体積率 $V_f = 0.38$ の FRM 一方向強化材を用いた。

また体積率が理論の精度に与える影響は検討していないが、 V_f があまり小さいと図1の各単位要素の応力一様性の仮定がくずれてくるし、あまり大きいと単位要素形状の仮定に無理がでてくると思われる。

〔質問〕 香川 豊〔三菱電機(株)材料研究所〕

前回の質問(1)で、質問の記述方法に一部不明確なところがあったと思うので再度質問させていただく。

論文中図2のモデルから、式(3)を導いた仮定を考えた場合、複合材料を構成する繊維およびマトリック

スの弾性率をそれぞれ E_f, E_m とした場合、一般に $E_f > E_m$ なので材料の x 方向の変形を例にとれば付図1のようになると考えられる。

一方、論文の中では、例えば、式(6)でひずみの釣合いを考えているので、付図2に示すように、矢印で示したすべりがないと変形できないことになると考えられる。

前回の質問(1)は、このような変形を仮定することが実際の材料とよく一致するのかということである。

以上の点について回答をお願いします。

〔回答〕 ご指摘のとおり単位要素は巨視的なひずみ ϵ_x に対してご質問の付図1のように変形すると考えられる。したがって厳密には単位要素を構成している個々の部分マトリックスの中でも x 方向直応力は一様ではない。また部分マトリックス間ではせん断応力が発生することが予想される。しかしここでは

(1) $\sigma_x^{m_1}, \sigma_x^{m_2}$ 等は部分マトリックス m_1, m_2 等の中の x 方向直応力の平均値を表す

(2) 単位要素に対する外力としては巨視的応力 σ_x のみでせん断力は与えていないこと、 V_f はあまり小さくない場合を考えていること、 $E_f > E_m$ であることなどより部分マトリックスや繊維の間のせん断応力は近似的に無視できる

としている。したがってこの仮定が成り立つ限り、式(3)等で材料の挙動を表すことができると考えている。