不均質はりの大たわみ問題の積分方程式法による解析*

(第 1 報, 断面の性質が急変する場合の解析)

堀 辺 忠 志**

An Analysis of Large-deflection Problems of Inhomogeneous Extensible Beams by the Integral Equation Method (1st Report, the Analysis of Extensible Beams with Discontinuities in Cross-sectional Properties)

by Tadashi HORIBE

This paper is concerned with the large-deflection analysis of extensible beams that have discontinuities in cross-sectional properties by the integral equation method. Since the governing equation of the large-deflection problems of extensible beams has a non-linear form, it is difficult to analyse the problems by the conventional integral equation method. In a previous paper we proposed the iterative scheme that has the numerical stability to solve such problems. In this paper we apply the proposed scheme to the large-deflection problems of discontinuous, extensible beams. A number of numerical examples of beams with various edge conditions are analysed for deflections, and the influence of discontinuities on the non-linear properties of extensible beams is discussed.

Key Words: Integral Equation Method, Extensible Beams, Large-deflection, Discontinuities in Cross-sectional Properties, Iterative Scheme, Numerical Analysis

1. 緒 言

はりの非線形挙動の解析については、いわゆるエラストティカ問題に代表されるような曲率を厳密に考えて行われる解析のほかに、はりの両端の軸方向の変位を拘束することによって生ずる引張軸力が、たわみに対して非線形の復元力を及ぼす問題についての解析がある。これらの 2 種類のはりの非線形問題に対して、積分方程式法を適用した解析例としては、はりの内点をも離散化する立場からの解析⁽¹⁾⁻⁽³⁾と、著者が行った反復法を用いた解析⁽⁴⁾⁽⁵⁾がある。とくに、文献(4)では、両端の軸方向変位を拘束したはりの非線形問題に対して、反復法に基づく計算の収束性が自動的に保証される手法を提案しその有用性を示した。

そこで本論では、上述の解法を断面の性質が急変している両端変位拘束はりの場合に適用することを目的とする。解析においては、積分方程式法において通常用いられている領域分割法を適用し、さらに収束の早い反復手法を提案する。その後、具体的な数値計算を行ってはりの非線形挙動を明らかにし、本解法の有効

性、適用性を示す。

2. 解 析

2・1 支配式 図 1 に示すように、断面の性質ははりの長さ方向 $x_1 = l_1 (x_2 = 0)$ の位置で急変し、 $x_1 = l_1$ より左側および右側のはりの諸量については添字 1, 2 を付して区別することにする。いま、図 1 のはりの両端の軸方向の変位を拘束したときのたわみ $y_i (i = 1, 2)$ に関する微分方程式は、

$$E_i I_i \frac{d^4 y_i(x_i)}{dx_i^4} - P \frac{d^2 y_i(x_i)}{dx_i^2} = q_i(x_i) \quad (i=1, 2) \dots \dots \dots (1)$$

となる。ここで、 $E_i, I_i, q_i(x_i)$ はそれぞれはりの縦弾性係数、断面二次モーメントおよび単位長さあたりの負荷荷重である。また、 P は両端の軸方向変位を固定したことによって生ずる引張軸力であり、 A_i ははりの断面積とすると

$$P = \frac{1}{2 \left(\frac{l_1}{A_1 E_1} + \frac{l_2}{A_2 E_2} \right)} \left[\int_0^{l_1} \left(\frac{dy_1(x_1)}{dx_1} \right)^2 dx_1 + \int_0^{l_2} \left(\frac{dy_2(x_2)}{dx_2} \right)^2 dx_2 \right] \dots \dots \dots (2)$$

となる⁽⁶⁾。式(1)、(2)よりわかるように、この種の大たわみ問題は非線形微分方程式により支配され解析的

* 昭和 61 年 7 月 18 日 東海支部豊橋地方講演会において講演、原稿受付 昭和 60 年 12 月 5 日。

** 正員、茨城工業高等専門学校 (〒312 勝田市大字中根字深谷津 866)。

に解くことはむずかしいが、従来より、一様な引張軸力 P と曲げ荷重 $q_i(x_i)$ をうけてたわむときの軸線の伸び λ_q 、すなわち図1の場合は

$$\lambda_q = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \left(\frac{dy_1(x_1)}{dx_1} \right)^2 dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left(\frac{dy_2(x_2)}{dx_2} \right)^2 dx_2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

と、引張軸力 P により生ずる軸方向の伸び λ_p 、すなわち図1の場合は

$$\lambda_p = \frac{Pl_1}{A_1 E_1} + \frac{Pl_2}{A_2 E_2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

とを等しいものとして軸力 P を決定し、その引張軸力のもとでの曲げ変形を考えるという循環的な解法⁽⁷⁾がある。この循環的な解法を図1にそのまま適用すると、非常にはんさんな計算が必要となることが容易に推察される。そこで、ここでは前報⁽⁴⁾において提案した積分方程式法による手法に基づいて、図1の問題を解析することにする。

なお、急変部 $x_1 = l_1 (x_2 = 0)$ においては、次の連続条件式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} y_1(l_1) &= y_2(0), \quad \frac{dy_1(l_1)}{dx_1} = \frac{dy_2(0)}{dx_2}, \\ -E_1 I_1 \frac{d^2 y_1(l_1)}{dx_1^2} &= -E_2 I_2 \frac{d^2 y_2(0)}{dx_2^2}, \\ -E_1 I_1 \frac{d^3 y_1(l_1)}{dx_1^3} + P \frac{dy_1(l_1)}{dx_1} &= -E_2 I_2 \frac{d^3 y_2(0)}{dx_2^3} + P \frac{dy_2(0)}{dx_2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

さらに、解の一般的な傾向をとらえやすくするために無次元変数 $\xi_i = x_i/l$, $w_i(\xi_i) = y_i(x_i)/l$, $p_i = Pl^2/(E_i I_i)$, $r_i(\xi_i) = q_i(x_i)l^3/(E_i I_i)$, $\kappa_i^2 = l_i/(A_i l^2)$, $\delta_i = l_i/l$, $\lambda_q = \lambda_q/l$, $\lambda_p = \lambda_p/l$ を導入して、式(1)~(5)を次式のように無次元化しておく。すなわち、

$$\frac{d^4 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^4} - p_i \frac{d^2 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^2} = r_i(\xi_i) \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (6)$$

図1 両端の軸方向変位を拘束された断面急変はり

$$p_i = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta_1 \kappa_1^2} \int_0^{\delta_1} \left(\frac{dw_1(\xi_1)}{d\xi_1} \right)^2 d\xi_1 + \frac{1}{\delta_2 \kappa_2^2} \int_0^{\delta_2} \left(\frac{dw_2(\xi_2)}{d\xi_2} \right)^2 d\xi_2 \right] \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\lambda_q = \frac{1}{2} \int_0^{\delta_1} \left(\frac{dw_1(\xi_1)}{d\xi_1} \right)^2 d\xi_1 + \frac{1}{2} \int_0^{\delta_2} \left(\frac{dw_2(\xi_2)}{d\xi_2} \right)^2 d\xi_2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\lambda_p = \kappa_1^2 p_1 \{ \delta_1 + \delta_2 (\kappa_2 / \kappa_1)^2 (p_2 / p_1) \} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1(\delta_1) &= w_2(0), \quad \frac{dw_1(\delta_1)}{d\xi_1} = \frac{dw_2(0)}{d\xi_2}, \\ -\frac{d^2 w_1(\delta_1)}{d\xi_1^2} &= -\eta \frac{d^2 w_2(0)}{d\xi_2^2} \\ -\frac{d^3 w_1(\delta_1)}{d\xi_1^3} + p_1 \frac{dw_1(\delta_1)}{d\xi_1} &= \eta \left(-\frac{d^3 w_2(0)}{d\xi_2^3} + p_2 \frac{dw_2(0)}{d\xi_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $\eta = (E_2 I_2)/(E_1 I_1)$ とおいた。また p_2 は、 $p_2 = p_1/\eta$ で表すことができる。

2・2 積分方程式法に基づく定式化 2・1節で述べた循環解法を積分方程式法による解法に適用するために、式(6)などにある p_i は無次元化された一定の引張力を表すものとして以下を考える。また、添字 i がついている関係式は、すべて $i=1$ および $i=2$ の場合を考えるものとする。

さて、式(6)の両辺に次式(11)で定義される基本解 $w_i^*(\xi_i, \eta_i)$ (付録参照)

$$w_i^*(\xi_i, \eta_i) = \frac{1}{2p_i} \left[-\frac{\sinh \sqrt{p_i}(\delta_i - \rho_i)}{\sqrt{p_i} \cosh \sqrt{p_i} \delta_i} + \delta_i - \rho_i \right] \quad \dots\dots\dots (11)$$

を掛け、 $0 \sim \delta_i$ の範囲の積分を考えると

$$\int_0^{\delta_i} \left(\frac{d^4 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^4} - p_i \frac{d^2 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^2} \right) w_i^*(\xi_i, \eta_i) d\xi_i = \int_0^{\delta_i} r_i(\xi_i) w_i^*(\xi_i, \eta_i) d\xi_i \quad \dots\dots\dots (12)$$

を得る。ここで、 $\rho_i = |\xi_i - \eta_i|$ である。式(12)の左辺に対して4回の部分積分を行い、基本解の性質を考慮すると

$$\begin{aligned} w_i(\eta_i) &= [q_i(\xi_i) w_i^*(\xi_i, \eta_i)]_{\delta_i}^{\delta_i} \\ &\quad - [m_i(\xi_i) t^*(\xi_i, \eta_i)]_{\delta_i}^{\delta_i} \\ &\quad + [t_i(\xi_i) m^*(\xi_i, \eta_i)]_{\delta_i}^{\delta_i} \\ &\quad - [w_i(\xi_i) q_i^*(\xi_i, \eta_i)]_{\delta_i}^{\delta_i} \\ &\quad + \int_0^{\delta_i} r_i(\xi_i) w_i^*(\xi_i, \eta_i) d\xi_i \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

が得られる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} q_i(\xi_i) &= -\frac{d^3 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^3} + p_i \frac{dw_i(\xi_i)}{d\xi_i} \\ m_i(\xi_i) &= -\frac{d^2 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^2} \\ t_i(\xi_i) &= \frac{dw_i(\xi_i)}{d\xi_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

と表し、 $q_i^*(\xi_i, \eta_i)$ 、 $m_i^*(\xi_i, \eta_i)$ 、 $t_i^*(\xi_i, \eta_i)$ はそれぞれ式(14)の右辺の $w_i(\xi_i)$ を $w_i^*(\xi_i, \eta_i)$ に置きかえたもので、式(11)より

$$\begin{aligned} q_i^*(\xi_i, \eta_i) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\xi_i, \eta_i) \\ m_i^*(\xi_i, \eta_i) &= \frac{1}{2\sqrt{p_i}} \frac{\sinh \sqrt{p_i}(\delta_i - \rho_i)}{\cosh \sqrt{p_i}\delta_i} \\ t_i^*(\xi_i, \eta_i) &= \frac{\operatorname{sgn}(\xi_i, \eta_i)}{2p_i} \left(\frac{\cosh \sqrt{p_i}(\delta_i - \rho_i)}{\cosh \sqrt{p_i}\delta_i} - 1 \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (15)$$

と表される。

さらに、式(13)を η_i について微分すると

$$\begin{aligned} t_i(\eta_i) &= [q_i(\xi_i) \bar{w}_i^*(\xi_i, \eta_i)]_{\delta_i}^{\rho_i} \\ &\quad - [m_i(\xi_i) \bar{t}_i^*(\xi_i, \eta_i)]_{\delta_i}^{\rho_i} + [t_i(\xi_i) \bar{m}_i^*(\xi_i, \eta_i)]_{\delta_i}^{\rho_i} \\ &\quad - [w_i(\xi_i) \bar{q}_i^*(\xi_i, \eta_i)]_{\delta_i}^{\rho_i} \\ &\quad + \int_0^{\rho_i} q_i(\xi_i) \bar{w}_i^*(\xi_i, \eta_i) d\xi_i \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\bar{w}_i^*(\xi_i, \eta_i) = dw_i^*(\xi_i, \eta_i)/d\eta_i$ などと表すことにする。

式(13)、(16)において、 $\eta_i \rightarrow 0$ および $\eta_i \rightarrow \delta_i$ の極限を考えると、左右端部および不連続部における境界値に関する8個の式が得られるが、式(10)で示される急変部の接続条件式を考え合すると、最終的に12個の独立な式が得られる。そして、左右端で与えられる境界値を考慮すると、一定引張力下での不連続部を有するはりの曲げ問題の解が定められる。

2.3 循環解法の積分方程式法への適用 2.2節で述べた定式化を用いて、循環解法の積分方程式法への適用を考える。以下に述べる手法は文献(4)で提案したものを不連続はりに適用したものであるが、反復計算のときの補正法や、式(8)の積分計算方法に改良が加えられている。

さて、はじめに、一定の引張力を加えた不連続はりの曲げ問題の計算プログラムを作成する。そして、はりに関する諸量と任意の引張軸力 p_i^i (もしくは p_i^i)を入力する。続いて指定された曲げ荷重 $r_i(\xi_i)$ に対する解を決定したあとに、式(8)および式(9)に示されるたわみに基づく軸線の伸び λ_q および引張軸力に基づく軸線の伸び λ_p を求める。式(8)の積分計算については、Gaussの積分公式を用いた。なお、式(8)の被積分関数は、式(16)により境界値のみによって計算され

る量である。次に、 λ_p^i と λ_q^i を比較して、 $\lambda_p^i \neq \lambda_q^i$ となっているなら、軸力 p_i^i を

$$\left. \begin{aligned} p_i^{i+1} &\leftarrow p_i^i \\ &+ \frac{(\lambda_q^i - \lambda_p^i)}{2} \frac{1}{\kappa_i^2 \{\delta_1 + \delta_2 (\kappa_2 / \kappa_1)^2 (p_i^i / p_i^i)\}} \\ p_i^{i+1} &\leftarrow \eta p_i^{i+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

で補正して、同じ計算を $\lambda_p = \lambda_q$ になるまでくり返し、このときの p_i^i (もしくは p_i^i)を両端の変位が拘束されたことによって生ずる引張軸力として、はりの変形を考える。

このくり返しの計算法は、 λ_p が p_i の単調な増加関数であること、また λ_q は p_i の減少関数であることを考慮して図2を考えることによって安定であることが示される。

すなわち、 p_i^i を図2のように仮定して $\lambda_q^i > \lambda_p^i$ を得るとする。すると p_i^i は、式(17)に従って図2のA点に補正されて、 p_i^{i+1} を得る。続いて、この p_i^{i+1} を再び p_i^i と考えて同じくり返しを行うと、 $\lambda_p = \lambda_q$ を満たす点(図2中のC点)に対応する p_i (図2中のB点)が何回かのくり返しののち定められる。なお、式(17)の右辺第2項中の $(\lambda_q - \lambda_p)/2$ の係数は、図2の直線 λ_p の傾きを表す量であり、不連続はりの軸力に対する剛性に対応している。

上述のくり返し計算法は、軸線の伸びの差の平均、すなわち $(\lambda_q - \lambda_p)/2$ を生ずるような軸力を、現在の軸力に加えるという補正法を用いており、横荷重 $r_i(\xi_i)$ の大きさには無関係に安定である。

3. 数 値 解 析

2章で説明した定式化法に基づいて計算プログラムを作成し、以下に主な解析結果を示す。式(13)および式(16)の右辺の荷重項を含んだ積分については、分布

図2 反復計算における軸力の補正法

荷重 $r_i(\xi_i)$ を集中力に離散化することによって評価した。また、軸方向の伸びに関するくり返し計算においては、 $(\lambda_q - \lambda_p)/\lambda_p < 1.0 \times 10^{-8}$ を終了基準と考えた。

なお、曲げ剛性の変化の比 $\eta = (E_2 I_2)/(E_1 I_1)$ は、材質および板厚が同一で幅比 b_2/b_1 のみが変わる場合には $\eta = b_2/b_1$ 、材質および板幅が同一で厚さ比 h_2/h_1 のみが変わる場合には $\eta = (h_2/h_1)^3$ 、材質と形状が共に同一で縦弾性係数比 (E_2/E_1) のみが変わる場合には $\eta = (E_2/E_1)$ となる。

はじめに、式(8)の積分計算に用いる Gauss の積分公式の解析結果の精度に及ぼす影響を調べるために、図3に示す両端を支持したはりの大たわみ問題において、 $\eta = 1.0$ (一様はり)、 $\delta_1 = 0.75$, $x_1 = 0.02$ ($=x_2$) として中央点の集中荷重 r_0 を変化させたときの両端の拘束によって生ずる引張軸力 p_1 ($=p_2$) の値を、表1に示す。

表1では、各積分区間 $0 \sim \delta_1$ および $0 \sim \delta_2$ における Gauss の積分点数を、8, 12, 16 点と変化させたときの積分方程式法によって得た引張軸力 p_1 の値が示されており、Exact. の欄の値は、2・1節で説明した通常の循環解法によって得た値である。この表の結果によれば、積分方程式法にもとづく解析は、断面の性質が急変する問題についても工学上、十分な精度を有することが示唆される。なお、表1に示した一様はり ($\eta = 1$) の場合、 δ_1 がはりの中央から離れるにつれて、積分方程式法に基づく軸力の値の精度は悪くなる。そこで、表1の結果をふまえて、以下の計算においては、Gauss の積分点数は12点とした。

解析例では、 $x_1 = 0.02$ とし、曲げ剛性の比 η を0.5,

表1 図3のはりに生ずる引張軸力 p_1 の値

Load r_0	Number of Gaussian Integral Point			Exact.
	8	12	16	
0.5	0.580897	0.580764	0.580781	0.580779
1.0	1.848722	1.848314	1.848365	1.848360
2.0	4.753494	4.752404	4.752542	4.752527
4.0	10.158031	10.155234	10.155590	10.155552

図3 両端の軸方向変位を拘束された断面急変はり (支持-支持)

1.0, 2.0 そしてその変化位置 δ_1 を0.5, 0.75 とそれぞれ変化させた場合の計算を行った。横荷重 $r_i(\xi_i)$ については、はりの中央 ($\xi_i = 0.5$) に集中荷重 r_0 を負荷し、このときの荷重点直下のたわみ $w_1(0.5) = y_1(0.5l)/l$ と荷重 r_0 の関係を種々の支持条件のもとで図示した。

図4(a)は、図3に示した支持-支持はりにおいて $\delta_1 = 0.5$ としたときのたわみと荷重の関係である。ただし、 η はパラメータとして図では用いている。図4(a)においては、一様はりの場合 ($\eta = 1.0$) を境にして変形の非線形性に及ぼす曲げ剛性比の影響が明らかにされている。図4(b)は図4(a)における δ_1 のみを $\delta_1 = 0.75$ と変化させた場合のたわみと荷重の関係である。曲げ剛性の変化位置がはりの中央より離れるに従って剛性比の変化のたわみに及ぼす影響が小さくなっている様子を読みとれる。

図6(a), (b)は、図5の両端を固定したはりに関するたわみと荷重の関係、そして図8(a), (b)は図7の固定-支持はりのたわみと荷重の関係の計算結果である。

なお、図3, 5および図7に示すはりの計算においては、横荷重 r_0 を増加させたときに用いる軸力の初期値として r_0 を増加させる直前に定められた軸力値

(a) $x_1 = 0.02$, $\delta_1 = 0.5$

(b) $x_1 = 0.02$, $\delta_1 = 0.75$

図4 図3の中央のたわみと荷重の関係

を用いるようにしている。この方法によると、反復回数は少なく済み、具体的な反復回数は、数回から十数回に抑えられた。

4. 結 言

はりの長さ方向の一点で断面の性質が急変するはりにおいて、両端の軸方向の変位を拘束した場合の大たわみ問題を積分方程式法によって解析する方法を提案し、いくつかの数値計算例を示してはりの非線形挙動を明らかにした。積分方程式法を用いた定式化においては、急変部の左側および右側のそれぞれのはりに対して、一定の引張軸力と横荷重を同時にうける場合の問題としてとらえ、急変部の接続条件を考慮すること

によって境界値問題に帰着させた。さらに、引張軸力による軸線の伸びとたわみに基づく軸線の伸びとを等置することにより軸力の大きさを決定するという従来からの循環解法と等価な解法を、安定な反復計算によって実現できるスキームを提案した。

この種の問題を従来からの循環解法にもとづいて解析すると、多くの未知数を含んだはりの境界値問題を解かねばならず、さらに両端の拘束によって生ずる引張軸力を求めるために、複雑な超越方程式の求根計算をも行わなければならない。また、横荷重や支持条件が異なれば、それぞれについての個々の計算が必要となる。このように複雑な手順を経る問題を本論中で提案した手法で扱えば、負荷条件や支持条件のどのよう

図5 両端の軸方向変位を拘束された断面急変はり (固定-固定)

図7 両端の軸方向変位を拘束された断面急変はり (固定-支持)

(a) $\kappa_1=0.02, \delta_1=0.5$

(a) $\kappa_1=0.02, \delta_1=0.5$

(b) $\kappa_1=0.02, \delta_1=0.75$

図6 図5の中央のたわみと荷重の関係

(b) $\kappa_1=0.02, \delta_1=0.75$

図8 図7の中央のたわみと荷重の関係

な組合せにも対応して計算プログラムによって解析することができる。

本論中で扱った場合と異なり、はりの断面の性質が漸変している場合の大たわみ問題については、本論中の反復法と、内点をも離散化する立場からの解法⁽²⁾⁽⁸⁾とを組合せることによって解析できる。これについては、次の機会に報告する予定である。

終わりに、本研究の遂行においては、茨城工業高等専門学校 上野誠教授より暖かい励ましをいただいた。記して謝意を表する。

付録. 基本解〔式(11)〕の導出

式(11)で示した基本解 $w_i^*(\xi_i, \eta_i)$ は、スパン $2\delta_i$ のはりの中央 $\xi_i = \eta_i$ に単位荷重 (無次元化された量) を負荷し、 $\xi_i = \eta_i - \delta_i$ および $\xi_i = \eta_i + \delta_i$ の位置を単純支持し、一定な引張軸力 p_i をうける場合のたわみである。この $w_i^*(\xi_i, \eta_i)$ の導出法を以下に示す。

はりの両端は単純支持されているから、はりの負荷荷重は負荷点 $\xi_i = \eta_i$ の両側に半分ずつ振り分けられる。したがって、はりのせん断力については、

$$-\frac{d^3 w_i^*(\xi_i, \eta_i)}{d\xi_i^3} + p_i \frac{dw_i^*(\xi_i, \eta_i)}{d\xi_i} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\xi_i, \eta_i) \quad \cdots \cdots (18)$$

の関係がある。ここで、 $\operatorname{sgn}(\xi_i, \eta_i)$ は $\xi_i > \eta_i$ のとき 1, $\xi_i < \eta_i$ のとき -1 をとる関数である。 $\xi_i < \eta_i$ における基本解を $w_{i-}^*(\xi_i, \eta_i)$ とすると、式(18)より

$$\frac{d^2 w_{i-}^*(\xi_i, \eta_i)}{d\xi_i^2} - p_i w_{i-}^*(\xi_i, \eta_i) = -\frac{1}{2} \xi_i + C_0 \quad \cdots \cdots (19)$$

ここで、 C_0 ははりの条件より定まる未定係数である。式(19)を、 $w_{i-}^*(\xi_i, \eta_i)$ に課せられた条件 $w_{i-}^*(\eta_i - \delta_i, \eta_i) = 0$, $d^2 w_{i-}^*(\eta_i - \delta_i, \eta_i)/d\xi_i^2 = 0$, $dw_{i-}^*(\eta_i, \eta_i)/d\xi_i = 0$ のもとで解くと、

$$w_{i-}^*(\xi_i, \eta_i) = \frac{1}{2p_i} \left[-\frac{1}{\sqrt{p_i}} \frac{\sinh \sqrt{p_i}(\delta_i - \eta_i + \xi_i)}{\cosh \sqrt{p_i}\delta_i} + \delta_i - \eta_i + \xi_i \right] \quad \cdots \cdots (20)$$

を得る。他方、 $\xi_i > \eta_i$ における基本解 $w_{i+}^*(\xi_i, \eta_i)$ についても同様な手順で求められる。あるいは、Green 関数の相反性より式(20)の ξ_i と η_i を入れ換えても得られ、

$$w_{i+}^*(\xi_i, \eta_i) = \frac{1}{2p_i} \left[-\frac{1}{\sqrt{p_i}} \frac{\sinh \sqrt{p_i}(\delta_i - \xi_i + \eta_i)}{\cosh \sqrt{p_i}\delta_i} + \delta_i - \xi_i + \eta_i \right] \quad \cdots \cdots (21)$$

となる。ここで、新しい変数 $\rho_i = |\xi_i - \eta_i|$ を用いて式(20)および式(21)をまとめて表現すれば、式(11)が得られる。

文 献

- (1) 登坂・角田, 日本建築学会論文報告集, 329, (昭58), 43.
- (2) 三宅・登坂, 第34回応用力学連合講演会講演論文抄録集, (昭59), 153.
- (3) 登坂, 数理学, 22-254 (昭59), 30, サイエンス社.
- (4) 堀辺, 機論, 51-472, A (昭60), 2823.
- (5) 堀辺, 境界要素法論文集, 2 (昭60), 251.
- (6) 例えば, 斉藤, 工業基礎振動学, (昭52), 214, 養賢堂.
- (7) 倉西, 弾性学, (昭45), 306, 現代工学社.
- (8) 出戸・ほか2名, 第1回境界要素法シンポジウム発表論文集, (昭59), 283.