孔や切欠を持つサンドイッチ板の応力集中と最適設計* (第 1 報)

金 延 承**, 長 尾 弘***

Stress Concentration and the Optimum Design of a Sandwich Plate with a Hole or Notch (1st Report)

Yeonseung KIM and Hiroshi NAGAO

Nowadays, due to the development of the sandwich core series and the progression of the degree of exactness required for each thickness of sandwich plate, optimum design of the structural sandwich plate has been needed. We can find 2 or 3 papers relating to the optimum design of laminated plates. But this paper presents the optimum design of a sandwich plate with a hole or notch. For this object, we offer the 1st report to investigate the FEM analysis by checking the calculative exactness and cost, and data of the stress concentration wide sphere of dimension.

Key Words: Sandwich Plate, Stress Concentration, Optimum Design

1. 緒 言

構造の軽量化という目的のためにサンドイッチ構造材が産業界で多く使われるようになり、今日ではこの構造のコア材の多品種化と寸法精度の向上に伴い構造の最適設計が要求されている。一般の積層材の最適設計については既に二、三の研究⁽¹⁾⁽²⁾が発表されているが、本論文は孔や切欠のあるサンドイッチ板の最適設計法の研究を行ったものである。

最適設計をするには材料や寸法の広範囲にわたる板の応力集中の資料が必要となるが、今では大型コンピューターの発達によって有限要素法によるサンドイッチ板の孔や切欠のまわりの応力集中係数を求めることは容易である。本第 1 報では計算の精度と費用の面から総合的に検討し直した有限要素解析⁽³⁾についての研究報告と応力集中の性質および集中係数の資料を与える。

2. 記 号

本論文中に使用された主な記号は次のようである。

x, y, z^* : 表板の直角座標系

x, y, z : コアの直角座標系

u, v, w : 表板の変位

u', v', w' : コアの変位

t_f : 表板の厚さ

$2t_c$: コアの厚さ

$2h$: 上下表板の中立面間距離

E_f : 表板の縦弾性係数

G_c : 等方性コアの横弾性係数

G_{xz} : xz 平面のコアの横弾性係数

G_{yz} : yz 平面のコアの横弾性係数

ν_f : 表板のポアソン比

L : サンドイッチ板の長さ

$2B$: サンドイッチ板の幅

R : 円孔の半径

e : 板の中心から偏心円孔の中心までの距離

$2e_v$: 縦軸に平行な 2 円孔の中心間距離

$2e_h$: 横軸に平行な 2 円孔の中心間距離

d_v : 切欠の深さ

$2b_v$: 溝孔の長さ

* 昭和 61 年 10 月 6 日 第 64 期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和 61 年 3 月 19 日。

** 正員、日本大学大学院 (〒101 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14)。

*** 正員、日本大学理工学部

添 字

- s : 曲げの単純理論のもの
 a : 曲げの高級理論のもの
 f : サンドイッチ板の表板のもの
 c : サンドイッチ板のコアのもの
 F : 有限要素解析のもの
 O : 理論解析のもの
 AN: Anticlastic bending のもの
 CY: Cylindrical bending のもの

3. 有限要素法によるサンドイッチ板の曲げ解析

サンドイッチ板の応力集中解析をするに当たり、二つの曲げ理論、すなわち表板自体の曲げを考慮しない単純曲げ理論⁽⁴⁾とそれを考慮する高級曲げ理論の有限要素解析について説明する。

3.1 曲げの単純理論解析

3.1.1 変位の仮定 図1のようにサンドイッチ板の表板自体の曲げを考慮しない場合を考え x, y, z 方向の表板とコアの変位を次のように仮定する。

$$u = u_0, v = v_0, w \dots\dots\dots (1)$$

$$u' = \theta_x z, v' = \theta_y z, w' = w \dots\dots\dots (2)$$

ここで u_0, v_0 を回転変位 θ_x, θ_y で表すと、

$$u_0 = \theta_x h, v_0 = \theta_y h \dots\dots\dots (3)$$

3.1.2 有限要素解析

a. 変位 図2のような三角形要素の中のある点 (x, y) の変位を式(4)のように表す。三角形要素の全面積を A_{ijk} とし、各頂点 i, j, k と三角形要素の中のある点を結んだ各々の面積を A_i, A_j, A_k とすると変位は式(5)のように書き直すことができる。

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

$$d_s = Nu_s \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $d_s = [w \ \theta_x \ \theta_y]^T$, $N = [N_i \ N_j \ N_k]$, $N_i = N_i \times I_{(3 \times 3)}$, $N_i = A_i / A_{ijk}$, $u_s = [u_{si} \ u_{sj} \ u_{sk}]^T$, $u_{si} = [w_i \ \theta_{xi}]$

$\theta_{yi}]^T$ である。

b. 変位と力の関係 式(5)の変位を用いてひずみと応力を求め、仮想仕事の原理から次式が得られる。

$$P_s = K_s u_s \dots\dots\dots (6)$$

ここで、荷重 P_s は $[P_{si} \ P_{sj} \ P_{sk}]^T$ であり、 $P_{si} = [P_i \ M_{xi} \ M_{yi}]^T$ である。剛性マトリックスは $K_s = K_{sf} + K_{sc}$ である。また、 K_{sf} と K_{sc} を式(7)に示す。

$$\left. \begin{aligned} K_{sf} &= 2 \int_{V_f} B_{sf}^T D_{f2} B_{sf} dV_f \\ K_{sc} &= \int_{V_c} B_{sc}^T D_{c2} B_{sc} dV_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $B_{sf} = D_{sf1} N$, $B_{sc} = D_{sc1} N$ であり、

$$D_{sf1} = h \begin{bmatrix} 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix},$$

$$D_{f2} = \bar{E}_f \begin{bmatrix} 1 & \nu_f & 0 \\ \nu_f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\nu} \end{bmatrix},$$

$$D_{sc1} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 1 & 0 \\ \partial/\partial y & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{c2} = \begin{bmatrix} G_{zx} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix},$$

$\bar{E}_f = E_f / (1 - \nu_f^2)$, $\bar{\nu} = (1 - \nu_f) / 2$ である。

3.2 曲げの高級理論解析

3.2.1 変位の仮定 図3のようにサンドイッチ板の表板自体の曲げを考慮する場合を考え x, y, z 方向の表板とコアの変位を次のように仮定する。

図2 三角形要素

図1 単純理論の変位

図3 高級理論の変位

図4 高級理論解析と単純理論解析の最大たわみの比

図5 単純理論のFEM解析と理論解析の比

$$u = u_0 - z^* \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = v_0 - z^* \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w \quad \dots (8)$$

$$u' = \frac{z}{t_c} u_c, \quad v' = \frac{z}{t_c} v_c, \quad w' = w \quad \dots (9)$$

図3の中の u_f は表板の表面変位であり、 u_c は表板とコアが接する所の変位である。これらを式で表すと

$$u_f = u_0 - \frac{t_f}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_c = u_0 + \frac{t_f}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad \dots (10)$$

であり、 v_f, v_c に対しても同様に求めることができる。

3・2・2 有限要素解析

a. 変位 図2のような三角形要素に節点変位 w_x, w_y を加え、要素の中のある点 (x, y) の変位を式(11)のようにあらわす。ここで、 $w_x = \partial w / \partial x, w_y = \partial w / \partial y$ である。

$$\begin{bmatrix} w \\ w_x \\ w_y \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} \quad \dots (11)$$

式(11)の左辺のベクトルを $\mathbf{d}_a$ 、右辺の係数マトリックスを $\mathbf{X}$ 、その右辺のベクトルを $\mathbf{a}$ で表すことにすれば、

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{X} \mathbf{a} \quad \dots (12)$$

式(12)から三角形の各頂点 i, j, k について変位を求め、ベクトルの形で表すと次のようになる。

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{c} \mathbf{a} \quad \dots (13)$$

ただし、 $\mathbf{u}_a = [u_{ai} \ u_{aj} \ u_{ak}]^T, \mathbf{u}_{ai} = [w_i \ w_{xi} \ w_{yi} \ \theta_{xi} \ \theta_{yi}]^T, \mathbf{c} = [X_i \ X_j \ X_k]^T$ である。式(13)から $\mathbf{a}$ を求めて式(12)に代入すると、

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{X} \mathbf{c}^{-1} \mathbf{u}_a \quad \dots (14)$$

b. 変位と力の関係 式(14)の変位を用いてひずみと応力を求め、仮想仕事の原理から式(15)が得られる。

$$\mathbf{P}_a = \mathbf{K}_a \mathbf{u}_a \quad \dots (15)$$

ここで、荷重 $\mathbf{P}_a$ は $[P_{ai} \ P_{aj} \ P_{ak}]^T$ であり、 $\mathbf{P}_{ai} = [P_i \ M_{fxi} \ M_{fyi} \ M_{xi} \ M_{yi}]^T$ である。剛性マトリックスは $\mathbf{K}_a = \mathbf{K}_{af} + \mathbf{K}_{ac}$ であり $\mathbf{K}_{af}$ と $\mathbf{K}_{ac}$ は次式のようなものである。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{af} &= 2 \int_{V_f} \mathbf{B}_{af}^T \mathbf{D}_{f2} \mathbf{B}_{af} dV_f \\ \mathbf{K}_{ac} &= \int_{V_c} \mathbf{B}_{ac}^T \mathbf{D}_{c2} \mathbf{B}_{ac} dV_c \end{aligned} \right\} \quad \dots (16)$$

ただし、 $\mathbf{B}_{af} = \mathbf{D}_{af1} \mathbf{X} \mathbf{c}^{-1}, \mathbf{B}_{ac} = \mathbf{D}_{ac1} \mathbf{X} \mathbf{c}^{-1},$

$$\mathbf{D}_{af1} = \begin{bmatrix} 0 & -z^* \partial / \partial x & 0 & h \partial / \partial x & 0 \\ 0 & 0 & -z^* \partial / \partial y & 0 & h \partial / \partial y \\ 0 & -z^* \partial / \partial y & -z^* \partial / \partial x & h \partial / \partial y & h \partial / \partial x \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{ac1} = \frac{h}{t_c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 応力集中に関する二つの曲げ理論の比較

4・1 孔が開いていない場合

4・1・1 単純理論解析と高級理論解析の比較 長さ L の正方形の四辺単純支持サンドイッチ板に分布荷重 q_0 が作用している場合両理論解析の最大たわみを式(17)と式(18)に示し、その比の一例を図4に示した。ただし、 $D' = 2h^2 t_f \bar{E}_f, D_f = t_f^3 \bar{E}_f / 12, A = t_c t_f \bar{E}_f / G_c, F = 2t_c G_c$ であり、 i, j は奇数である。

図4の縦軸には高級理論解析と単純理論解析の最大たわみの比 $w_{oa(max)}/w_{os(max)}$ をとり、横軸には L/t_f をとった。図4が示すように L/t_f が大きくなるにつれ、また E_f/G_c が小さくなるにつれて両理論解析の最大たわみの比が1に近付き、 $L/t_f = 1250$ の値では99%となっている。

$$w_{os(max)} = \frac{16L^4 q_0}{\pi^5 D'} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{(i+j)/2-1} \frac{\{1 + D' \pi^2 (i^2 + j^2) / FL^2\}}{ij(i^2 + j^2)^2} \dots (17)$$

$$w_{oa(max)} = \frac{16L^4 q_0}{\pi^5} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{(i+j)/2-1} \frac{\{1 + A(\pi^2/L^2)(i^2 + j^2)\}}{ij(i^2 + j^2)^2 (2D_r + D' + 2D_r A(\pi^2/L^2)(i^2 + j^2))} \dots (18)$$

4.1.2 有限要素解析の計算精度 有限要素法の計算は4.1.1項に述べた理論解析の中で $L/t_f = 1250$ の値の諸条件を用いて最大たわみを計算した。単純理論の場合の有限要素解析と理論解析の最大たわみの比を図5に示し、高級理論の場合は図6に示した。ここで、 N は有限要素解析の計算時の要素数を与える係数であり、要素数 $= 2N^2$ で表す。有限要素解析が95%以上信頼できる要素分割数は、単純理論の場合 N が7以上の所であり、高級理論の場合は N が3以上の所である。

4.1.3 コアの剛性について 図7は横軸にコアと表板の剛性比 D^* をとり、縦軸に有限要素解析による板の中央のたわみ w と厳密解によるコアの剛性が無限大の時のたわみ $w_{c \rightarrow \infty}$ との比で表した無次元化たわみを取り、コアの剛性によるたわみの変位を示したものである。剛性比が大きくなり、 D^* が200以上になると有限要素解析の精度は低下するが、厳密解⁽⁴⁾はコアのせん断剛性を考慮しない通常の等質板としての解とほとんど一致しているのをそれを使用すればよい。

4.2 1円孔のある場合 以上の精度に基づいて

曲げモーメントが作用している1円孔を持つ正方形のサンドイッチ板の応力集中を有限要素解析で行った。単純理論では92要素分割をとり、高級理論では30要素分割をとって計算した。計算に用いたサンドイッチ板の条件は $2R/L = 0.1$, $L/t_f = 1250$, $E_f/G_c = 720$, $t_c/t_f = 6.25$, $M_x = 800 \text{ kgf} \cdot \text{mm}$, $t_f = 0.8 \text{ mm}$ である。

表1に示すように両有限要素解析が応力集中に及ぼす影響の差はわずか0.6%であり、この結果からサンドイッチ板の応力集中係数を調べるには単純理論だけでも充分であると言える。

5. 二つの曲げの荷重条件

等質板としての Anticlastic bending と Cylindrical bending の定義をそのまま用いて、相対する辺に曲げ

表1 有限要素解析の応力値

[STRESS UNIT; kgf/mm^2]

BENDING THEORY	NUMBER OF ELEMENTS	MAXIMUM STRESS; $\sigma_{x(max)}$	STANDARD STRESS; σ_0	$\frac{\sigma_{x(max)}}{\sigma_0}$
SIMPLE THEORY	92	0.173	0.103	1.68
ADVANCED THEORY	30	0.172	0.103	1.67

図6 高級理論のFEM解析と理論解析の比

図7 剛性比 D^* に対するたわみ比の変化

図8 応力集中度

図9 最大応力の差

図10 応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の値

モーメント M のみが加わる場合と、他の2辺に先の曲げモーメントにポアソン比を掛けた νM がさらに加わる二つの荷重条件によってサンドイッチ板の応力集中係数がいかに変わるかを調べた。

円孔の半径 R の変化によって Anticlastic bending と Cylindrical bending の a 点の応力集中率 α の変化の一例を図8に示し、図9には図8の両曲げ荷重条件による最大応力の差を示した。また、図10には Anticlastic bending の場合、曲げモーメントが作用してい

る方向の円孔縁b点の応力 $\sigma_{\theta\theta}$ が R によっていかに変わるかを示した。図8、9から Anticlastic bending の最大応力 (以下 $\sigma_{AN(max)}$ と表記する) が Cylindrical bending の最大応力 (以下 $\sigma_{CY(max)}$ と表記する) より R の変化によらず常に大きくなっていることがわかる。これらの関係を拡張してみると R が非常に小さくなる場合、つまりサンドイッチ無限板に対しても $\sigma_{AN(max)}$ が $\sigma_{CY(max)}$ より大きくなることが予測されるし、また図10では R が小さくなるにつれ $\sigma_{\theta\theta}$ がある一定値に収束すると思われる。以上の関係から通常用いられている寸法のサンドイッチ無限板の曲げにおいては等質無限板の曲げの場合と違って Anticlastic bending のほうが Cylindrical bending のほうより応力集中率が大きくなり、さらに $\sigma_{\theta\theta}$ の符号が負になっていることから等質板の引張りの応力集中の性質に近いことがわかった。

6. 応力集中係数の資料

サンドイッチ板の応力集中係数を調べるために単純理論の有限要素解析と Anticlastic bending の荷重条件のもとで $L/2B=2.0$, $L/t_f=750$, $t_f=0.8$ mm の寸法を持つ帯板について、曲げモーメント $M_x=1000$ kgf・mm が作用している場合の計算を HITAC-M-200 H で行った。

図11 1円孔の応力集中係数 (その1)

図12 1円孔の応力集中係数 (その2)

図13 1円孔の応力集中係数 (その3)

図15 偏心円孔の応力集中係数 (その2)

図14 偏心円孔の応力集中係数 (その1)

図16 2円孔の応力集中係数 (その1)

図 17 2円孔の応力集中係数
(その2)

図 18 溝孔の応力集中係数

図 19 切欠の応力集中係数

6.1 帯板の中央に1個の円孔がある場合 図 11 には R/B をパラメータにし、 G_{xx}/G_{yz} , G_{yz}/G_{xx} , G_c/E_f を横軸にとった場合、a 点(図 8 参照)の応力集中係数がいかに変わるかを示した。応力集中係数は R/B と G_c/E_f が小さくなるにつれ大きくなっており、 G_{xx}/G_{yz} と G_{yz}/G_{xx} に対してはその値が 1 の時に最大値を持つことがわかる。そして、図 12, 13 にはコア厚さの変化による a 点の応力集中係数の変化を示した。

6.2 帯板に1個の偏心円孔がある場合 偏心円孔の応力集中係数を図 14, 15 に示した。 R/B と e/B が小さい時には帯板の影響があまり見られないが、大きくなるにつれて a 点の応力に帯板の影響が非常に出てくる。しかし、b 点では帯板による応力への影響があまり見られない。

6.3 帯板に2個の円孔がある場合

6.3.1 帯板の中央から縦軸方向に同距離離れている2個の円孔がある場合の応力集中係数を図 16 に示した。 e_v/B が小さい時には2円孔の干渉による影響が b 点によく出ているが、 e_v/B が大きくなるにつれその影響がほとんどなくなり $e_v/B = 0.5$ の所では a 点と b 点の応力集中係数がほぼ同じになっている。

6.3.2 帯板の中央から横軸方向に同距離離れている2個の円孔がある場合の応力集中係数を図 17 に示した。 e_h/B が小さい時には2円孔の干渉による影響に

よって応力集中係数が小さくなっているが、 e_h/B が大きくなるにつれてその影響はなくなっている。

6.4 帯板に両端を半径 R で丸めた溝孔が横断方向にある場合の応力集中係数の一例を図 18 に、そして帯板に円弧形的の切欠がある場合の応力集中係数の一例を図 19 にそれぞれ示した。

7. 結 言

以上の結果より通常用いられているサンドイッチ板の応力集中を計算するには表板の曲げ剛性を考慮しない単純理論だけで充分であり、応力集中の性質が等質板の曲げよりも引張りに近いこととコアのせん断剛性が大きくなるにつれて応力集中係数が小さくなることがわかった。さらに異方性のコアの場合は荷重が作用している方向にコアのせん断剛性を大きくしたほうがそれと直角方向に大きくしたよりも応力集中係数が若干小さくなるので有利である。

文 献

- (1) Johnson, A. F., Proc. 3rd ICCM, (1980), 693.
- (2) 三木・ほか2名, 機論, 51-464 A (昭60), 990.
- (3) 村瀬・西村, 機論, 42-362 (昭51), 3098-3099.
- (4) 倉西・長尾, 日本大学工学研究所報, No. 15 (昭32), 196-213.