二次元および円板状き裂の衝撃応答*

上 田 整**

Impact Response of Rectangular and Penny-Shaped Crack

Sei UEDA

The impact responses of rectangular and penny-shaped crack are considered in this study. Laplace-Fourier and Laplace-Hankel transforms are used to reduce the mixed boundary problems to dual integral equations. The solutions are expressed in terms of Fredholm integral equations of the second kind having a kernel with fast rate convergence. The numerical inversion of Laplace transform by the use of the FFT algorithm contributes to the improvement of the accuracy of the result and the reduction of CPU time.

Key Words: Elasticity, Impact Response, Rectangular Crack, Penny-Shaped Crack, FFT, Numerical Inversion of Laplace Transform, Stress Intensity Factor

1. 緒 言

き裂に関する動力学問題は近年さかんに研究されており^{(1)~(3)}, き裂力学の中心課題となっている。これらの研究は, そのほとんどが波動方程式および境界条件をラプラス変換により変換し, ラプラス像空間における解を求め, 逆変換を行って時間空間での解を求める方法によっている。ラプラス像空間で得られる解は一般に非常に複雑であるため, ラプラス逆変換には, いわゆる数値ラプラス逆変換法⁽¹⁾⁽²⁾⁽⁴⁾が用いられている。しかしながらこれらの数値ラプラス逆変換には精度上の問題点があり, 解の信頼性も十分であるとはいえない。

本報では, ラプラス逆変換の積分路であるブロムウィッチの積分路を虚軸上の積分路に変換する方法⁽⁵⁾を二次元および円板状き裂の衝撃問題に適用した。さらに高速フーリエ変換(FFT)を用い, 時間空間における動的応力拡大係数を精度よく求めた。

解法は, ラプラス・フーリエ変換あるいはラプラス・ハンケル変換を用いて得られる双積分方程式を第二種

フレドホルム形積分方程式に導いて解く方法⁽¹⁾によるが, ラプラス像空間で得られる第二種フレドホルム形積分方程式の積分核の半無限積分をリーマン面上の複素積分法⁽²⁾により評価し, その数値的評価を容易にした。ラプラス像空間におけるパラメータを虚数で与えるため, この第二種フレドホルム形積分方程式は実部と虚部に関する連立方程式となる。

2. 問題の設定

2.1 二次元き裂の場合 図1に示す直角座標系 (x, y, z) において, 剛性率 μ , 密度 ρ の無限弾性体中

図1 直角座標系

* 昭和61年10月25日 山梨地方講演会において講演, 原稿受付 昭和61年3月18日。

** 正員, 静岡大学教育学部 (〒422 静岡市大谷836)。

に長さ $2a$ の二次元き裂が, $y=0, -a < x < a, -\infty < z < \infty$ の領域に存在し, き裂面に衝撃面外せん断負荷 $-\tau_0 H(t)$ が作用する動的問題を設定する。ここで, τ_0 は応力の次元を有する定数, t は時間, $H(\cdot)$ はヘビサイドの単位ステップ関数である。

$z=0$ 面における応力および変位の対称性を考慮すると, $z>0$ の領域のみを解析すれば十分である。面外せん断変形問題の場合, 変位場は,

$$u_x = u_y = 0, u_z = u_z(x, y, z) \quad \dots\dots\dots (1)$$

応力場は

$$\tau_{xz} = \mu(\partial u_z / \partial x), \tau_{yz} = \mu(\partial u_z / \partial y) \quad \dots\dots\dots (2)$$

運動方程式は

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで, $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$ はせん断波速度である。

境界条件は

$$\tau_{yz}(x, 0, t) = -\tau_0 H(t); x < a \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$u_z(x, 0, t) = 0; x > a \quad \dots\dots\dots (5)$$

2・2 円板状き裂の場合

図2に示す円柱座標系 (r, θ, z) において, 2・1節と同様の無限弾性体中に半径 a の円板状き裂が z 軸に対称に $z=0$ 面上に存在し, き裂面に衝撃ねじりせん断負荷 $-\tau_0(r/a)H(t)$ が作用する動的問題を設定する。二次元き裂の場合と同様に, 変位場は

$$u_r = u_z = 0, u_\theta = u_\theta(r, z, t) \quad \dots\dots\dots (6)$$

応力場は

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \mu(\partial u_\theta / \partial r - u_\theta / r) \\ \tau_{z\theta} &= \mu(\partial u_\theta / \partial z) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

運動方程式は

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

境界条件は

$$\tau_{z\theta}(r, 0, t) = -\tau_0(r/a)H(t); r < a \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$u_\theta(r, 0, t) = 0; r > a \quad \dots\dots\dots (10)$$

3. 解 析

ラプラス変換およびその逆変換を次式で定義する。

図2 円柱座標系

$$\left. \begin{aligned} f^*(p) &= \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} f^*(p) e^{pt} dp \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに Br はブロムウィッチの積分路である。

3・1 二次元き裂の場合⁽¹⁾ 式(3)～式(5)にラプラスおよびフーリエ変換を用いて得られる双積分方程式を第二種フレドホルム形積分方程式に導けば

$$\Phi_1(u, x) + \int_0^1 M_1(u, v, x) \Phi_1(v, x) dv = \sqrt{u} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$M_1(u, v, x)$ はリーマン面上の複素積分法⁽²⁾により評価された積分核であり,

$$M_1(u, v, x) = \frac{2x^2 \sqrt{uv}}{\pi} \int_0^1 \gamma I_0(xau) K_0(xav) da \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに $x = pa/c_2$, $\gamma = (1-a^2)^{1/2}$, $I_0(\cdot)$, $K_0(\cdot)$ はそれぞれ零次の第一種, 第二種の変形ベッセル関数である。

無次元化された応力拡大係数 $K_{31}(T)$ は, 無次元時間 $T = tc_2/a$ とすると

$$K_{31}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\Phi_1(1, x)}{x} e^{xT} dx \quad \dots\dots\dots (14)$$

3・2 円板状き裂の場合⁽¹⁾⁽²⁾ 式(8)～式(10)にラプラスおよびハンケル変換を用いて得られる双積分方程式を第二種フレドホルム形積分方程式に導けば

$$\Phi_2(u, x) + \int_0^1 M_2(u, v, x) \Phi_2(v, x) dv = u^2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$M_2(u, v, x)$ は評価された積分核であり

$$M_2(u, v, x) = \frac{2x^2 \sqrt{uv}}{\pi} \int_0^1 \gamma I_{3/2}(xau) K_{3/2}(xav) da \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに $I_{3/2}(\cdot)$, $K_{3/2}(\cdot)$ はそれぞれ 3/2 次の第一種, 第二種の変形ベッセル関数である。

無次元化された応力拡大係数 $K_{32}(T)$ は

$$K_{32}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\Phi_2(1, x)}{x} e^{xT} dx \quad \dots\dots\dots (17)$$

4. 数値ラプラス逆変換

式(14), (17)における被積分関数は図3に示す積分路 $B_r + C_R + C + C_{-R}$ で囲まれた領域内に特異点はなく, また C_R, C_{-R} 上の積分は $R \rightarrow \infty$ で零であるため, 結局式(14), (17)は次のようになる⁽⁵⁾。

$$\begin{aligned} K_{3j}(T) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-iR}^{-i\delta} + \int_{i\delta}^{iR} \frac{\Phi_j(1, x)}{x} e^{xT} dx \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\Phi_j(1, x)}{x} e^{xT} dx; R \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0 \\ &\quad (j=1, 2) \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

式(18)において C_0 は原点の回りを半径 δ の円に沿って $i\delta$ から $-i\delta$ に進む積分路である。また $j=1$ は二次

元き裂, $j=2$ は円板状き裂の場合を示す添字である.

式(18)の第1項においては $x=-i\omega$, 第2項においては $x=\delta e^{i\theta}$ とおけば,

$$K_{3j}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_R^\delta + \int_{-\delta}^{-R} \frac{\Phi_{Rj}(1, -i\omega) + i\Phi_{Ij}(1, i\omega)}{\omega} e^{-i\omega T} d\omega \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\Phi_{Rj}(1, \delta e^{i\theta}) + i\Phi_{Ij}(1, \delta e^{i\theta})] e^{\delta e^{i\theta} T} d\theta; R \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0 \quad (j=1, 2) \quad (19)$$

ここで, $\Phi_{Rj} = \text{Re}[\Phi_j]$, $\Phi_{Ij} = \text{Im}[\Phi_j]$ とする. さらに, 式(12), (13)および式(15), (16)の第二種フレドホルム形積分方程式は, 次の第二種フレドホルム形積分方程式と同次フレドホルム形積分方程式の連立方程式になる.

$$\Phi_{Rj}(u, -i\omega) + \int_0^1 [\Phi_{Rj}(v, -j\omega) M_{Rj}(u, v, -i\omega) - \Phi_{Ij}(v, -i\omega) M_{Ij}(u, v, -i\omega)] dv = \begin{cases} \sqrt{u} & (j=1) \\ u^2 & (j=2) \end{cases} \quad (20)$$

$$\Phi_{Ij}(u, -i\omega) + \int_0^1 [\Phi_{Rj}(v, -i\omega) M_{Ij}(u, v, -i\omega) - \Phi_{Ij}(v, i\omega) M_{Rj}(u, v, -i\omega)] dv = 0 \quad (j=1, 2) \quad (21)$$

ここで

$$M_{R1}(u, v, -i\omega) = \begin{cases} \omega^2 \sqrt{uv} \int_0^1 \gamma J_0(\omega au) N_0(\omega av) da & (\omega > 0) \\ \omega^2 \sqrt{uv} \int_0^1 \gamma J_0(-\omega au) N_0(-\omega av) da & (\omega < 0) \end{cases} \quad (22)$$

$$M_{I1}(u, v, -i\omega) = \begin{cases} -\omega^2 \sqrt{uv} \int_0^1 \gamma J_0(\omega au) J_0(\omega av) da & (\omega > 0) \\ \omega^2 \sqrt{uv} \int_0^1 \gamma J_0(-\omega au) J_0(-\omega av) da & (\omega < 0) \end{cases} \quad (23)$$

$$M_{R2}(u, v, -i\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^1 \frac{\gamma}{a} \left[\cos(\omega au) - \frac{\sin(\omega au)}{\omega au} \right] \cdot \left[\frac{\cos(\omega av)}{\omega av} + \sin(\omega av) \right] da \quad (24)$$

$$M_{I2}(u, v, -i\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^1 \frac{\gamma}{a} \left[\cos(\omega au) - \frac{\sin(\omega au)}{\omega au} \right] \cdot \left[\cos(\omega av) - \frac{\sin(\omega av)}{\omega av} \right] da \quad (25)$$

また $J_0(\quad)$, $N_0(\quad)$ はそれぞれ零次の第一種, 第二種のベッセル関数であり, $M_{Rj} = \text{Re}[M_j]$, $M_{Ij} = \text{Im}[M_j]$ である.

式(20)~式(25)より

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{Rj}(1, 0) &= 1, \Phi_{Ij}(1, 0) = 0 \\ \Phi_{Rj}(1, -i\omega) &= \Phi_{Rj}(1, i\omega) \\ \Phi_{Ij}(1, -i\omega) &= -\Phi_{Ij}(1, i\omega) \end{aligned} \right\} (j=1, 2) \quad (26)$$

式(26)を考慮すれば, 式(19)は次のようになる.

$$K_{3j}(T) = \frac{1}{\pi} \int_s^R -\frac{\Phi_{Rj}(1, -i\omega) + i\Phi_{Ij}(1, -i\omega)}{i\omega} e^{-i\omega T} d\omega + \frac{1}{2}; R \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0 \quad (j=1, 2) \quad (27)$$

さらに

$$K_{3j}(T) = \frac{1}{\pi} \int_s^R \frac{1}{\omega} [\Phi_{Rj}(1, -i\omega) \sin \omega T - \Phi_{Ij}(1, -i\omega) \cos \omega T] d\omega + \frac{1}{2}; R \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0 \quad (j=1, 2) \quad (28)$$

式(27)はフーリエ変換形であるので, 標本化定理に基づいて離散化すると次式のようになる.

$$K_{3j}(k\Delta\tau) = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n^* e^{-2\pi i k n / N} + \frac{1}{2} \\ (k=0, 1, \dots, N-1) \quad (29)$$

ここで, T は十分に大きい実数, N は分割数であり

$$\Delta\tau = T/N$$

$$\Delta\omega = 2\pi/T$$

$$F_n^* = -\frac{\Phi_{Rj}(1, -in\Delta\omega) + i\Phi_{Ij}(1, -in\Delta\omega)}{in\Delta\omega}$$

式(29)に高速フーリエ変換を用いて演算の高速化を行う. 式(28)の積分を実際に数値的に評価し, 式(29)の高速フーリエ変換による解と比較し, 動的応力拡大係数の時間的挙動を精度よく求めた.

5. 数値結果および考察

数値計算においては, $N=2^{11}$, $T=100$ で行った. 数値積分を実際に行ったものとは $0 < T < 6$ でよく一致するが, $T > 6$ では T が大きくなるに伴って, 両者間に違いが見られた.

図3 積分路

図4は二次元き裂の場合の無次元化された動的応力拡大係数の時間的挙動を示したものである。破線は、Bellmanら⁽⁴⁾による数値ラプラス逆変換によって得られた解であり、実線が本報の方法による解である。両者とも $T < 1.8$ ではほぼ完全に一致しているが、 $T = 2.0$ すなわち、き裂の一端で発生した散乱波が他端に到達する時刻付近以降で違いが見られる。本報で得られた解は $T = 2.0$ までは急激に増大し、 $T = 2.0$ 以降は直線的に減少しており、 $T = 2.0$ における最大値が $K_{31}(2.0) = 1.26$ と明りょうに現れている。Bellmanらによる方法で得られた解は、最大値が明りょうでなく、ほぼ $K_{31}(2.2) = 1.24$ 程度となっている。

図5は円板状き裂の場合の無次元応力拡大係数の時間挙動を示したものである。Bellmanらの方法による解は $T = 0.2$ 付近で変曲点が見られる程度でほかはなめらかな曲線となっている。最大値は $K_{32}(0.72) \approx 1.20$ である。本報で得られた解は $T = 0.2$ 程度の間隔でするどい極値が現れており、最大値は $K_{32}(0.8) = 1.22$ となっている。円板状き裂の場合は、最大値に達する時刻などが二次元き裂の場合のように物理的に明らかでなく、複雑な挙動をしているものと思われる。また、Bellmanらの方法と本報での方法による結果に生ずる差の原因として、Bellmanらの方法による場合、展開される連立一次方程式が八次元程度に限られるため、十分な精度が得られないためと思われる。精度上の検討として、二次元き裂の場合すでに得られている

図4 動的応力拡大係数(二次元き裂)

図5 動的応力拡大係数(円板状き裂)

解析解⁽⁶⁾と比較したが、最大値 $T = 2.0$ で1%、その他の部分でも1%以下の誤差であった。

終わりに本研究にあたり終始懇切なご指導、ご教示をいただいた東北大学 渥美光名誉教授に心より感謝する。また適切なご助言、ご批判をいただいた静岡大学教育学部 畑俊明教授、須見尚文教授、東北大学工学部 進藤裕英助教授に深く感謝する。

文 献

- (1) Sih, I. C., *Mechanics of Fracture*, 4(1977), 1, Noordhoff International Publishing.
- (2) Ueda, S., ほか2名, *Eng. Fract. Mech.*, 18-5 (1983), 1059.
- (3) Ueda, S., ほか2名, *Eng. Fract. Mech.*, 19-6 (1984), 1095.
- (4) Bellman, R., ほか2名, *Numerical Inversion of the Laplace Transform*, (1966), 1, Elsevier Publishing Co.
- (5) Peck, J. C. and Miklowitz, J., *Int. J. Solids Struct.*, 5-5(1969), 437.
- (6) Thau, S. A and Lu, T. H., *Int. J. Eng. Sci.*, 8(1970), 857.