引張荷重を受ける突合せ接着継手の三次元応力解析*
(被着体が中実円柱の場合)沢 俊 行**, 石 川 浩 久***
天 摩 勝 洋†, 岩 田 昭 浩††Three-Dimensional Stress Analysis of Adhesive Butt Joints
Subjected to Tensile Loads
(The Case where Adherends are Two Solid Cylinders)Toshiyuki SAWA, Hirohisa ISHIKAWA,
Katsuhiro TEMMA, and Akihiro IWATA

This paper deals with a three-dimensional stress analysis of adhesive butt joints subjected to tensile loads in order to contribute to an establishment of the fracture criteria of joints. Similar adherends and an adhesive bond are replaced with finite solid cylinders in the analysis. Stress distributions in adhesive joints are analyzed strictly by using the three-dimensional theory of elasticity. The effects of stiffness and thickness of the adhesive bonds on the normal and the shear stress distributions are shown by numerical computations. The analytical result is also compared with the result obtained by F. E. M. in order to verify the stress distributions in the adhesive bonds. It is shown that they are in fairly good agreement.

Key Words: Elasticity, Stress Analysis, Adhesion, Butt Joint, Tensile Load, Solid Cylinder

1. 緒 言

最近の接着剤の性能向上に伴い機械構造物に接着継手が用いられるようになってきた。接着継手構造の設計においては経験によるところが多く設計に必要なデータの整備と体系的な強度設計法の確立が望まれている。この確立にあたっては継手内の応力分布をより正確に知る必要がある。従来、引張り、あるいは曲げ荷重を受けるスカーフおよび突合せ接着継手の応力分布に関する研究^{(1)~(11)}は、かなりなされるようになってきた。しかし、引張荷重を受ける被着体が中実円柱の場合の突合せ接着継手の応力分布に関しては従来より有限要素法による研究⁽¹²⁾⁽¹³⁾がなされているのみである。なお被着体が中空円筒の場合にもいくつかの研究^{(14)~(17)}がなされているのみである。

本研究では、接着継手の基本的一例である中実円柱の突合せ接着継手に引張荷重が作用する場合の継手の

応力分布に関して、被着体の弾性を考慮した厳密な解析方法を示し、継手の体系的な強度設計法の確立寄与を目的としている。理論的には被着体、接着層を有限円柱にモデル化し、弾性三体問題として軸対称三次元弾性論を用いて解析を行う。この解析に基づき被着体と接着層の縦弾性係数の比、ポアソン比の比、引張荷重の荷重分布および接着層の厚さが接着層境界の応力分布に及ぼす影響について数値的に明らかにする。また有限要素法による結果⁽¹²⁾と比較する。

2. 理 論 解 析

図1に同一寸法、同一材質の二つの中実円柱を接着した突合せ接着継手に引張荷重が作用する場合を示す。このような接着継手内部の応力分布を解析するために継手の接着層の r 軸に関する対称性を考慮して図2に示すように被着体を有限円柱〔I〕に、接着層を有限円柱〔II〕に置き換える。円柱〔I〕の寸法は、直径 $2a$ 、高さ $2h_1$ とし、縦弾性係数を E_1 、ポアソン比を ν_1 とする。円柱〔II〕のそれらを $2a, 2h_2, E_2, \nu_2$ とする。また円柱〔I〕の上端面には z_1 軸に対称な任意の荷重が $F(r)$ の応力分布で $r \leq c$ の範囲に作用すると仮定し、この分布をベッセル関数 $J_0(\gamma_s r)$ の級数に展開すると境界条件は次式となる。なお u は r 方向変位、 w

* 昭和61年10月25日 山梨地方講演会において講演、原稿受付 昭和61年4月25日。

** 正員、山梨大学工学部 (〒400 甲府市武田4-3-11)。

*** 学生員、山梨大学大学院。

† 正員、木更津工業高等専門学校 (〒292 木更津市清見台東2-11-1)。

†† 准員、(株)東芝機械 (〒104 東京都中央区銀座4-2-11)。

図 1 任意の引張荷重を受ける突合せ接着継手

図 2 解析モデルおよび寸法

は z 方向変位とし、右肩の添字 I および II はそれぞれ円柱 (I) および (II) に関するものを表す。

(i) 有限円柱 (I) (被着体) において

$$\left. \begin{aligned} r=a : \sigma_r^I = \tau_{rz}^I = 0 \\ z_1=h_1 : \sigma_z^I = F(r) = a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s J_0(\gamma_s r) \\ \tau_{rz}^I = 0 \end{aligned} \right\} \cdots (1)$$

(ii) 有限円柱 (II) (接着層) において

$$r=a : \sigma_r^{II} = \tau_{rz}^{II} = 0 \cdots (2)$$

(iii) 有限円柱 (I), (II) の境界において

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_z^I)_{z_1=-h_1} &= (\sigma_z^{II})_{z_2=h_2} \\ (\tau_{rz}^I)_{z_1=-h_1} &= (\tau_{rz}^{II})_{z_2=h_2} \\ (u^I)_{z_1=-h_1} &= (u^{II})_{z_2=h_2} \\ \left(\frac{\partial w^I}{\partial r} \right)_{z_1=-h_1} &= \left(\frac{\partial w^{II}}{\partial r} \right)_{z_2=h_2} \end{aligned} \right\} \cdots (3)$$

なお、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{a^2} \int_0^a F(r) r dr \\ a_s &= \frac{2}{a^2 J_0^2(\gamma_s a)} \int_0^a F(r) r J_0(\gamma_s r) dr \\ (s=1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

式(1)~(3)の境界条件をもつ有限円柱を解析するために Michell の応力関数 $\Phi^{(18)(19)}$ を用いる。このとき各応力、変位は次式⁽¹⁸⁾となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (2-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} \\ u &= -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \\ w &= \frac{1+\nu}{E} \left\{ (1-2\nu) \nabla^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\} \end{aligned} \right\} \cdots (4)$$

$$\cdots (5)$$

ここで、

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0, \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

E は縦弾性係数、 ν はポアソン比を表す。

重調和関数の変数分離解の中から境界条件を考慮して円柱 (I) を解析するために Michell の応力関数 Φ^I を $\Phi^I = \Phi_1^I + \Phi_2^I + \Phi_3^I + \Phi_4^I$ と置き⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾ 円柱 (II) に関しては応力関数 Φ^{II} を $\Phi^{II} = \Phi_1^{II} + \Phi_2^{II}$ と置く。応力関数 $\Phi_1^I, \Phi_2^I, \Phi_3^I, \Phi_4^I, \Phi_1^{II}$ および Φ_2^{II} を式(6)から式(11)に示す。なお式中の $\bar{A}_0^I, \bar{C}_0^I, \bar{A}_n^I, \bar{C}_n^I, \bar{A}_n^I, \bar{C}_n^I, \bar{A}_n^I, \bar{C}_n^I, \bar{A}_n^I, \bar{C}_n^I, \bar{A}_n^I, \bar{C}_n^I$ および $\bar{A}_n^{II}, \bar{C}_n^{II}, \bar{A}_n^{II}, \bar{C}_n^{II}$ ($n, s=1, 2, 3, \cdots$) は境界条件により決定される未定係数である。

$$\begin{aligned} \Phi_1^I &= \Phi_1 \bar{A}_0^I, \bar{C}_0^I, \bar{A}_n^I, \bar{C}_n^I, a, h_1, \beta_n^I, \gamma_s, \bar{A}_n^I, \bar{C}_n^I, \nu_1, r, z_1) \\ &= \bar{A}_0^I \frac{z_1^3}{6} + \bar{C}_0^I \frac{z_1 r^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^I}{\beta_n^{I3} \bar{A}_n^I} [(2(1-\nu_1) I_{1a} + \beta_n^I a I_{0a}) I_{0r} - \beta_n^I r I_{1a} I_{1r}] \sin(\beta_n^I z_1) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_s^I}{\gamma_s^3 \bar{C}_s^I} [-\{2\nu_1 \operatorname{sh}(\gamma_s h_1) + \gamma_s h_1 \operatorname{ch}(\gamma_s h_1)\} \operatorname{sh}(\gamma_s z_1) + \gamma_s z_1 \operatorname{sh}(\gamma_s h_1) \operatorname{ch}(\gamma_s z_1)] J_0(\gamma_s r) \cdots (6) \\ \Phi_2^I &= \Phi_2(\bar{A}_n^I, \bar{C}_n^I, a, h_1, \beta_n^I, \gamma_s, \bar{A}_n^I, \bar{C}_n^I, \nu_1, r, z_1) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^I}{\beta_n^{I3} \bar{A}_n^I} [(2(1-\nu_1) I_{1a} + \beta_n^I a I_{0a}) I_{0r} - \beta_n^I r I_{1a} I_{1r}] \cos(\beta_n^I z_1) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_s^I}{\gamma_s^3 \bar{Q}_s^I} [-\{2\nu_1 \operatorname{ch}(\gamma_s h_1) + \gamma_s h_1 \operatorname{sh}(\gamma_s h_1)\} \operatorname{ch}(\gamma_s z_1) + \gamma_s z_1 \operatorname{ch}(\gamma_s h_1) \operatorname{sh}(\gamma_s z_1)] J_0(\gamma_s r) \cdots \cdots (7)$$

$$\Phi_3^I = \Phi_3(\bar{A}_0^I, \bar{C}_0^I, \bar{A}_n^I, \bar{C}_n^I, a, h_1, \beta_n^I, \gamma_s, \bar{A}_n^I, \bar{Q}_n^I, \nu_1, r, z_1)$$

$$= \bar{A}_0^I \frac{z_1^3}{6} + \bar{C}_0^I \frac{z_1 r^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^I}{\beta_n^{I3} \bar{A}_n^I} [(2(1-\nu_1)I_{1a} + \beta_n^I a I_{0a}) I_{0r} - \beta_n^I r I_{1a} I_{1r}] \sin(\beta_n^I z_1)$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_s^I}{\gamma_s^3 \bar{Q}_s^I} [(1-2\nu_1) \operatorname{ch}(\gamma_s h_1) - \gamma_s h_1 \operatorname{sh}(\gamma_s h_1)] \operatorname{sh}(\gamma_s z_1) + \gamma_s z_1 \operatorname{ch}(\gamma_s h_1) \operatorname{ch}(\gamma_s z_1)] J_0(\gamma_s r) \cdots \cdots (8)$$

$$\Phi_4^I = \Phi_4(\bar{A}_n^I, \bar{C}_n^I, a, h_1, \beta_n^I, \gamma_s, \bar{A}_n^I, \bar{Q}_n^I, \nu_1, r, z_1)$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^I}{\beta_n^{I3} \bar{A}_n^I} [(2(1-\nu_1)I_{1a} + \beta_n^I a I_{0a}) I_{0r} - \beta_n^I r I_{1a} I_{1r}] \cos(\beta_n^I z_1)$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_s^I}{\gamma_s^3 \bar{Q}_s^I} [(1-2\nu_1) \operatorname{sh}(\gamma_s h_1) - \gamma_s h_1 \operatorname{ch}(\gamma_s h_1)] \operatorname{ch}(\gamma_s z_1) + \gamma_s z_1 \operatorname{sh}(\gamma_s h_1) \operatorname{sh}(\gamma_s z_1)] J_0(\gamma_s r) \cdots \cdots (9)$$

$$\Phi_1^{II} = \Phi_1(\bar{A}_0^{II}, \bar{C}_0^{II}, \bar{A}_n^{II}, \bar{C}_n^{II}, a, h_2, \beta_n^{II}, \gamma_s, \bar{A}_n^{II}, \bar{Q}_n^{II}, \nu_2, r, z_2) \cdots \cdots (10)$$

$$\Phi_3^{II} = \Phi_3(\bar{A}_0^{II}, \bar{C}_0^{II}, \bar{A}_n^{II}, \bar{C}_n^{II}, a, h_2, \beta_n^{II}, \gamma_s, \bar{A}_n^{II}, \bar{Q}_n^{II}, \nu_2, r, z_2) \cdots \cdots (11)$$

ここで、 $J_\mu(r)$ は μ 次の第1種ベッセル関数、 $I_\mu(r)$ は μ 次の第1種変形ベッセル関数を表し、 λ_s は $J_1(\lambda_s) = 0$ を満足する第 s 番めの正根である。また $I_{\mu a}$ は $I_\mu(\beta_n a)$ 、 $I_{\mu r}$ は $I_\mu(\beta_n r)$ 、 $I'_{\mu a}$ は $I_\mu(\beta_n' a)$ 、 $I'_{\mu r}$ は $I_\mu(\beta_n' r)$ 、 sh は $\sinh$ および ch は $\cosh$ の略記号である。

さらに、

$$\beta_n^I = \beta_n(h_1) = \frac{n\pi}{h_1}, \quad \beta_n^{I'} = \beta_n'(h_1) = \frac{(2n-1)\pi}{2h_1}, \quad \beta_n^{II} = \beta_n(h_2), \quad \beta_n^{II'} = \beta_n'(h_2), \quad \gamma_s = \lambda_s/a$$

$$\bar{Q}_s^I = Q_s(\gamma_s h_1) = \operatorname{sh}(\gamma_s h_1) \operatorname{ch}(\gamma_s h_1) + \gamma_s h_1, \quad \bar{Q}_s^{II} = Q_s(\gamma_s h_2) = \operatorname{sh}(\gamma_s h_2) \operatorname{ch}(\gamma_s h_2) - \gamma_s h_2, \quad \bar{Q}_s^I = \bar{Q}_s^{II}, \quad \bar{Q}_s^{II} = \bar{Q}_s^I$$

$$\bar{Q}_s^{II} = Q_s(\gamma_s h_2), \quad \bar{Q}_s^{II} = \bar{Q}_s^{II}, \quad \bar{A}_n^I = \Delta_n(\beta_n^I a, \nu_1) = [(2(1-\nu_1) + (\beta_n^I a)^2) I_{1a}^2 - (\beta_n^I a)^2 I_{0a}^2] / \beta_n^{I3} a$$

$$\bar{A}_n^I = \Delta_n(\beta_n^{I'} a, \nu_1), \quad \bar{A}_n^{II} = \bar{A}_n^{II}, \quad \bar{A}_n^{II} = \Delta_n(\beta_n^{II} a, \nu_2), \quad \bar{A}_n^{II} = \Delta_n(\beta_n^{II'} a, \nu_2)$$

式(6)から式(11)を式(4)および式(5)へ代入して各応力および各変位を求め境界条件式(1)、(2)、(3)と等置することにより未定係数の間には式(12)および式(13)の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_0^I(1-\nu_1) + \bar{C}_0^I 2(2-\nu_1) &= a_0, \quad \bar{A}_0^I \nu_1 + \bar{C}_0^I (2\nu_1-1) = 0, \quad \bar{A}_0^{II}(1-\nu_2) + \bar{C}_0^{II} 2(2-\nu_2) = 0 \\ \bar{A}_0^I \nu_1 + \bar{C}_0^I (2\nu_1-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I \frac{(-1)^{n+1}}{\beta_n^{I'} h_1} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{C}_s^I \frac{J_0(\gamma_s a)}{\gamma_s h_1} &= 0 \\ \bar{A}_0^{II}(1-\nu_2) + \bar{C}_0^{II} 2(2-\nu_2) &= a_0, \quad \bar{A}_0^{II} \nu_2 + \bar{C}_0^{II} (2\nu_2-1) = 0, \quad \bar{A}_0^{II}(1-\nu_2) + \bar{C}_0^{II} 2(2-\nu_2) = 0 \\ \bar{A}_0^{II} \nu_2 + \bar{C}_0^{II} (2\nu_2-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{II} \frac{(-1)^{n+1}}{\beta_n^{II'} h_2} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{C}_s^{II} \frac{J_0(\gamma_s a)}{\gamma_s h_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_n^I + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{C}_s^I \bar{Q}_{sn}^I &= 0, \quad \bar{A}_n^{II} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{C}_s^{II} \bar{Q}_{sn}^{II} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I \bar{S}_{nm}^I + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{C}_s^I \bar{T}_{sm}^I = 0, \quad \bar{A}_n^{II} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{C}_s^{II} \bar{Q}_{sn}^{II} = 0 \\ \bar{A}_n^{II} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{C}_s^{II} \bar{Q}_{sn}^{II} &= 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{II} \bar{S}_{nm}^{II} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{C}_s^{II} \bar{T}_{sm}^{II} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I \bar{R}_{ns}^I + \bar{C}_s^I - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{II} \bar{R}_{ns}^{II} + \bar{C}_s^{II} = a_s \\ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I \bar{R}_{ns}^I + \bar{C}_s^I + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{II} \bar{R}_{ns}^{II} + \bar{C}_s^{II} &= 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I \bar{R}_{ns}^I + \bar{C}_s^I + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{II} \bar{R}_{ns}^{II} - \bar{C}_s^I - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{II} \bar{R}_{ns}^{II} - \bar{C}_s^{II} = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I \bar{R}_{ns}^I + \bar{C}_s^I - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{II} \bar{R}_{ns}^{II} - \bar{C}_s^{II} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{II} \bar{R}_{ns}^{II} + \bar{C}_s^{II} &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I \bar{H}_{ns}^I - \bar{C}_s^I \bar{F}_s^I + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{II} \bar{H}_{ns}^{II} + \bar{C}_s^{II} \bar{F}_s^{II} - \bar{C}_s^I \bar{f}_s^I + \bar{C}_s^{II} \bar{f}_s^{II} - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I \bar{H}_{ns}^I + \bar{C}_s^I \bar{F}_s^I - \bar{C}_s^{II} \bar{f}_s^{II} &= D_s \\ \bar{C}_s^I \bar{U}_s^I - \bar{C}_s^{II} \bar{U}_s^{II} - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^I \bar{P}_{ns}^I + \bar{C}_s^I \bar{W}_s^I + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{II} \bar{P}_{ns}^{II} - \bar{C}_s^{II} \bar{W}_s^{II} + \bar{C}_s^{II} \bar{U}_s^{II} - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{II} \bar{P}_{ns}^{II} + \bar{C}_s^{II} \bar{W}_s^{II} &= 0 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (13)$$

ここで、

$$\bar{Q}_{sn}^I = Q_{sn}(h_1, \bar{Q}_s^I) = \frac{4(-1)^n \gamma_s h_1 (n\pi)^2 J_0(\gamma_s a) \operatorname{sh}^2(\gamma_s h_1)}{\bar{Q}_s^I \{(\gamma_s h_1)^2 + (n\pi)^2\}^2}, \quad \bar{Q}_{sn}^{II} = \frac{(-1)^{n+1} \gamma_s h_2 (2n-1)^2 \pi^2 J_0(\gamma_s a) \operatorname{ch}^2(\gamma_s h_2)}{\bar{Q}_s^{II} \{(\gamma_s h_2)^2 + [(2n-1)\pi/2]^2\}^2}$$

$$\bar{Q}_{sn}^I = \frac{4(-1)^{n+1} (n\pi)^3 J_0(\gamma_s a) \operatorname{sh}^2(\gamma_s h_1)}{\bar{Q}_s^I \{(\gamma_s h_1)^2 + (n\pi)^2\}^2}, \quad \bar{Q}_{sn}^{II} = Q_{sn}(h_2, \bar{Q}_s^{II})$$

$$\bar{S}_{nm}^I = S_{nm}(\beta_n^I, \beta_m^I) = (-1)^{m-n+1} \{1/(\beta_n^I + \beta_m^I) + 1/(\beta_n^I - \beta_m^I)\}, \quad \bar{S}_{nm}^{II} = S_{nm}(\beta_n^{II}, \beta_m^{II})$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{sm}^I &= T_{sm}(h_1, \beta_m^I, \bar{Q}_s^I) = \frac{2(-1)^m \gamma_s J_0(\gamma_s a)}{\bar{Q}_s^I(\gamma_s^2 + \beta_m^I)} \left\{ \gamma_s h_1 + \frac{\gamma_s^2 + 3\beta_m^I}{\gamma_s^2 + \beta_m^I} \operatorname{sh}(\gamma_s h_1) \operatorname{ch}(\gamma_s h_1) \right\} \\
\bar{T}_{sm}^{II} &= T_{sm}(h_2, \beta_m^{II}, \bar{Q}_s^{II}), \quad \bar{R}_{ns}^I = R_{ns}(\beta_n^I, \bar{J}_n^I) = \frac{4(-1)^{n+1} \lambda_s^2 \beta_n^I a I_a^2}{\bar{J}_n^I((\beta_n^I a)^2 + \lambda_s^2)^2 J_0(\gamma_s a)} \\
\bar{R}_{ns}^I &= R_{ns}(\beta_n^I, \bar{J}_n^I), \quad \bar{R}_{ns}^I = R'_{ns}(\beta_n^I, \bar{J}_n^I) = \frac{4(-1)^n \lambda_s (\beta_n^I a)^2 I_a^2}{\bar{J}_n^I((\beta_n^I a)^2 + \lambda_s^2)^2 J_0(\gamma_s a)}, \quad \bar{R}_{ns}^I = R'_{ns}(\beta_n^I, \bar{J}_n^I) \\
\bar{R}_{ns}^{II} &= R_{ns}(\beta_n^{II}, \bar{J}_n^{II}), \quad \bar{R}_{ns}^{II} = R'_{ns}(\beta_n^{II}, \bar{J}_n^{II}) \\
\bar{H}_{ns}^I &= H_{ns}(\beta_n^I, \bar{J}_n^I, G_1, \nu_1) = \frac{4(-1)^{n+1} \gamma_s I_a^2}{\bar{J}_n^I \beta_n^I a J_0(\gamma_s a) (\gamma_s^2 + \beta_n^I)^2 G_1} \left(1 - \nu_1 + \frac{\beta_n^I}{\gamma_s^2 + \beta_n^I} \right), \quad \bar{H}_{ns}^I = H_{ns}(\beta_n^I, \bar{J}_n^I, G_1, \nu_1) \\
\bar{H}_{ns}^{II} &= H_{ns}(\beta_n^{II}, \bar{J}_n^{II}, G_2, \nu_2), \quad \bar{F}_s^I = F_s(h_1, \bar{Q}_s^I, G_1, \nu_1) = \frac{1}{\gamma_s \bar{Q}_s^I G_1} \{ (1 - 2\nu_1) \operatorname{sh}(\gamma_s h_1) \operatorname{ch}(\gamma_s h_1) - \gamma_s h_1 \} \\
\bar{F}_s^I &= F'_s(h_1, \bar{Q}_s^I, G_1, \nu_1) = \frac{1}{\gamma_s \bar{Q}_s^I G_1} \{ (1 - 2\nu_1) \operatorname{sh}(\gamma_s h_1) \operatorname{ch}(\gamma_s h_1) + \gamma_s h_1 \}, \quad \bar{F}_s^{II} = F_s(h_2, \bar{Q}_s^{II}, G_2, \nu_2) \\
\bar{J}_s^I &= \frac{2(1 - \nu_1) \operatorname{ch}^2(\gamma_s h_1)}{\gamma_s \bar{Q}_s^I G_1}, \quad \bar{J}_s^I = \frac{2(1 - \nu_1) \operatorname{sh}^2(\gamma_s h_1)}{\gamma_s \bar{Q}_s^I G_1}, \quad \bar{J}_s^{II} = \frac{2(1 - \nu_2) \operatorname{ch}^2(\gamma_s h_2)}{\gamma_s \bar{Q}_s^{II} G_2} \\
D_s &= \frac{2}{\gamma_s J_0(\gamma_s a)} \left(\frac{\bar{C}_0^I}{G_1} + \frac{\bar{C}_0^I}{G_1} - \frac{\bar{C}_0^{II}}{G_2} - \frac{\bar{C}_0^{II}}{G_2} \right), \quad \bar{U}_s^I = \frac{2(1 - \nu_1) \operatorname{sh}^2(\gamma_s h_1)}{\bar{Q}_s^I G_1}, \quad \bar{U}_s^I = \frac{2(1 - \nu_1) \operatorname{ch}^2(\gamma_s h_1)}{\bar{Q}_s^I G_1} \\
\bar{U}_s^{II} &= \frac{2(1 - \nu_2) \operatorname{sh}^2(\gamma_s h_2)}{\bar{Q}_s^{II} G_2}, \quad \bar{W}_s^I = \gamma_s \times F_s(h_1, \bar{Q}_s^I, G_1, \nu_1), \quad \bar{W}_s^I = \gamma_s \times F'_s(h_1, \bar{Q}_s^I, G_1, \nu_1) \\
\bar{W}_s^{II} &= \gamma_s \times F_s(h_2, \bar{Q}_s^{II}, G_2, \nu_2), \quad \bar{P}_{ns}^I = P_{ns}(\beta_n^I, \bar{J}_n^I, G_1, \nu_1) = \frac{4(-1)^n \gamma_s I_a^2}{\bar{J}_n^I a J_0(\gamma_s a) (\gamma_s^2 + \beta_n^I)^2 G_1} \left(\nu_1 - 1 + \frac{\beta_n^I}{\gamma_s^2 + \beta_n^I} \right) \\
\bar{P}_{ns}^I &= P_{ns}(\beta_n^I, \bar{J}_n^I, G_1, \nu_1), \quad \bar{P}_{ns}^{II} = P_{ns}(\beta_n^{II}, \bar{J}_n^{II}, G_2, \nu_2), \quad G_1 = \frac{E_1}{1 + \nu_1}, \quad G_2 = \frac{E_2}{1 + \nu_2}
\end{aligned}$$

数値計算において級数の項数を N とし、式(13)の $12N$ 元の連立方程式を解くことにより未定係数 $\bar{A}_n^I, \bar{C}_s^I, \dots, \bar{A}_n^{II}$ および $\bar{C}_s^{II}$ が決定され、式(12)より $\bar{A}_0^I, \bar{C}_0^I, \dots, \bar{A}_0^{II}$ および $\bar{C}_0^{II}$ が決定される。決定された係数を用いることにより各応力、各変位が求められる。

3. 解析結果

解析において特に特異性を考慮に入れていないので級数の項数が接着層内の応力分布に及ぼす影響を調べるために、数値計算にあたって一例として級数の項数を 100 および 120 とし計算した。各場合の応力に関する計算結果の差は実用上十分な精度であることを確認したので、以下の解析において級数の項数は 100 とし行った。図 3 は被着体と接着層の縦弾性係数の比 E_1/E_2 が接着層境界 ($z_2 = h_2$) の応力分布に及ぼす影響を示す。 E_1/E_2 を 1, 3, 40, 60, ∞ とした。なお $E_1/E_2 = \infty$ すなわち被着体が相対的に剛体とみなせる場合には、接着層の境界条件を次のようにおいて解析を行った。

$$\left. \begin{aligned} r = a : \sigma_r^{II} = \tau_{rz}^{II} = 0 \\ z_2 = \pm h_2 : u^{II} = 0, \quad \frac{\partial u^{II}}{\partial r} = 0 \\ \int_0^a 2\pi r (\sigma_z^{II})_{z_2=h_2} dr = \int_0^a 2\pi r F(r) dr \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

被着体の上端面 ($z_1 = h_1$) には一様分布の引張荷重 (図

1 において $r \leq a$ で $F(r)$ は一定) が作用するものとした。縦軸は接着層境界の平均垂直応力 σ_{zm} に対する垂直応力 σ_z の比 σ_z/σ_{zm} およびせん断応力 τ_{rz} の比 τ_{rz}/σ_{zm} を、横軸は被着体および接着層の半径 a に対する中心からの距離の比 r/a を表す。 σ_z の分布は E_1/E_2 が 1 に近づくほど一様化する。また E_1/E_2 が大きくなると $r/a = 1.0$ 付近での応力が増大する。 τ_{rz} の分布も E_1/E_2 が大きくなるにつれて $r/a = 1.0$ 付近での応力が高くなっている。 E_1/E_2 が 40, 60, ∞ の場合は σ_z お

図 3 縦弾性係数の比が接着層境界の応力分布に及ぼす影響

よび τ_{zr} の分布ともほとんど差異が認められなかった。すなわち、このモデルにおいては E_1/E_2 が 40 以上になると被着体を相対的に剛体とみなせると考えられる。

図 4 は被着体と接着層のポアソン比の比 ν_1/ν_2 が接着層境界 ($z_2=h_2$) の応力分布に及ぼす影響を示す。 ν_1/ν_2 を 1.00, 0.86, 0.75 とした。 σ_z の分布は ν_1/ν_2 が 1.00 に近づくほど $r/a=1.0$ 付近での変化が小さい。 τ_{zr} の分布は ν_1/ν_2 が 1.00 に近づくほど $r/a=1.0$ 付近での応力が低くなっている。

図 5 は接着層の厚さが接着層境界 ($z_2=h_2$) の応力分布に及ぼす影響を示す。被着体の高さ $2h_1$ を一定とし接着層の厚さ $2h_2$ に対する $2h_1$ の比 h_1/h_2 を 5, 10, 20 および 100 とした。 h_1/h_2 が 20 および 100 の場合は σ_z および τ_{zr} の分布とも差異はほとんどなかった。 σ_z の分布は h_1/h_2 が大きくなるほど一様化し、 τ_{zr} は小さくなること示されている。

図 6 は被着体の上端面 ($z_1=h_1$) に作用する引張荷重の荷重分布が接着層境界 ($z_2=h_2$) の応力分布に及ぼす影響を示す。接着層の厚さ $2h_2$ を一定とし、まず h_1/h_2 が 5 のときに引張荷重の荷重分布 $F(r)$ が上端面全域 $[(c/a)^2=1.0]$ に一様に作用する場合と $(c/a)^2=0.1$ の範囲に一様に作用する場合について計算を行った。 σ_z の分布には荷重分布の影響が明らかに現れているが、 τ_{zr} の分布に及ぼす荷重分布の影響は少ない。次に h_1/h_2 が 10 の場合について同様の計算を行ったところ、 $(c/a)^2=1.0$ の場合と $(c/a)^2=0.1$ の場合の σ_z および τ_{zr} の分布とも差異はほとんどなかった。このことより、このモデルにおいては h_1/h_2 が 10 以上になると荷重分布 $F(r)$ が接着層境界の応力分布に及ぼす影響は

少ないと考えられる。

図 7 は本解析結果と三次元有限要素法解析⁽¹²⁾ による接着層境界付近 ($z_2/h_2=0.92$) および接着層中央面付近 ($z_2/h_2=0.17$) の応力分布の比較を示す。三次元有限要素法解析による結果と本解析結果は σ_z および τ_{zr} の分布ともかなりよく一致している。

4. 結 言

本研究は接着継手の体系的な強度設計法の確立に寄与するために接着継手の基本的一例である被着体が中実円柱の突合せ接着継手に引張荷重が作用する場合の接着層境界の応力分布に関して検討した結果が得られた。

$$\left[z_2=h_2, h_1/a=0.2, E_1/E_2=40 \right. \\ \left. \nu_1/\nu_2=1.0, r \leq a \text{ で } F(r) \text{ は一定} \right]$$

図 5 接着層の厚さが接着層境界の応力分布に及ぼす影響

$$\left[z_2=h_2, h_1/h_2=10, h_1/a=0.2 \right. \\ \left. E_1/E_2=40, r \leq a \text{ で } F(r) \text{ は一定} \right]$$

図 4 ポアソン比の比が接着層境界の応力分布に及ぼす影響

$$\left[z_2=h_2, h_1/h_2=5, h_2/a=0.1 \right. \\ \left. E_1/E_2=65.6, \nu_1/\nu_2=0.81 \right]$$

図 6 荷重分布が接着層境界の応力分布に及ぼす影響

図 7 三次元有限要素法解析⁽¹²⁾との比較

(1) 中実円柱どうしの突合せ接着継手の接着層境界の応力分布を被着体および接着層を有限円柱にモデル化し、被着体の弾性を考慮した弾性三体問題として軸対称三次元弾性論により解析する方法を示した。

(2) (1)の方法を用いて接着層境界の応力分布を解析し、被着体と接着層の縦弾性係数の比、ポアソン比の比、接着層の厚さおよび荷重分布が接着層境界の

応力分布に及ぼす影響を数値的に明らかにした。

(3) 接着層内の応力分布に関し、有限要素法による結果と本解析結果とを比較したところ、両結果はかなりよく一致することが示された。

文 献

- (1) 鈴木, 機論, 50-449, A (昭59), 67.
- (2) 辻・島田, 機論, 30-218 (昭39), 1192.
- (3) Lubkin, J. L., *J. Appl. Mech.*, 24-2 (1957), 255.
- (4) Renton, W. J. and Vinson, J. R., *J. Appl. Mech.*, 44 (1977), 101.
- (5) Kaplevatsky, Y. and Raevsky, V., *J. Adhesion*, 6 (1976), 65.
- (6) 鈴木, 機論, 50-445, A (昭59), 1341.
- (7) Wah, T., *Int. J. Mech. Sci.*, 18 (1976), 223.
- (8) 永弘・能野, 機論, 50-452, A (昭59), 709.
- (9) 辻・島田, 機論, 29-203 (昭38), 1132.
- (10) 沢・ほか2名, 機論, 52-476, A (昭61), 919.
- (11) 沢・ほか3名, 機論, No. 863-1 (昭61-7), 20.
- (12) Alwar, R. S. and Nagaraja, Y. R., *J. Adhesion*, 7 (1976), 279.
- (13) Adams, R. D., Coppedale, J. and Peppiatt, N. A., *J. Strain Analysis*, 13 (1978), 1.
- (14) Lindsey, G. H., *J. Appl. Phys.*, 38-12 (1967), 4843.
- (15) 杉林・池上・白鳥, 接着協会誌, 17-2 (昭56), 50.
- (16) 杉林・池上・白鳥, 接着協会誌, 17-4 (昭56), 136.
- (17) 坂田・磯井, 精密機械, 49-12 (昭58), 13.
- (18) 斎藤, 機論, 18-68 (昭27), 21.
- (19) 斎藤, 機論, 20-91 (昭29), 185.