だ円き裂群干渉問題の交代繰返し法による解析*

西岡 俊久**, 古谷 康文***, 佐野 幸雄**

An Alternating Method for Analysis of a Group of Interacting
Elliptical Cracks in an Infinite Solid

Toshihisa NISHIOKA, Yasufumi FURUTANI, and Yukio SANO

An efficient alternating method is developed for the analysis of a group of interacting elliptical cracks in an infinite solid. In this alternating method an analytical solution for an elliptical crack in an infinite solid is used. To save computational time, the geometrical symmetries of crack shapes and locations are effectively utilized in conjunction with the symmetry of the analytical solution with respect to the cartesian coordinate system. Parametric studies on the interaction behavior of multiple coplanar elliptical cracks are made for several example problems. The stress intensity factors for those problems are determined efficiently and accurately by the present alternating method.

Key Words: Elasticity, Multiple Elliptical Cracks, Alternating Method, Stress Intensity Factor, Analytical Solution, Interaction Behavior

1. 緒 言

破壊力学は、現在種々の機器・構造物の安全設計に盛んに用いられている。その有効性は機械工学を初め、原子力工学、船舶工学など多くの分野で認識されている。一般に、三次元構造物中の実際のき裂はだ円き裂として近似されることが多い⁽¹⁾。そのような構造物中のき裂の成長や不安定破壊の信頼のおける予測には精度のよい応力拡大係数の評価が必要である。複数のき裂が近接して存在する場合、干渉による効果が生じる。このため各き裂が単独で存在する場合の解は非安全側の評価を与えることになる。したがって複数のだ円き裂が干渉している場合の精密な解析が必要とされる。

無限体中の 1 個のだ円き裂の任意の荷重に対する一般解の完全な形は Nishioka・Atluri⁽²⁾ によって導かれた。さらにこの一般解と有限要素法を組合せた交代繰返し法 (Alternating Method) が開発され、有限体中の単数および複数だ円き裂問題について経済的で高精度の解析がなされた^{(2)~(5)}。

無限体中の複数き裂に対しては、上記の一般解のみを用いる交代繰返し法を前報⁽⁶⁾で示した。この方法では解析解のみを用いるので、通常の有限要素法や境界要素法と比べ、けた違いに少ない計算時間で厳密解に近い解が得られる。

しかし、だ円き裂が多数になった場合、上記の複数だ円き裂のための交代繰返し法においてすら、計算時間が増大する。本研究では、き裂の形状および配置の対称性や解析解の対称性などを利用して、さらに計算時間を大幅に減少させる方法を考案した。これにより、だ円き裂の個数や形状、配置を系統的に変化させたときのパラメトリックな解析を行うことが実際的に可能になった。数値解析例として、同一平面上の 2~5 個のだ円き裂の干渉問題を取扱った。

2. 無限体中単数だ円き裂の一般解について

簡便のため、ここでは垂直荷重のみが作用する場合のモード I 形の解についてのみ述べる。モード II と III を含む混合形の解については文献(2)を参照されたい。

だ円き裂の中心に原点を持つ直交デカルト座標 (x_1, x_2, x_3) を考える。だ円き裂は x_1 - x_2 面内にあるものとする。だ円き裂縁は次式で表される。

* 昭和 61 年 11 月 25 日 第 941 回講演会において講演、原稿受付 昭和 61 年 5 月 26 日。

** 正員、神戸商船大学 (〒658 神戸市東灘区深江南町 5-1-1)。

*** 神戸商船大学大学院。

$$(x_1/a_1)^2 + (x_2/a_2)^2 = 1, x_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

だ円き裂面に作用する垂直荷重分布は次式のように級数展開できるものとする。

$$\sigma_{33}^{(0)} = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^M \sum_{n=0}^N A_{3,3-n,n}^{(i,j)} x_1^{2m-2n+i} x_2^{2n-j} \dots\dots\dots (2)$$

ここに $A_{3,3-n,n}^{(i,j)}$ は未定係数であり、 i および j はそれぞれ、問題の対称性を示すパラメータである。 M は級数の次数に関連したパラメータであり任意の整数である。 N を級数の項数として、式(2)をマトリックス表示すれば、

$$\sigma_{33}^{(0)} = \{L\}_{1 \times N}^T \{A\}_{N \times 1} \dots\dots\dots (3)$$

となる。

解析解を与える調和応力関数 f_3 はポテンシャル関数 F_{mn} を用いて次のように表すことができる。

$$f_3 = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^M \sum_{n=0}^N C_{3,k-l,l}^{(i,j)} F_{2k-2l+i, 2l+j} \dots\dots\dots (4)$$

ここに

$$F_{2k-2l+i, 2l+j} = \frac{\partial^{2k+i+j}}{\partial x_1^{2k-2l+i} \partial x_2^{2l+j}} \times \left\{ \int_{s_3}^{\infty} [\omega(s)]^{2k+i+j+1} \frac{ds}{\sqrt{Q(s)}} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\omega(s) = 1 - \left(\frac{x_1^2}{a_1^2 + s} \right) - \left(\frac{x_2^2}{a_2^2 + s} \right) - \left(\frac{x_3^2}{s} \right) \dots\dots\dots (6)$$

$$Q(s) = s(s+a_1^2)(s+a_2^2) \dots\dots\dots (7)$$

ここで $C_{3,k-l,l}^{(i,j)}$ は未定係数である。だ円体座標 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) は式(6)の右辺を零とした三次方程式の根として決定される。

応力 σ_{ij} は調和応力関数 f_3 を用いて、

$$\sigma_{11} = 2\mu(f_{3,11} + 2\nu f_{3,22} + x_3 f_{3,311}) \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

$$\sigma_{22} = 2\mu(f_{3,22} + 2\nu f_{3,11} + x_3 f_{3,322}) \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

$$\sigma_{12} = 2\mu(f_{3,12} - 2\nu f_{3,12} + x_3 f_{3,312}) \dots\dots\dots (8 \cdot c)$$

$$\sigma_{33} = 2\mu(-f_{3,33} + x_3 f_{3,333}) \dots\dots\dots (8 \cdot d)$$

$$\sigma_{31} = 2\mu x_3 f_{3,331} \dots\dots\dots (8 \cdot e)$$

$$\sigma_{32} = 2\mu x_3 f_{3,332} \dots\dots\dots (8 \cdot f)$$

で表される。ここに μ, ν はそれぞれ横弾性係数、ポアソン比を表す。簡便のため式(8)で表される応力をマトリックス表示する。

$$\{\sigma\}_{\sigma \times 1} = [P]_{\sigma \times N} \{C\}_{N \times 1} \dots\dots\dots (9)$$

ここに $[P]$ は座標 (x_1, x_2, x_3) の関数であり、式(4)、(5)を式(8)に代入して求められる。

き裂面上の境界条件を満足することによって未定係数 A と C の間の関係が次のように得られる⁽²⁾。

$$\{A\}_{N \times 1} = [P]_{N \times N} \{C\}_{N \times 1} \dots\dots\dots (10)$$

与えられた荷重に対し、係数 $\{A\}$ が決まり、式(10)を解くことにより係数 $\{C\}$ を決定することができる。

だ円き裂縁の応力拡大係数の分布は係数 $\{C\}$ より次式のように決定できる。

$$K_I = 8\mu \left(\frac{\pi}{a_1 a_2} \right)^{1/2} D^{1/4} \times \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^N (-2)^{2k+i+j} (2k+i+j+1)! \times \frac{1}{a_1 a_2} \left(\frac{\cos \theta}{a_1} \right)^{2k-2l+i} \left(\frac{\sin \theta}{a_2} \right)^{2l+j} C_{3,k-l,l}^{(i,j)} \dots\dots\dots (11)$$

$$D = a_1^2 \sin^2 \theta + a_2^2 \cos^2 \theta \dots\dots\dots (12)$$

ここで θ はだ円角度で、 x_1 軸より測られる。

3. 複数だ円き裂解析のための交代繰返し法

無限体中の複数だ円き裂の解析に対して、交代繰返し法に必要な基本解は2章で述べた単数だ円き裂の解析解のみである。複数き裂面上の応力自由条件を満たすためには、他のき裂の存在のために生じる残留応力を打ち消す必要がある。この残留応力分布は、各き裂が単独で存在するときの解析解より直接求めることができる。

無限体中複数き裂解析のための交代繰返し法の各手順をフローチャートにして図1に示す。各ステップについて以下に述べる。

[ステップ1] 各き裂面上の応力分布を記述する。すなわち、各き裂に対して式(3)の係数 $\{A\}$ を決定する。

[ステップ2] 調和応力関数 f_3 を決定する。すな

図1 複数だ円き裂の交代繰返し法の流れ図

わち係数 $\{C\}$ を式(10)より決定する。

[ステップ3] 応力拡大係数の現在の繰返し寄与分を式(11)より求める。

[ステップ4] 各き裂を単独で存在するだ円き裂とみなし、他のき裂面上の応力分布を式(8)で与えられる解析解で計算する。全き裂に対して同様の計算を行う。したがってこの時点では、各き裂面上で他のき裂の存在のために生じる残留応力が分布することになる。

[ステップ5] 各き裂面上の残留応力の大きさを調べる。もし全き裂について残留応力が十分小さく、誤差の許容範囲内であれば計算を終了する。逆に、一つのき裂に対しても残留応力が許容範囲外であれば次のステップに進む。

[ステップ6] 各き裂面上の応力自由条件 ($\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$) を満たすため、上記の残留応力と同じ大きさで逆向きの荷重 σ_{33}^0 を各き裂面に加える。

[ステップ7] 各き裂面上の上記の荷重に対して、式(2)の最小二乗フィッティングより次のように係数 $\{A\}$ を決定する。

$$\{A\}_n = [H]_n^{-1} \{R\}_n \quad (13)$$

ここに

$$[H]_n = \int_{S_{cn}} \{L\} \{L\}^T dS \quad (14)$$

$$\{R\}_n = \int_{S_{cn}} \{L\} \sigma_{33}^0 dS \quad (15)$$

であり、 S_{cn} は第 n 番めのき裂が占める領域である。

上記のステップ2からステップ7までを、全き裂面上での残留応力分布が許容範囲内になるまで繰返す。最終的な解は各繰返しの寄与分を加算して求められる。

なお式(14)、(15)を評価するため、以下に述べる数値積分法を用いた。

$$I = \int_{-a_1}^{+a_1} \int_{-a_2\sqrt{1-x_1^2/a_1^2}}^{+a_2\sqrt{1-x_1^2/a_1^2}} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \quad (16)$$

変数変換 $x_1 = a_1 \xi$ および $x_2 = a_2 \sqrt{1-\xi^2} \eta$ を用いて式(16)は次のように書き換えられる。

$$I = a_1 a_2 \int_{-1}^{+1} \left[\int_{-1}^{+1} f(a_1 \xi, a_2 \sqrt{1-\xi^2} \eta) d\eta \right] \times \sqrt{1-\xi^2} d\xi \quad (17)$$

ここで η 方向には通常のガウス積分を用い、 ξ 方向には $\sqrt{1-\xi^2}$ を重み関数とする積分法⁽⁷⁾を用いた。積分点 ξ_j と重み w_j は次式で与えられる。

$$\xi_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j=1, 2, \dots, n \quad (18)$$

$$w_j = \frac{\pi}{n+1} \sin^2\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j=1, 2, \dots, n \quad (19)$$

本報では 8×8 の積分点を用いた。

4. 多数だ円き裂干渉問題の解析アルゴリズム

説明のために図2に示すような等大4個だ円き裂干渉問題を考える。このうち、2個のき裂が互いに干渉を及ぼし合う組合せは12組であることが容易にわかる。一般に N 個の場合、 N 個から2個を取り出す組合せ、すなわち $N(N-1)$ 組となる。

交代繰返し法の流れ図のステップ4において、例えば、No.1き裂によるNo.3上の残留応力分布はNo.2によるNo.4上のものと等価であり、またNo.3によるNo.1のものは対称であることがわかる。このような干渉の組合せの等価性や対称性を利用すれば計算時間を大幅に縮少することができる。

このためには残留応力 σ_{33} の基本的性質について検討する必要がある。き裂が存在する面 ($x_3=0$) で応力 σ_{33} は式(8・d)より次式で表される。

$$\sigma_{33}^{(0)} = -2\mu f_{3,33} \quad (20)$$

詳細は付録に譲るが、 $f_{3,33}$ の性質から残留応力は x_1, x_2 の多項式で表されることがわかる。また多項式の各項が奇関数か偶関数であるかは、式(4)で用いた対称性を表すパラメータ i および j で決定されることがわかる。

干渉の等価性および対称性を利用するために、ここでは次の手順に従い組み分けを行った。

(1) 全部のうちから、順次2個のき裂を取り出す。2個のき裂間距離・方向および両き裂のアスペクト比を調べる。初めて出てくる関係には順次1, 2, 3, ...と正の番号を付ける。

(2) 2個のき裂の距離・方向およびアスペクト比が前に出てきた組の関係と等価であれば、その組の番号をつける。

(3) 2個のき裂の距離およびアスペクト比が前に出てきた組のものと同じで、方向のみが異なるとき、

表1 等大4個だ円き裂の分類結果

	No. 1	No. 2	No. 3	No. 4
No. 1		1	2	3
No. 2	-1		-3	2
No. 3	-2	-3		1
No. 4	-3	-2	-1

図2 等大4個だ円き裂

すなわち対称となっているとき、その組の負の番号を付ける。

図2に示した等大4個き裂の分類は表1のような結果になる。この場合基本的には三つの組合せについて残留応力分布を計算すればよいことになる。正の番号の組については従来どおり、式(8・d)より残留応力分布が計算され、同じ番号の組については残留応力分布の計算が省略できる。

マイナスで表されたき裂の組については、干渉の対称性を利用して実際の残留応力分布の計算を省略できる。この場合、残留応力の各項が奇関数か偶関数かを対称性を示すパラメータ i および j により判定して、次の処理を行う。

(1) 偶関数の項であれば、図3(b)に示すように、対称の積分点で、正の組の項をそのまま用いる。

(2) 奇関数の項であれば、図3(a)に示すように、対称の積分点で、正の組の項にマイナスを付けて用いる。図3には x_1 方向に関する対称性を述べたが、 x_2 方向についても同様の処理を行う。

以上に述べた理論より、新方法では等間隔に配置された N 個等大き裂に対して、 $(N-1)$ 組の基本的組の計算が必要となる。これに対して、旧方法では既に述べたように $N(N-1)$ 組必要であった。したがって新方法によれば計算時間が $1/N$ に減少されることになる。

図3 対称性の利用

5. 解析結果および考察

本論文での解析例はすべて、き裂が同一平面上にあり遠方でき裂面に垂直な一様引張応力 σ_0 が作用しているものとする。重ね合せの原理よりこの問題は各き裂面に一様圧力が作用する問題と等価である。応力拡大係数の解析結果は次式のように無次元化して表す。

$$F_m(\theta) = \frac{K_I(\theta)}{\left\{ \frac{\sigma_0}{E(k)} \sqrt{\frac{\pi a_2}{a_1} (a_1^2 \sin^2 \theta + a_2^2 \cos^2 \theta)^{1/4}} \right\}} \dots\dots\dots (21)$$

ここに $E(k)$ は第二種完全だ円積分である。上式の分母は無限体中に存在する単数だ円き裂の応力拡大係数分布である。したがって係数 F_m は干渉効果を表す尺度と考えることができる。

図4に示すようにだ円き裂の形状を表すアスペクト比を a_2/a_1 とし、隣り合う2個のだ円き裂の近接度を表すパラメータ λ を $2a_2/d$ で表す。 $\lambda=1$ のとき、2個のき裂は接し、 λ が小さいほど、き裂間の距離が大きくなる。本研究では $\lambda=0.8$ としてき裂が等間隔の場合を解析した。

5.1 直線上に並んだ複数等大だ円き裂 図5に2~5個き裂干渉問題において干渉係数が最大となる点を示し、各々の点を $A_2 \sim A_5$ とした。またき裂の全周での干渉係数を示す場合、だ円き裂が左右対称であることよりき裂の半分、すなわちだ円角がそれぞれ 270° から 90° までの範囲において示した。

交代繰返し法では解の収束性を判定する必要がある

図4 だ円き裂アスペクト比と近接度 λ

図5 直線状に並んだ等大だ円き裂

が、本解析では先に述べたようにき裂面上の残留応力(図1, ステップ5参照)が十分小さくなるまで、繰返し計算が行われた。残留応力の代わりに応力拡大係数の変化をモニターすることも考えられる。図6に等大4個き裂干渉問題に対する繰返し計算中の応力拡大係数の変化を示す。対称性からNo.1とNo.2き裂の干渉係数を示した。図6で、各き裂の全周で干渉係数が単調に最終解に近づく様子が見られる。特に第4回めと第5回めの解は図の上では完全に重なっていて収束性が良いことがわかる。

図7, 8にアスペクト比が1/16.0, 2.0の場合について、干渉係数の変化を1~5個き裂について示す。き裂の数の増加に伴い干渉係数がき裂全周にわたり大きくなることわかる。またアスペクト比が小さい場合、すなわちだ円き裂が扁平な場合、干渉係数の変化が大きいことがわかる。

図9に等大4個だ円き裂の場合について、干渉係数の変化をアスペクト比を変えて示した。図9からも、

アスペクト比が小さくなるにつれて大きい干渉が起こることがわかる。いずれの場合も最大の干渉は点A₄(図5参照)で生じている。

最大の干渉が生じる点A₂~A₅における干渉係数のアスペクト比およびき裂個数の影響を図10に示す。同じ近接度 $\lambda=0.8$ に対し、アスペクト比が大きくなる

図8 干渉係数のき裂数による変化 ($a_2/a_1=2.0$)

図6 交代繰返し法による応力拡大係数の収束状況

図9 干渉係数のアスペクト比による変化

図7 干渉係数のき裂数による変化 ($a_2/a_1=1/16.0$)

図10 最大干渉係数のき裂数による変化

図 11 格子状に並んだ等大4個だ円き裂の干渉係数のアスペクト比による変化

図 13 干渉係数のき裂数およびだ円角による変化 ($a_2/a_1=0.8$)

図 12 干渉係数のき裂数およびだ円角による変化 ($a_2/a_1=0.25$)

図 14 非等大3個だ円き裂の干渉係数のアスペクト比による変化

につれて、干渉係数は小さくなり、1.0に漸近する。逆にアスペクト比が零になった極限の場合、三次元だ円き裂問題は二次元平面ひずみ問題と等価になるが、この場合石田⁽⁸⁾によって高精度の解が得られている。図10に本方法による三次元解の平面ひずみ状態への外そう状況を示し、石田の解と比較した。本方法による外そう値は2～5個き裂に対して、いずれも0.5%以内で一致している。

5.2 格子状に並んだ複数等大だ円き裂 次に図2に示したような配置の等大4個だ円き裂について考える。この場合近接度は x_1 および x_2 の両方向に対して $\lambda=0.8$ とした。

図11に C_4 点(図11上部参照)における干渉係数のアスペクト比による変化を示す。比較のため縦方向に並んだ等大2個き裂の干渉係数も図11に示した。図11の横軸でアスペクト比1.0の左右で逆数を取った。したがって $a_2/a_1 < 1.0$ のところでは横に細長く、 $a_1/a_2 < 1.0$ のところでは縦に細長いだ円き裂形状となる。 $a_2/a_1 = 0$ のときは、先に述べたように、三次元解は平

面ひずみ解と等価になり、両解析結果は一致する。また $a_1/a_2 = 0$ のときは、 C_4 点は線状欠陥の先端となり、 $\lambda=0.8$ に対しては、干渉効果が生じないことがわかる。上記の両極限のアスペクト比以外では、等大2個き裂と比較して、つねに等大4個き裂の干渉係数が大きくなる。その差はNo.3とNo.4き裂の存在による干渉効果と考えることができる。

図12, 13にアスペクト比が0.25および0.8の場合について、干渉係数のき裂全周にわたる変化を等大4個き裂と等大2個き裂を比較して示す。アスペクト比が小さい場合、き裂全周にわたって4個き裂と2個き裂の干渉係数の変化の差が小さくなることがわかる。逆にアスペクト比が1.0に近づくにつれて、図13に見られるように、No.3およびNo.4からのき裂の干渉効果が $\theta=0^\circ$ 付近に顕著に見られるようになる。完全な円形き裂の場合、対称性により $\theta=90^\circ$ と $\theta=0^\circ$

に見られる干渉係数のピークは同じ高さになる。この傾向は図 12 と図 13 の比較からも見る事ができる。

5.3 非等大 3 個き裂 図 14 の上部に示すように直線状に等間隔で並んだ 3 個のだ円き裂のうち外側の 2 個のき裂の大きさが等しく、中心のき裂の短径が小さい場合を考える。ここでは、大きいほうのだ円き裂の形状は、小さいほうと比較して、常に $a_1=c_1=1.25b_1$, $a_2=b_2=c_2$ として解析した。この場合、旧方法では干渉関係の組合せは 6 組であるが、4 章で述べた新方法では対称性を利用して基本的な 3 組のみについて残留応力分布が計算される。したがってこの場合、新方法では計算時間が半分になる。それぞれ他のき裂に最も近い点 A_3 および点 B_3 における干渉係数の変化をそれぞれのアスペクト比 a_2/a_1 , b_2/b_1 に対して図 14 に示す。比較のため小さいほうのき裂と同じ大きさの等大 3 個き裂の結果も図 14 に示した。図 14 に見られるように、小さなき裂のほうがより大きな干渉効果を受ける。逆に大きいほうのき裂は小さいき裂からより小さい干渉効果を受ける。これは前報で示した非等大 2 個き裂と同様の結果である。また $b_2/b_1=0$ の場合、 A_3 および B_3 点の干渉係数はいずれも平面ひずみにおけるそれぞれの値に収束していく様子が見られる。

6. 結 言

本論文では、無限体中のだ円き裂群干渉問題のパラメトリックな解析に有用な交代繰返し法を示した。ここでは、き裂の形状および配置の等価性および対称性とだ円き裂の一般解の対称性を利用して効果的に計算する方法を考案した。数値解析例により、本方法によって高精度な応力拡大係数の干渉係数が得られることを示した。

本研究で解析した例は同一平面上に存在する複数だ円き裂がモード I 形の変形をする場合である。き裂が同一平面上にない場合やせん断力が作用する混合モード形の問題に対しても本論文で示したような交代繰返し法は有効であると考えられる。

付 録

f_3 の x_3 に関する二階の偏微分は一般に次式で表される。

$$f_{3,33} = \sum_k \sum_l C_{3,k,l} F_{k,l,33} \quad \cdots \cdots (22)$$

ここで、式(4)とのパラメータの対応は $2k-2l+j \rightarrow k$ および $2l+j \rightarrow l$ ある。次にポテンシャル関数

の偏微分を統一的に扱うため、 x_a に関する j 階の偏微分を意味する記号 ∂_a^j を導入する。これを用いて、

$$F_{k,l,33} = \int_{\xi_3}^{\infty} \partial_1^k \partial_2^l \partial_3^2 \omega^{k+l+1} \frac{ds}{\sqrt{Q(s)}} + F_{k,l,33}^0 \quad \cdots \cdots (23)$$

$$\text{ここに、} F_{k,l,33}^0 = (k+l+1)! \frac{x_1^k x_2^l x_3^2}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}$$

$$\times [\rho_1^k \rho_2^l \rho_3^2 \sqrt{Q(s)}]_{s=\xi_3} \quad \cdots \cdots (24)$$

$$\rho_a = -2/(a_a^2 + s) \quad (a=1, 2, 3) \quad \cdots \cdots (25)$$

ここで $x_3=0$ 面上で $(x_1/a_1)^2 + (x_2/a_2)^2 > 1$ を考えると $F_{k,l,33}^0=0$ となり、式(23)右辺第 1 項のみが残留応力分布と関係する。ここで ω^n (n はここでは $k+l+1$) を二項定理を用いて級数展開すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} \omega^n &= \left[1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 + s} \right]^n \\ &= \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^p \sum_{r=0}^q (-1)^p \frac{n!}{(n-p)!(p-q)!(q-r)!r!} \\ &\quad \times \left(\frac{x_1^2}{a_1^2 + s} \right)^{p-q} \left(\frac{x_2^2}{a_2^2 + s} \right)^{q-r} \left(\frac{x_3^2}{a_3^2 + s} \right)^r \quad \cdots \cdots (26) \end{aligned}$$

これを式(23)に用いると次式が得られる。

$$\begin{aligned} F_{k,l,33} &= (k+l+1)! \sum_{p=0}^{k+l+1} \sum_{q=0}^p \frac{2(-1)^p}{(k+l+1-p)!} \\ &\quad \times \frac{(2p-2q)! (2q-2)!}{(p-q)! (q-1)!} \frac{x_1^{2p-2q-k}}{(2p-2q-k)!} \\ &\quad \times \frac{x_2^{2q-2-l}}{(2q-2-l)!} J_{p-q,q-1,1}(\xi_3) \quad \cdots \cdots (27) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} J_{p-q,q-1,1}(\xi_3) &= \int_{\xi_3}^{\infty} \frac{ds}{(s+a_1^2)^{p-q}(s+a_2^2)^{q-1}(s+a_3^2)\sqrt{Q(s)}} \\ &\quad \cdots \cdots (28) \end{aligned}$$

である。式(4)と対応するパラメータを用いると、残留応力分布の x_1 および x_2 に関する次数はそれぞれ $2(p-q-k+l)-i$ および $2(q-l-1)-j$ となる。

文 献

- (1) 例えば、ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section III, App. G, (1977).
- (2) Nishioka, T. and Atluri, S. N., *Eng. Fract. Mech.*, 17-3 (1983), 267.
- (3) Nishioka, T. and Atluri, S. N., *Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol.*, 104-4 (1982), 299.
- (4) Nishioka, T. and Atluri, S. N., *AIAA J.*, 21-5 (1983) 749.
- (5) O'Donoghue, P. E., Nishioka, T. and Atluri, S. N., *Eng. Fract. Mech.*, 20-3 (1984), 545.
- (6) 西岡, O'Donoghue, P. E., Atluri, S. N., 機論, 51-462, A (昭 60), 342.
- (7) Ralston, A. and Robinowitz, P., *A First Course in Numerical Analysis*, (1965), 111, McGraw-Hill.
- (8) 石田, 機講論, No. 760-1, (昭 51-4), 25.