非連続き裂モデルに関する基礎的検討*

(一般的構成方程式とき裂パラメータ評価)

渡 辺 勝 彦**, 佐 藤 裕***

A Fundamental Study on Discontinuous Crack Model

(A General Constitutive Equation and Evaluations of Crack Parameters)

Katsuhiko WATANABE and Yutaka SATO

The discontinuous crack model is a model in which the discontinuities around a crack tip are taking into consideration as the first-order approximation and which can be thought of as the most generalized model of the Dugdale's. In this paper, fundamental investigations are made to let this model be a match for usual continuum crack model in its generality and applicability. The contents are as follows: (1) A general method to give the constitutive equation for the plane considering a discontinuity that conforms to a continuum without any contradiction is shown by introducing a strain-like quantity. (2) Finite element formulation for the discontinuous plane is shown by using plane elements. (3) Finite element analyses of an elastic-plastic crack and an elastic-creep crack are carried out, and the applicability of the model is discussed through the evaluations of crack parameters.

Key Words: Fracture, Discontinuous Crack Model, Constitutive Equation, Elastic-Plastic Crack, Elastic-Creep Crack, Crack Energy Density, *CTOD*

1. 緒 言

通常き裂問題も他の構造強度問題と同じく連続体モデルにより取扱われる。ところが、現実のき裂端近傍の状況を見ると、その変形状態は極めて複雑であり、連続体モデル化になじまないのが普通である。にもかかわらず、連続体モデルが多用されてきたのは、有限要素法等の解析法も含めてのこれに優る一般性、汎用性を有するモデルがほかに知られていなかったことにあると思われる。

ところで、き裂端における非連続性を第一近似的に表し、Dugdale モデルを最も一般化したものとして位置付けられる一つの非連続き裂モデルが先に提案され、そのき裂パラメータ評価における有用性が示された⁽¹⁾。著者らは、このき裂モデルは連続体モデルとともに今後き裂問題、特に非線形かつ非弾性のき裂問題を扱っていくための主要き裂モデルとなり得るものと考えており、本研究はこの観点より、この非連続き裂モデルをその一般性、汎用性において連続体モデルに劣らないものたらしめるための基礎的検討を行った。

のである。すなわち、まず非連続性を考える面の一般の構成方程式の与え方について検討し、連続体としての構成関係が与えられればそれがいかなるものであれ、常にそれに対応する形で与えることを可能とする考え方を示し、代表的な弾性、弾塑性、クリープ問題に対する具体的表示を与える。先の論文において弾塑性体を考える場合については、一部理論的不整合性は含むものの有効な方法として、一つの構成方程式の与え方を示したが⁽¹⁾、これにおいてはそこで見られたような理論的不整合性も解消される。続いて考える非連続き裂モデルの有限要素定式化を行い、さらに、弾性、弾塑性、弾性クリープき裂の有限要素解析を行って、新たにその存在が知られた非連続き裂モデルにおける径路独立積分⁽²⁾によるき裂エネルギー密度⁽³⁾⁻⁽⁵⁾の評価、および *CTOD* の評価を試み、非連続き裂モデルのき裂パラメータ評価モデルとしての基本的性質についての検討を行う。

2. 非連続き裂モデルとき裂パラメータ

非連続き裂モデルは、変形前のき裂材の状態(時刻 $t=0$)を示す図1(a)において、き裂を含むき裂端前方の $x_2=0$ の面とそれ以外の部分に考える領域を分け、き裂を含む面以外は通常の連続体と考え、き裂を

* 昭和61年11月26日 第941回講演会において講演、原稿受付 昭和61年5月26日。

** 正員、東京大学生産技術研究所(〒106 港区六本木7-22-1)。

*** 学生員、東京大学大学院。

含む面は変形後（時刻 $\tau=t$ ）においては図 1 (b), (c) に示すように引き伸ばされと考える（ただし図 1 (b) は引き伸ばされさらに現在のき裂前縁までき裂が進展した状態を示してある）モデルである⁽¹⁾。したがってき裂を含む面以外についての構成方程式は通常の応力，ひずみの間の関係として与えられるとすると，き裂を含む面について， $\llcorner \sigma_n \llcorner, \llcorner \delta_n \llcorner$ を図 1 (c) を参照して

$$\llcorner \sigma_n \llcorner = \llcorner \sigma_{22} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{12} \llcorner \dots\dots\dots (1)$$

$$\llcorner \delta_n \llcorner = \llcorner \delta_{22} \quad \delta_{23} \quad \delta_{21} \llcorner \dots\dots\dots (2)$$

とすると， $\llcorner \sigma_n \llcorner, \llcorner \delta_n \llcorner$ の間の関係として構成関係が与えられれば，実際の荷重履歴に従って解析が進められるき裂モデルとなる。なお，通常の連続体モデルは，この構成関係を変化させて $\delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{21} \rightarrow 0$ とするときの極限に相当する。

このモデルにおいては，き裂エネルギー密度⁽³⁾⁽⁴⁾は， $W_{\text{plane}}^{(3)(4)}$ をひずみエネルギー面密度として

$$W_{\text{plane}} = \int dW_{\text{plane}},$$

$$dW_{\text{plane}} = \llcorner \sigma_n \llcorner \{d\delta_n\} \dots\dots\dots (3)$$

とすると，き裂を含む面 ($x_2=0$) に分布する形で与えられ，図 1 (b) において

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, x_1, x_3) \\ = \int dW_{\text{plane}}(t, x_1, x_3) \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

によって与えられる。またき裂端開口変位 $CTOD$ は，き裂進展後も含めて，き裂面に分布する $\delta_{22}(t, x_1, x_3)$ により

$$CTOD(t) = \delta_{22}(t, x_f, x_f) \dots\dots\dots (5)$$

として与えられる。ただし， $(x_1, x_2, x_3) = (x_f, 0, x_f)$ は現在のき裂端前縁上の位置を示す。したがって適切な非連続面に対する構成関係が与えられれば，本モデルの解析を通じこれらパラメータはただちに評価される。

3. 非連続面の一般的構成方程式

非連続面の構成方程式としては $\llcorner \sigma_n \llcorner$ と $\llcorner \delta_n \llcorner$ の間の関係が与えられればよいわけであるが，その際

(a) TIME $\tau=0$

(b) TIME $\tau=t$

(c)

図 1 非連続き裂モデル

連続体として扱う部分の構成方程式をもとにして評価され，さらにそれに矛盾しない形で与えられることが望ましい。そこでここでは次のように考えることとする。

まず，簡単のため二次元的に示してあるが，図 2 (a) に示すような一点が応力 $\llcorner \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31} \quad \sigma_{12} \llcorner$ を受け図 2 (b) のように引き伸ばされ，対向面間に相対変位 δ_{ij} が生じると考える。ここで， δ_{ij} は x_i 軸に直交する対向面間の x_j 軸方向の相対変位を表すものとし，また図 2 (b) は最初の一点が有限な応力（一点であるのでそれに働く力としては零）を受け有限な大きさに引き伸ばされると考えたものであり，この状態においても加わる力としては零と考えている。このような状態に対する構成方程式としては応力と δ_{ij} の間の関係を与えればよいわけであるが，通常の連続体の構成方程式と対応させるには特性長さ h_{ij} を考え

$$\llcorner \bar{\epsilon}_{11} \quad \bar{\epsilon}_{22} \quad \bar{\epsilon}_{33} \quad \bar{\gamma}_{23} \quad \bar{\gamma}_{31} \quad \bar{\gamma}_{12} \llcorner = \llcorner \frac{\delta_{11}}{h_{11}} \quad \frac{\delta_{22}}{h_{22}} \quad \frac{\delta_{33}}{h_{33}} \quad \frac{\delta_{23}}{h_{23}} + \frac{\delta_{32}}{h_{32}} \quad \frac{\delta_{31}}{h_{31}} + \frac{\delta_{13}}{h_{13}} \quad \frac{\delta_{12}}{h_{12}} + \frac{\delta_{21}}{h_{21}} \llcorner \dots\dots (6)$$

なるひずみ相当量を定義して，このひずみ相当量と応力との間に通常の連続体モデルにおけるひずみと応力との関係が成り立つと考えるのが自然であろう。このとき h_{ij} をパラメータとして実際の応力， δ_{ij} 間の関係が成り立つよう調整することになる。

さて上のように考えると，図 1 の非連続面は $\delta_{11}, \delta_{33}, \delta_{32}, \delta_{31}, \delta_{13}, \delta_{12} \rightarrow 0$ とした極限に相当する。ただし図 1 (b) の状態においても非連続面において変位 $u_i(x_1, 0, x_3)$ は定義され，したがって面内ひずみ $\epsilon_{11} = \partial u_1 / \partial x_1$, $\epsilon_{33} = \partial u_3 /$

∂x_3 , $\gamma_{31} = \partial u_3 / \partial x_1 + \partial u_1 / \partial x_3$ および $\partial u_2 / \partial x_3$, $\partial u_2 / \partial x_1$ は存在するので, δ_{11} , δ_{33} , δ_{32} , δ_{31} , δ_{13} , $\delta_{12} \rightarrow 0$ の極限において

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{11}}{h_{11}} &= \bar{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\delta_{33}}{h_{33}} &= \bar{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\delta_{31}}{h_{31}} + \frac{\delta_{13}}{h_{13}} &= \bar{\gamma}_{31} = \gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, & \frac{\delta_{32}}{h_{32}} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, & \frac{\delta_{12}}{h_{12}} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

が成り立つと考え, したがって δ_{11} , δ_{33} , δ_{32} , δ_{31} , δ_{13} , $\delta_{12} \rightarrow 0$ に伴って h_{11} , h_{33} , h_{32} , h_{31} , h_{13} , $h_{12} \rightarrow 0$ となると考えるのが合理的であろう。そこでこのように考えると式(6)のひずみ相当量は

$$\llbracket \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \bar{\gamma}_{23} \quad \gamma_{31} \quad \bar{\gamma}_{12} \rrbracket = \llbracket \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial u_2}{h_{22}} \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad \frac{\partial u_3}{h_{23}} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{h_{21}} \rrbracket \quad (8)$$

となり, 考える非連続面の構成方程式はこれと応力との間の関係として連続体部分に用いるひずみと応力との関係を適用すればよいことになる。

先の論文で与えた構成関係は $\llbracket \sigma_n \rrbracket$, $\llbracket \delta_n \rrbracket$ の間の関係はそれらだけの間の関係として定まり, 一方降伏条件にはすべての応力成分が関与するという形であったので, 関係マトリックスの対称性が保持されるという有利さはあるものの, 一部理論的不整合性を含まざるを得なくなるものであったが⁽¹⁾, 以上のように考えるとき, いかなる問題に対する構成関係であれ, 連続体に対するものに準じる形でいっさいの矛盾なく定められる。次に代表的な場合として線形弾性, Mises 形の降伏条件, 結合流れ則に従う弾塑性, Mises 形のクリーブポテンシャルが存在する場合のクリーブに対する構成関係を具体的に与える。ただし以後においては

$$\llbracket \sigma_t \rrbracket = \llbracket \sigma_{11} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{31} \rrbracket \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\llbracket \varepsilon_t \rrbracket = \llbracket \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{31} \rrbracket \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\llbracket \varepsilon_n \rrbracket = \llbracket \varepsilon_{22} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{12} \rrbracket \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} \llbracket \bar{\varepsilon}_n \rrbracket &= \llbracket \bar{\varepsilon}_{22} \quad \bar{\gamma}_{23} \quad \bar{\gamma}_{12} \rrbracket \\ &= \llbracket \delta_n \rrbracket [h]^{-1} + \llbracket \partial u_n / \partial x \rrbracket \\ &= \llbracket \delta'_n \rrbracket [h]^{-1} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} I & O \\ O & h \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

と表すものとする。ここで

$$\llbracket \partial u_n / \partial x \rrbracket = \llbracket 0 \quad \partial u_2 / \partial x_3 \quad \partial u_2 / \partial x_1 \rrbracket,$$

図 2 負荷を受け引き伸ばされた一点

$$\begin{aligned} \llbracket \delta'_n \rrbracket &= \llbracket \delta_n \rrbracket + \llbracket \partial u_n / \partial x \rrbracket [h] \\ [h] &= \begin{bmatrix} h_{22} & 0 & 0 \\ 0 & h_{23} & 0 \\ 0 & 0 & h_{21} \end{bmatrix}, \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

線形弾性体 連続体に対する構成方程式が弾性マトリックス $[D^e]$ により

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{tt}^e & D_{tn}^e \\ D_{nt}^e & D_{nn}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_t^e \\ \varepsilon_n^e \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (15)$$

と与えられるとき, 非連続面のそれは

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{tt}^e & D_{tn}^e \\ D_{nt}^e & D_{nn}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_t^e \\ \varepsilon_n^e \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (16)$$

あるいは式(12), (13)の関係をを用いると

$$\begin{aligned} \{\sigma_t\} &= [D_{tt}^e] \{\varepsilon_t^e\} + [D_{tn}^e] [h^e]^{-1} \{\delta_n^e\} \\ &\quad + [D_{tn}^e] \{\partial u_n^e / \partial x\} \\ \{\sigma_n\} &= [D_{nt}^e] \{\varepsilon_t^e\} + [D_{nn}^e] [h^e]^{-1} \{\delta_n^e\} \\ &\quad + [D_{nn}^e] \{\partial u_n^e / \partial x\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (17)$$

により与えられる。ただし上付きの e は弾性挙動に対する量であることを表す。

弾塑性体 弾塑性体についても, 連続体に対する構成方程式が, 弾塑性マトリックス $[D^p]$ により

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_t \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{tt}^p & D_{tn}^p \\ D_{nt}^p & D_{nn}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_t^p \\ d\varepsilon_n^p \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (18)$$

で与えられるとき, 非連続面のそれは

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_t \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{tt}^p & D_{tn}^p \\ D_{nt}^p & D_{nn}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_t^p \\ d\varepsilon_n^p \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (19)$$

あるいは

$$\begin{aligned} \{d\sigma_t\} &= [D_{tt}^p] \{d\varepsilon_t^p\} \\ &\quad + [D_{tn}^p] [h^p]^{-1} \{d\delta_n^p\} + [D_{tn}^p] \{\partial du_n^p / \partial x\} \\ \{d\sigma_n\} &= [D_{nt}^p] \{d\varepsilon_t^p\} + [D_{nn}^p] [h^p]^{-1} \{d\delta_n^p\} \\ &\quad + [D_{nn}^p] \{\partial du_n^p / \partial x\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

で与えられる。ただし上付きの t は, 弾性, 塑性分を合わせた全体挙動に対する量であることを表している。

上のように全体挙動に対する $[h^i]$ を与えるときには通常の弾塑性マトリックス $[D^p]$ より直ちに式(20)のように与えられるが、弾性挙動に対する $[h^e]$ と塑性挙動に対する $[h^p]$ (塑性挙動に対する量には上付き p を付して表すものとする) をそれぞれ与える場合にはその構成方程式は次のように与えられる ($[h^e] = [h^p]$ の場合には上の場合に含まれる)。

降伏条件は連続体で用いられるのと同様に

$$f(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} = c \quad (21)$$

で与えられるものとしこの $f(\sigma_{ij})$ を塑性ポテンシャルとして塑性ひずみ相当量増分 $\perp d\bar{\varepsilon}_n^p \perp = \perp d\varepsilon_i^p \perp d\bar{\varepsilon}_n^p \perp$ を

$$\begin{aligned} \{d\bar{\varepsilon}_n^p\} &= [H^p]^{-1} \left\{ \frac{d\varepsilon_i^p}{d\delta_n^p} \right\} \\ &= \bar{c} \{ \partial f / \partial \sigma \} df \quad (22) \end{aligned}$$

のように与える。ここで $f(\sigma_{ij})$, $\bar{\sigma}$, c , $\bar{c}$ はそれぞれ Mises 形の降伏関数, 相当応力, 硬化のパラメータ, 比例定数である。次に $\perp \sigma \perp = \perp \sigma_i \perp \sigma_n \perp$, $\perp d\bar{\varepsilon}_n^p \perp$ を相当塑性ひずみ増分相当量として塑性仕事増分相当量

$$d\bar{W}^p = \perp \sigma \perp \{d\bar{\varepsilon}_n^p\} = \bar{\sigma} \perp d\bar{\varepsilon}_n^p \perp \quad (23)$$

を考え、さらに Mises の降伏条件においては

$$\perp \sigma \perp \{ \partial f / \partial \sigma \} = f = \bar{\sigma} \quad (24)$$

となることも考えると、式(21)より

$$\bar{c} df = \perp d\bar{\varepsilon}_n^p \perp \quad (25)$$

さらに式(20)において c が $\bar{W}^p$ の関数であるとするなら

$$\perp d\bar{\varepsilon}_n^p \perp = d\bar{\sigma} / H' \quad (26)$$

となる H' が一義的に存在する。したがって式(21)より

$$d\bar{\sigma} = df = \perp \partial f / \partial \sigma \perp \{d\sigma\} \quad (27)$$

であること、および式(25), (26)を用いると

$$\bar{c} df = \perp \partial f / \partial \sigma \perp \{d\sigma\} / H' \quad (28)$$

が成り立つ。ところで $\perp d\bar{\varepsilon}_n^p \perp = \perp d\varepsilon_i^p \perp d\bar{\varepsilon}_n^p \perp$, $\perp d\bar{\varepsilon}_n^p \perp = \perp d\varepsilon_i^p \perp d\bar{\varepsilon}_n^p \perp$ とすると

$$\begin{aligned} \{d\sigma\} &= [D^e] \{d\bar{\varepsilon}_n^p\} \\ &= [D^e] [H^e]^{-1} \left\{ \frac{d\varepsilon_i^e - d\varepsilon_i^p}{d\delta_n^e - d\delta_n^p} \right\} \quad (29) \end{aligned}$$

であるので式(22)を用いると

$$\{d\sigma\} = [D^e] [H^e]^{-1} \left\{ \frac{d\varepsilon_i^e}{d\delta_n^e} \right\} - \bar{c} [D^e] [H^e]^{-1} [H^p] \{ \partial f / \partial \sigma \} df \quad (30)$$

となり、これを式(28)に代入して $\bar{c} df$ について解き、この $\bar{c} df$ を式(30)に代入することにより

$$\begin{aligned} \{d\sigma\} &= \left([D^e] [H^e]^{-1} - \frac{[D^e] [H^e]^{-1} [H^p] \{ \partial f / \partial \sigma \} \perp \partial f / \partial \sigma \perp [D^e] [H^e]^{-1}}{H' + \perp \partial f / \partial \sigma \perp [D^e] [H^e]^{-1} [H^p] \{ \partial f / \partial \sigma \}} \right) \left\{ \frac{d\varepsilon_i^e}{d\delta_n^e} \right\} \\ &= \left[\frac{\bar{D}_{ii}^p}{\bar{D}_{ii}^e} \mid \frac{\bar{D}_{in}^p}{\bar{D}_{nn}^e} \right] \left\{ \frac{d\varepsilon_i^e}{d\delta_n^e} \right\} \quad (31) \end{aligned}$$

が得られる。本式は式(13)を用いると

$$\begin{aligned} \{d\sigma_i\} &= [\bar{D}_{ii}^e] \{d\varepsilon_i^e\} + [\bar{D}_{in}^e] \{d\delta_n^e\} + [\bar{D}_{in}^p] [h^i] \{ \partial du_n^e / \partial x \} \\ \{d\sigma_n\} &= [\bar{D}_{ni}^e] \{d\varepsilon_i^e\} + [\bar{D}_{nn}^e] \{d\delta_n^e\} + [\bar{D}_{nn}^p] [h^i] \{ \partial du_n^e / \partial x \} \quad (32) \end{aligned}$$

と表されるが、ここで式(32)の $[h^i]$ は次のように考えればよい。すなわち

$$\{d\bar{\varepsilon}_n^p\} = \{d\bar{\varepsilon}_n^e\} + \{d\bar{\varepsilon}_n^p\} \quad (33)$$

であるので、式(12)より

$$[h^i]^{-1} \{d\delta_n^e\} = [h^e]^{-1} \{d\delta_n^e\} + [h^p]^{-1} \{d\delta_n^p\} \quad (34)$$

$[h^i]$ は負荷の増大とともに刻々変化するが、時刻 τ から $\tau + d\tau$ の変化に対する $[h^i]$ としては時刻 τ における $[h^i]$ を用い、その時刻 τ における $[h^i]$ は時刻 $\tau - d\tau$ から τ の変化に際して実際に生じた $\{d\delta_n^e\}$ を式(34)に適用することにより定まるものを用いばよい。

ここで式(32)と式(20)の関係であるが、式(20)は $[h^i]$ が与えられている (例えば相当塑性ひずみ相当量の関数として与えることができる) 場合の関係を与えるものであり、一方式(32)は $[h^e]$, $[h^p]$ が与えられている場合に対するもので、 $[h^i]$ は個々の負荷経路に対して式(34)より定まるものとなり、この点で両式における $[h^i]$ の持つ意味は異なる。なお $[h^e] = [h^p]$ とする場合には $[h^i]$ もこれに等しくなるので式(20)と式(32)は完全に一致する。

クリープ 連続体に対する構成方程式は、通常

$$\left\{ \frac{\dot{\varepsilon}_i^e}{\dot{\varepsilon}_n^e} \right\} = \dot{\varepsilon}_c \left\{ \frac{\partial f / \partial \sigma_i}{\partial f / \partial \sigma_n} \right\} \quad (35)$$

により与えられる。ここで上付き c はクリープに対する量であることを表し、 $\perp \dot{\varepsilon}_i^e \mid \dot{\varepsilon}_n^e \perp$ はクリープひずみ速度、 $f(\sigma_{ij})$ は Mises 形のクリープポテンシャル、 $\dot{\varepsilon}_c$ は相当クリープひずみ速度で、相当応力 $\bar{\sigma} (=f)$ と時刻 τ の関数として

$$\bar{\epsilon}^c = \epsilon_c(\bar{\sigma}, \tau) \quad (36)$$

のように与えられる。したがって非連続面に対してはひずみ速度相当量 $\bar{\epsilon}_n^c = \bar{\epsilon}_n^c$ $\bar{\epsilon}_n^c$ に対する相当クリープひずみ速度相当量 $\bar{\epsilon}_n^c$ が $\bar{\epsilon}^c$ と同じく

$$\bar{\epsilon}_n^c = \epsilon_c(\bar{\sigma}, \tau) \quad (37)$$

で与えられるとしてその構成方程式は

$$\left\{ \frac{\bar{\epsilon}_n^c}{\bar{\epsilon}_n^c} \right\} = \bar{\epsilon}_n^c \left\{ \frac{\partial f / \partial \sigma_n}{\partial f / \partial \sigma_n} \right\} \quad (38)$$

により与えられる。したがって式(12), (13)より

$$\left\{ \frac{\bar{\epsilon}_n^c}{\bar{\epsilon}_n^c} \right\} = \bar{\epsilon}_n^c [H^c] \left\{ \frac{\partial f / \partial \sigma_n}{\partial f / \partial \sigma_n} \right\} \quad (39)$$

弾性クリープあるいは弾塑性クリープ問題においては微小時間に式(38)に従って生じるクリープ寄与分 $d\bar{\epsilon}_n^c$ を初期ひずみとみなし、例えば弾塑性構成方程式が式(31)で与えられる弾塑性クリープ問題は、

$$\left\{ \frac{d\sigma_n}{d\sigma_n} \right\} = \left[\frac{\bar{D}_n^p}{\bar{D}_n^e} \right] \left\{ \frac{d\epsilon_n^e - d\epsilon_n^c}{d\delta_n^e - d\delta_n^c} \right\} \quad (40)$$

により弾塑性寄与分は評価されると考えればよい。

4. 非連続面の有限要素定式化

ここでは前章で導いた構成方程式に対応する非連続面の有限要素定式化を行う。

変形前における非連続面上の一点は変形後引き伸ばされ直線となるが、この直線の中点を連ねることにより定義される面、すなわち相対変位の中心面 S を考えるとき、相対変位 δ_n および ϵ_n , $\partial u_n / \partial x$ は S 上に分布する関数としてとらえられる。ここで図3に示すように(簡単のため二次元の場合が示してある)、変形後においてそれらを結ぶとき、この S 面が適当な面積を持った要素 $S^{(n)}$ (面要素)に分割されるような上端面と下端面に属する点を考え(図3(a)の場合 i, j, k , (b)の場合 i, j, k, l)、これらを面要素 $S^{(n)}$ を構成する節点と呼ぶことにする。このとき面要素 $S^{(n)}$ の頂点は上端面上と下端面上の節点の中点となり、この頂点における δ_n は関与する節点の変位の差として与えられるので、 $S^{(n)}$ 上の δ_n は $S^{(n)}$ を構成する節点の変位 $\bar{u}$ により

$$\{\delta_n\} = [\bar{N}_1][T]\{\bar{u}\} = [\bar{B}_1]\{\bar{u}\} \quad (41)$$

のように与えることができる。ここで $[\bar{N}_1]$ は一種の形

図3 面要素の例

状関数であり、 $[T]$ は全体座標系を x_2 軸が $S^{(n)}$ に直交するようにとった局所座標系 (x_1, x_2, x_3) に変換するマトリックスである。

同様に ϵ_n , $\partial u_n / \partial x$ についても $S^{(n)}$ 上の u $u = u_1, u_2, u_3$ は $S^{(n)}$ の各頂点の u により表すことができ、この頂点の u は各頂点に関与する節点の変位の平均として与えられるので、 $[\bar{D}_2]$, $[\bar{D}_3]$ を微分演算子、 $[\bar{N}_2]$, $[\bar{N}_3]$ を形状関数として

$$\{\epsilon_n\} = [\bar{D}_2][\bar{N}_2][T]\{\bar{u}\} = [\bar{B}_2]\{\bar{u}\} \quad (42)$$

$$\{\partial u_n / \partial x\} = [\bar{D}_3][\bar{N}_3][T]\{\bar{u}\}$$

$$= [\bar{B}_3]\{\bar{u}\} \quad (43)$$

のように表すことができる。

さて以上のようにするとき面要素についての剛性方程式は次のように得られる。すなわち各面要素における内部仕事は δ_n と応力 σ_n により、単位面積当たり $\int \delta_n \sigma_n$ と表され、一方外部仕事は面要素を構成する節点を通じて与えられることから、面要素における仮想仕事の原理は、増分形式を用いれば、次のように与えられる。

$$\int_{S^{(n)}} \delta \delta_n \{\sigma_n\} dS = \delta \int d\bar{u} \{dF\} \quad (44)$$

ここで dF は節点荷重増分を表し、 $\delta \delta_n$, $\delta \int d\bar{u}$ はそれぞれ仮想仕事相対変位増分、仮想節点変位増分である。したがって上式に式(40)により表される構成方程式および式(41)~(43)の関係をを用いることにより求める剛性方程式は次のように与えられる。

$$[\bar{K}]\{d\bar{u}\} = \{dF\} + \{dP_{sc}\} \quad (45)$$

$$[\bar{K}] = \int_{S^{(n)}} [\bar{B}_1]^T [\bar{D}] [\bar{B}_1] dS, \quad \{dP_{sc}\} = \int_{S^{(n)}} [\bar{B}_1]^T [\bar{D}'] \left\{ \frac{d\epsilon_n^c}{d\delta_n^c} \right\} dS \quad (46)$$

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} \bar{B}_2 \\ \bar{B}_1 \\ \bar{B}_3 \end{bmatrix}, \quad [\bar{D}] = [\bar{D}_{ne} | \bar{D}_{nn} | \bar{D}_{nn}'], \quad [\bar{D}_{nn}'] = [\bar{D}_{nn}][h'], \quad [\bar{D}'] = [\bar{D}_{ne}' | \bar{D}_{nn}'] \quad (47)$$

ここで $[\bar{K}]$ は面要素の剛性マトリックスであり、 $\{dP_{sc}\}$ はクリープ変形に等価な節点力である。これより各面要素

について剛性方程式を作成し、これと連続体領域における通常要素の剛性方程式を組合せることにより系全体の剛性方程式が構成され、有限要素解析が可能となる。特に次章に示すようなき裂面をはきんで変形が対称な二次元問題において図3(a)に示すような三角形の面要素を用い、 $S^{(n)}$ 上の $\perp \delta_n \perp$ は一定と考える場合における剛性マトリックスは、 $\bar{t}$ を板厚として次のように与えられる。

$$[K^{II}] = l \bar{t} [\bar{B}^{II}]^T [\bar{D}^{II}] [\bar{B}^{II}], \quad [\bar{B}^{II}] = \begin{bmatrix} \frac{\bar{B}_1^{II}}{\bar{B}_1^{II}} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (48)$$

$$[\bar{B}_1^{II}] = \begin{bmatrix} \xi_2 \sin \theta & -\xi_2 \cos \theta & \xi_1 \sin \theta & -\xi_1 \cos \theta & -\sin \theta & \cos \theta \\ -\xi_2 \cos \theta & -\xi_2 \sin \theta & -\xi_1 \cos \theta & -\xi_1 \sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$[\bar{B}_2^{II}] = [-\xi \cos \theta \quad -\xi \sin \theta \quad \xi \cos \theta \quad \xi \sin \theta \quad 0 \quad 0] \quad \dots\dots\dots (50)$$

$$l = \overline{mn}, \quad \xi = 1/\sqrt{ij}, \quad \xi_1 = \overline{pj}/\sqrt{ij}, \quad \xi_2 = \overline{ip}/\sqrt{ij} \quad \dots\dots\dots (51)$$

ここで上付きのIIは二次元問題に対するものであることを表し、 $[\bar{D}^{II}]$ の具体的形については紙面の都合上省略する。

5. 有限要素解析によるき裂パラメータ評価

本章では前章までに示した定式化に基づき、二次元非連続き裂モデルの有限要素解析を行い、き裂パラメータ評価を通じて同モデルの有効性について検討する。

5.1 き裂エネルギー密度の評価法 非連続き裂モデルにおけるき裂エネルギー密度は式(4)により定義される量であるので、有限要素法によるときその定義に基づく直接評価も可能であるが、一般にき裂端の量は要素分割法および $[h]$ の選び方の影響を受けやすい。そこでここではこの直接評価とともに、新たにその存在が知られた非連続き裂モデルにおける次の径路独立積分⁽²⁾によるき裂端き裂エネルギー密度評価を行った。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^p = & \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} (W dx_2 - \perp T \perp \{u\}_{,1} d\Gamma) + W_{\text{plane}}(t, x_i) - \int_{A_1 \cup A_2} \int_0^t (\perp \sigma \perp_{,1} \{d\varepsilon\} - \perp d\sigma \perp \{\varepsilon\}_{,1}) dA \\ & - \int_{\Gamma_0^+ \text{ (or } \Gamma_0^-)} \int_0^t (\perp \sigma_n \perp_{,1} \{d\delta_n\} - \perp d\sigma_n \perp \{\delta_n\}_{,1}) dx_1 \quad \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

ここで W はひずみエネルギー密度であり、 $\perp T \perp$ 、 $\perp u \perp$ 、 $\perp \sigma \perp$ 、 $\perp \varepsilon \perp$ はそれぞれ表面力、変位、応力、ひずみのベクトル、 Γ^+ 、 Γ^- 、 Γ_{pl}^+ 、 Γ_{pl}^- 、 A_1 、 A_2 は図4に示す径路と面積である。なお、結合流れ則による増分理論に従う弾塑性体において除荷が生じない場合には、式(52)の第3、4項はほぼ零とみなして差支えなく⁽⁶⁾、ここでの弾塑性解析におけるき裂エネルギー密度評価にあたってはこれらの項は省略している。ただし、クリーブ解析においてはこのような省略はできない。

5.2 解析対象 図5に示すような中央き裂材の弾塑性および弾性クリーブ解析を行った。連続体部分については三角形定ひずみ要素を用い、非連続面については4章で述べた三角形面要素を用いている。問題

の対称性を考慮し1/4の領域について連続体要素数786、面要素数63とし総節点数は467である。 $[h]$ については本解析で考慮しなければならないのは h_{22} のみであり、ここでは最も簡単に弾塑性で $h = h_{22}^e = h_{22}^p$ 、弾性クリーブで $h = h_{22}^e = h_{22}^p$ とし、この h をパラメータとして解析を行った。

弾塑性解析は、ヤング率 $E=206$ GPa、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、降伏応力 $\sigma_Y=0.48$ GPa、ひずみ硬化率 $H'=2.06$ GPaとして、一様な漸増引張応力を受ける場合についてのものであり、弾性クリーブ解析は、ヤング率 $E=137$ GPa、ポアソン比 $\nu=0.3$ とし、クリーブ構成則としてはNorton則 $\dot{\varepsilon}^c = 0.75 \times 10^{-20} \cdot \sigma^8$ を用い、時

図4 き裂端を囲む積分径路

図5 試験片形状および負荷様式

刻 $t=0^+$ において一様な引張荷重 (0.8KN) が負荷され、その後その荷重が維持される定荷重クリープ試験を想定している。

5.3 解析結果と考察 まず弾塑性解析の結果であるが、図6に荷重点の平均変位 u_m に対するき裂エネルギー密度の変化が、表1には $u_m=0.0176$ mmのときの各評価法による結果の比較が示してある。き裂エネルギー密度の評価は、①本論文における構成方程式を用いて、径路積分によるもの〔Ⅰ-(a)〕、直接評価によるもの〔Ⅰ-(b)〕、②先の論文⁽¹⁾による構成方程式を用いて、径路積分によるもの〔Ⅱ-(a)〕、直接評価によるもの〔Ⅱ-(b)〕の4種類行っており、さらに比較のために連続体切欠き裂モデル⁽⁷⁾による評価も行っている。ここではまず基本的性質の検討ということとで全断面降伏以前の範囲に対する結果が示してあるが、非連続モデルの各評価結果はいずれも一応の目安を与える切欠き裂モデルの値に対してまず良好な一致を示しており、本解析の範囲では、弾塑性領域においてき裂エネルギー密度の値は h の影響をあまり受けず、また各評価法の間の差もあまり無いといえる。しかし弾性範囲においては(図6の立ち上り部分に相当)

表1 き裂エネルギー密度評価結果の比較 ($u_m=0.0176$ mm)

	NOTCH ($\rho=0.1$)	①		②	
		$h=0.1$	$h=1.0$	$h=0.1$	$h=1.0$
(a)	3.66	3.66	3.59	3.60	3.61
(b)	-	3.67	3.44	3.56	3.78

($\rho, h: \text{mm}, \mathcal{E}: \text{KJ/m}^2$)

図6 荷重点平均変位に対するき裂エネルギー密度の変化

予想されたことであるが、径路積分によるときは h にあまり依存せずしかも妥当な値が得られるのに対し、直接評価では h に大きく影響され、このことから弾塑性領域においても一般には径路積分による評価を行うことが望ましいものと思われる。なお、径路積分による結果は三つの径路に対する値の平均値が示してあり、いずれも径路独立性は良好であった。表2には式(5)の $CTOD$ の評価結果が示してある。当然であるがこの表から $CTOD$ は h の影響を受け、その値が大きいほど大きな値となり、また①、②の差も現れることがわかる。

次に弾性クリープに対する結果を示す。図7は、時間変化に伴うき裂エネルギー密度の変化を表したもの

表2 各 $CTOD$ 評価結果の比較

u_m (mm)	①		②	
	$h=0.1$	$h=1.0$	$h=0.1$	$h=1.0$
0.0176	5.66	7.34	3.89	5.64
0.0253	11.6	14.9	7.83	10.1

($h: \text{mm}, CTOD: \times 10^{-3} \text{mm}$)

表3 $\mathcal{E}, \dot{\mathcal{E}}_{st}$ 評価結果の比較

($T_1=0.10 \text{hour}, T_2=10 \text{hour}$)

		$\mathcal{E}$			$\dot{\mathcal{E}}_{st}$		
		NOTCH			NOTCH		
		$h=0.1$	$h=1$		$h=0.1$	$h=1$	
T_1	(a)	2.4	2.3	2.1	12	10	9.1
	(b)	-	2.3	2.2	-	29	27
T_2	(a)	3.1	3.0	2.8	0.22	0.22	0.22
	(b)	-	3.8	3.6	-	0.88	0.81

($\rho, h: \text{mm}, \mathcal{E}_{st}: \times 10^{-1} \text{KJ/m}^2, \dot{\mathcal{E}}_{st}: \times 10^{-3} \text{KJ/m}^2/\text{hour}$)

図7 時間に対するき裂エネルギー密度の変化

図 8 時間に対する $\dot{\epsilon}_{st}$ の変化

であり、非連続モデルにおける径路積分による評価結果〔図中(a)〕、直接評価による評価結果〔図中(b)〕が連続体切欠き裂モデル⁽⁷⁾によるものと比較してある。径路積分による評価結果は切欠モデルのそれにほぼ一致した値を得ることができるが、直接評価結果は、切欠モデルよりかなり大きな値となっている。この場合切欠き裂モデルの評価値は、ある程度妥当な基準を与えていると考えられることから、弾性クリープにおいては弾塑性の場合と異なり、適切な h を用いない限り直接評価は実質的でないようである。これは上に述べたように、弾性でのき裂エネルギー密度は、直接評価による場合には h の値に大きく左右され、特に弾性クリープにおいてはこの影響が大きいと考えられることができる。径路積分による結果は切欠モデルによるものに比べその立上りのところで若干低めの値となっているが、これは後の表3からもわかるようにさらに小さい h を用いることにより改善されるものと思われる、このことは弾性クリープにおいては弾塑性に比べ h の選択により配慮が必要であることを示している (h を小さくするほど σ は大きくなるが、例えば Norton 則であれば $\dot{\epsilon}^c$ は σ の n 乗で反映し、とくに立上

表 4 CTOD 評価結果の比較

 $(T_1=0.10\text{hour}, T_2=10\text{hour})$

	$h=0.1$	$h=1.0$
T_1	0.16	0.38
T_2	0.22	0.51

 $(h:\text{mm}, \text{CTOD}:\times 10^{-2}\text{mm})$

り部分においてこの影響は大きいものと思われる)。図8は、時間に対する静止き裂におけるき裂エネルギー密度の時間変化率 $\dot{\epsilon}_{st}$ の変化を示したものである。 $\dot{\epsilon}_{st}$ は修正 J 積分 J' との対応から⁽⁸⁾クリープき裂の特に進展挙動を支配するパラメータとして期待されるものであるが、この評価にあたっては図7の場合と同様なことがいえる。表3は、特定の時刻におけるき裂エネルギー密度の値と、その時間変化率の評価結果であり、 h を変えた場合について示してある。直接評価では、評価値が h の値に比較的影響されるのがわかる。また表4は、CTOD の評価結果である。

6. 結 言

今後連続体モデルとともに、き裂問題を評価するための一般的き裂モデルとして期待される非連続き裂モデルに関して、その一般的構成方程式の与え方を示すとともに、有限要素解析を通じてのき裂パラメータ評価についての基礎的検討を行った。

文 献

- (1) 渡辺・畔上, 機論, 51-469, A (昭60), 2154.
- (2) 渡辺・吉川, 機論, 53-487, A (昭62), 573.
- (3) 渡辺, 機論, 47-416, A (昭56), 406.
- (4) 渡辺, 機論, 48-433, A (昭57), 1226.
- (5) 渡辺, 機論, 50-453, A (昭59), 894.
- (6) 渡辺・倉繁, 機論, 50-460, A (昭59), 1983.
- (7) 渡辺・番, 機論, 51-466, A (昭60), 563.
- (8) 渡辺・倉繁, 機論, 50-454, A (昭59), 1291.

討 論

〔質問〕 坂 真 澄〔東北大学工学部〕

詳細なご検討に敬意を表す。特性長さ h_0 の適切な値の決定法に関し、下記の点についてご教示願いたい。

787 ページ, 下4行めに「 h_0 をパラメータとして実際の応力, δ_0 間の関係が成り立つように調節する」とあるが、これは5章で行われているように、非連続モ

デルより直接評価される $\mathcal{E}$ が、連続体切欠きモデルより評価される $\mathcal{E}$ に等しくなるように h_0 を定めるといふことなのか。

〔回答〕 本論文で示したような非連続面は、き裂問題に限らずいろいろな問題に適用が可能と考えており(現在検討中)、したがって何に対し、何を評価する目的でこのような非連続面を導入するのかによっても

h_{ij} の現実的な定め方は変わってくるだろうと考えている。例えば非連続面を本論文で示したような非連続き裂モデルに適用し、このモデルを σ の評価のためにのみ用いるのであれば、ご指摘のとおりであり、また

それで十分であるといえるし、このモデルによって $CTOD$ も評価しようということであると、現実のき裂端で観察される $CTOD$ にもあうように h を定める必要があるということになる。

53 巻 486 号, A 編 (昭 62-2) 正誤表

執筆者名	ページ	欄	行	誤	正
合田公一ほか	182	右	4	強度理論 ⁽¹⁰⁾	強度理論 ⁽⁷⁾
	〃	右	5	Rosen モデル ⁽¹¹⁾	Rosen モデル ⁽¹⁰⁾
田中道七ほか	195	右	文献(14)	…(昭 55), 568	…(昭 55), 815
岩館忠雄ほか	237	右	6	σ_r	σ_y
			7	σ_r	σ_y
小林 実ほか	242	左	下 4	W は外半径と内半径の比は r_2/r_1 である。	W は外半径と内半径の比 r_2/r_1 である。
西岡俊久ほか	271	右	5	J を導いた ⁽²⁾ 。	J' を導いた ⁽²⁾ 。
	273	図 2	図中	$\rho=2450 \text{ kg/m}$	$\rho=2450 \text{ kg/m}^3$
山本照美	322		式(14)	$\cdots \cos 2n\theta \left] \frac{2Gu_r}{\sigma_0 a} = \frac{1}{2} \cdots \right]$	$\cdots \cos 2n\theta \left] \frac{2Gu_r}{\sigma_0 a} = \frac{1}{2} \cdots \right]$