衝撃三点曲げ試験片における $\hat{J}$ 積分の簡便評価法*

岸 本 喜久雄^{*1} 鈴 木 玄^{*2}
青 木 繁^{*1} 坂 田 勝^{*1}

A Simple Method for Evaluating the $\hat{J}$ -integral
of an Impacted Three-Point Bend Specimen

Kikuo KISHIMOTO, Arata SUZUKI,
Shigeru AOKI, and Masaru SAKATA

The time variation of fracture mechanics parameters may be computed by the finite element method. However, this method requires a large computer time and is not conveniently used in material testing. In a previous paper, the authors derived a simple formula for calculating the dynamic stress intensity factor of an elastic three-point bend specimen subjected to impact loading. In the present paper, the formula is extended to include large scale yielding by introducing a plastic zone correction, and a simple method is proposed for evaluating the $\hat{J}$ -integral, a dynamic fracture mechanics parameter which is an extension of the J -integral and includes the effects of inertia force etc. Numerical examples are presented to demonstrate the practical applicability of the method. It is shown that a reasonable accuracy is obtained by the present method as compared with the elastic/viscoplastic finite element computation; and the CPU-time is within 1% of the finite element method. The limitation of the present method is also discussed.

Key Words: Fracture, Large Scale Yielding, Plastic Zone Correction, Impact loading, $\hat{J}$ -integral, Elastic/Viscoplastic Material

1. ま え が き

衝撃破壊靱性を測定する際、小規模降伏の場合には動的応力拡大係数 $K_I(t)$ を、大規模降伏の場合には動的弾塑性破壊力学パラメータである $\hat{J}$ 積分を算定する必要がある⁽¹⁾ 個々の測定ごとに有限要素法などの数値計算によって $K_I(t)$ または $\hat{J}$ を求めるのは経済的でないので、これらを簡便に算定する方法の開発が広く望まれている。筆者らは以前に梁の動的理論を用いた $K_I(t)$ の簡便評価式を提案した⁽²⁾⁽³⁾ 本報告では、塑性域補正の考え方を適用してこの簡便式を拡張し、 $\hat{J}$ 積分の簡便評価法を提案する。塑性域補正は、元来は小規模降伏状態に対して提案された手法であるが、本簡便法では大規模降伏状態にまで拡張して塑性域補正を適用する。そこで、以下ではまず、静的問題

に塑性域補正を適用し、その適用範囲について検討する。つぎに、衝撃三点曲げ試験片における $\hat{J}$ 積分の簡便評価法を示し、有限要素法による計算結果と比較検討し、その有効性を示す。

2. 静的問題に対する塑性域補正の適用

2.1. 塑性域補正 塑性域補正⁽⁴⁾ は、長さ a (中央き裂の場合は半長) のき裂の先端付近における塑性域の外側の応力分布が長さ $a^* = a + r_p$ の仮想き裂に対する弾性応力分布で近似できるとする考え方に基づいている。ここで、 r_p は塑性域寸法 λ の $1/2$ であり、応力拡大係数および降伏応力を、それぞれ、 K_I 、 σ_{ys} とすると次式で与えられる。

$$r_p = \frac{\lambda}{2} = \frac{a}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \dots\dots\dots (1)$$

上式の係数 α の値としては、平面ひずみ状態および平面応力状態の場合に対して、それぞれ

* 昭和 61 年 10 月 7 日 第 64 期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 1 月 23 日。

*¹ 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

*² 東京工業大学。

$$\alpha = \begin{cases} 1/2 & (\text{平面応力}) \\ 1/(4\sqrt{2}) & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad (2)$$

を用いることが推奨されている。⁽⁴⁾ a^* のき裂に対する応力拡大係数を求めれば、次式の応力拡大係数と $\hat{J}$ 積分の関係より $\hat{J}$ の値を得ることができる。

$$\hat{J} = \frac{K_I^2}{E'} \quad (3)$$

ここで、

$$E' = \begin{cases} E & (\text{平面応力}) \\ E/(1-\nu^2) & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad (4)$$

であり、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比である。

2. 2. Dugdaleモデルへの適用 図1中に示すような Dugdaleモデルを用いて大規模降伏状態における塑性域補正の適用可能性について検討する。Dugdaleモデルにおいては $\hat{J}$ 積分は Rice の J 積分⁽⁵⁾ に一致し、降伏規模にかかわらず

$$\hat{J} = \phi \sigma_{ys} \quad (5)$$

で与えられる。ここで、 ϕ はき裂先端の開口変位で、無限遠での応力を σ_∞ とすると

$$\phi = \frac{8 \sigma_{ys} a}{\pi E} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi \sigma_\infty}{2 \sigma_{ys}} \right) \right] \quad (6)$$

で与えられる。⁽⁴⁾

一方、応力拡大係数 K_I は $\sigma_\infty \sqrt{\pi a}$ で与えられるので、式(1)、(3)を用いることにより、塑性域補正による $\hat{J}$ は

図1 Dugdale Modelにおける塑性域補正の有効性

$$\hat{J} = \hat{J}_e^* = \frac{1}{E} \sigma_\infty^2 \pi a \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_{ys}} \right)^2 \right\} \quad (7)$$

で求められる。ここでは、この値を $\hat{J}_e^*$ と表記する。なお、ここでは平面応力状態を仮定している。式(5)による厳密な値と塑性域補正によって求められる値との比を図1に示す。図には、比較のために塑性域補正を施さずに式(3)より換算される値 ($\hat{J}_e$ と表記) との比も示されている。塑性域補正を適用して求めた値 $\hat{J}_e^*$ は σ_∞ が0から0.8 σ_{ys} 付近まで厳密な $\hat{J}$ の値とよく一致している。したがって、塑性域補正は小規模降伏を越えて大規模降伏状態まで適用可能であることがわかる。

2. 3. 三点曲げ試験片への適用 図2に示すような三点曲げ試験片に静的荷重 F が作用する場合を考える。三点曲げ試験片の応力拡大係数 K_I およびき裂が存在することによって生じる荷重点変位 δ_{crack} は、それぞれ

$$K_I = \sigma_M \sqrt{\pi a} g(a/W) \quad (8)$$

$$\delta_{crack} = \frac{\sigma_M}{E'} S V(a/W) \quad (9)$$

で与えられる。ここで、

$$\sigma_M = \frac{3SF}{2BW^2} \quad (\text{公称曲げ応力}) \quad (10)$$

であり、 S 、 B 、 W および a は、それぞれ試験片のスパン長さ、厚さ、幅およびき裂長さである。また、 $g(a/W)$ および $V(a/W)$ は形状係数⁽⁶⁾⁽⁷⁾ であり次式で与えられる。

$$g\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{1.99 - \frac{a}{W} \left(1 - \frac{a}{W}\right) \left\{ 2.15 - 3.93 \left(\frac{a}{W}\right) + 2.7 \left(\frac{a}{W}\right)^2 \right\}}{\sqrt{\pi} \left\{ 1 + 2 \left(\frac{a}{W}\right) \right\} \left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2}} \quad (11)$$

$$V\left(\frac{a}{W}\right) = \left\{ \frac{a/W}{1 - (a/W)} \right\}^2 \left\{ 5.58 - 19.57 \left(\frac{a}{W}\right) + 36.82 \left(\frac{a}{W}\right)^2 - 34.94 \left(\frac{a}{W}\right)^3 + 12.77 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right\} \quad (12)$$

図2 三点曲げ試験片

したがって、塑性域補正により $\hat{J}$ は

$$\hat{J} = \hat{J}_e^* = \frac{1}{E'} \sigma_M^2 \pi (a + r_p) g^2 \left(\frac{a+r}{W} \right) \dots \dots \dots (13)$$

と求められる。上式の両辺を $W \sigma_{ys}$ で除し無次元化することにより次式が得られる。

$$\frac{\hat{J}_e^*}{W \sigma_{ys}} = \pi \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_{ys}} \right)^2 \left(\frac{\sigma_{ys}}{E'} \right) \left(\frac{a}{W} \right) \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_{ys}} \right)^2 g^2 \left(\frac{a}{W} \right) \right\} \times g^2 \left[\left(\frac{a}{W} \right) \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_{ys}} \right)^2 g^2 \left(\frac{a}{W} \right) \right\} \right] \dots \dots \dots (14)$$

同様に、塑性域補正による荷重点変位 δ_{crack}^* は

$$\frac{\delta_{crack}^*}{W} = \left(\frac{S}{W} \right) \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_{ys}} \right) \left(\frac{\sigma_{ys}}{E'} \right) \times V \left[\left(\frac{a}{W} \right) \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_{ys}} \right)^2 g^2 \left(\frac{a}{W} \right) \right\} \right] \dots \dots \dots (15)$$

と求められる。式 (14) (15) による結果を有限要素計算結果⁽⁸⁾とともに図3, 4に示す。計算においては、 $E = 206 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\sigma_{ys} = 637 \text{ MPa}$, $S = 101.6 \text{ mm}$, $W = 25.4 \text{ mm}$, $a = 12.7 \text{ mm}$ を用いた。また、有限要素計算においては直線硬化則を採用しており、加工硬化率を $H' = 2.45 \text{ GPa}$ としている。図より三点曲げ試験片に対しても、平面ひずみ状態においては $\sigma_M / \sigma_{ys} \leq 0.65$, 平面応力状態においては $\sigma_M / \sigma_{ys} \leq 0.5$ の荷重範囲において $\hat{J}$ 積分および荷重点変位が塑性域補正により精度良く求められることがわかる。図4の荷重一荷重点変位関係から明らかなように、塑性域補正の

有効範囲は小規模降伏状態を超えて大規模降伏状態も含んでいる。

なお、図3, 4には板厚 $B = 12.7 \text{ mm}$ の場合に対する三次元有限要素解析結果⁽⁸⁾も示されている。有限厚さの試験片の結果は平面応力と平面ひずみ状態の間にある。静的荷重に対しては、前報⁽⁹⁾において提案した方法を用いることにより平面応力と平面ひずみ状態に対する二次元解析結果から有限板厚の場合の結果を推定することが可能である。しかしながら、前報の方法は、本報で検討する衝撃曲げ試験片のように、 $\hat{J}$ 積分値が時間的に変動する場合には適用が困難である。そこで、このような場合には塑性域補正の係数 α を適当な値に選ぶことにより有限板厚の試験片の $\hat{J}$ 積分値を推定することが考えられる。すなわち、破壊試験において直接測定される荷重変位曲線を良く近似するような α の値を求め、それにより $\hat{J}$ 積分値を算定する方法である。 $\alpha = 0.3$ として描かれている図中の曲線はこのようなようにして求められたものである。この方法により、有限板厚の場合も平面応力および平面ひずみ状態の場合と同程度の精度で $\hat{J}$ 積分が算定できることがわかる。衝撃荷重に対しても荷重変位の時間的な変化を良く近似するような α を求め、次節において示す方法により $\hat{J}$ 積分値を同様に算定することが可能であるが、第一次近似としては同一な板厚に対する静的試験によって得られる α の値をそのまま用いることができると考えられる。

3. $\hat{J}$ 積分の簡便評価法

三点曲げ試験片の中央に衝撃力 $F(t)$ が作用する場合について考える。小規模降伏の場合には前報⁽²⁾で示したように、Euler-Bernoulli の梁理論により得られる変位 $u(t)$ に関する2階の微分方程式を初期条件 $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ の下で解き、試験片中央の変位が $K_1(t)$ に比例すると仮定することにより、

図3 三点曲げ試験片の荷重- $\hat{J}$ 関係

図4 三点曲げ試験片の荷重一荷重点変位関係

次の $K_I(t)$ 簡便評価式が得られる⁽²⁾

$$K_I(t) = K_s \frac{\omega_1}{F(t)} \int_0^t F(\tau) \sin\{\omega_1(t-\tau)\} d\tau \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 K_s は静的な公式により求められる応力拡大係数であり、 ω_1 は試験片の最低次の固有角振動数である。塑性域の大きさが無視できない場合には、塑性域補正の考え方に従って、弾性体中に長さを補正した仮想き裂を考える。塑性域が時間的に変化するので補正を施したき裂長さ a^* も変化し、その結果 ω_1 も変化することを考慮しなければならない。そこで、 $0 \sim t$ 間を微小時間幅 Δt に分割し、各時間間隔 Δt 内では a^* や ω_1 が一定として、上述の微分方程式を各時間間隔毎に $t = 0$ から順次解くことにより塑性域補正を施した動的応力拡大係数 $K_I^*(t)$ を求め、これより $\hat{J}_I(t)$ を得ることとする。すなわち、時刻 $t = t_n$ における $K_I(t)$ および $\dot{K}_I(t)$ の値は、時刻 $t = t_{n-1}$ における $K_I(t)$ および $\dot{K}_I(t)$ の値を初期値として、それぞれ、

$$K_I(t_n) = K_s \frac{\omega_1}{F(t_{n-1})} \int_{t_{n-1}}^{t_n} F(\tau) \sin\{\omega_1(t-\tau)\} d\tau + K_I(t_{n-1}) \cos \omega_1 \Delta t + \frac{\dot{K}_I(t_{n-1})}{\omega_1} \sin \omega_1 \Delta t \quad \dots\dots\dots (17)$$

図5 $\hat{J}$ の簡便評価法フローチャート

$$\dot{K}_I(t_n) = K_s \frac{\omega_1^2}{F(t_{n-1})} \int_{t_{n-1}}^{t_n} F(\tau) \cos\{\omega_1(t-\tau)\} d\tau - \omega_1 K_I(t_{n-1}) \sin \omega_1 \Delta t + \dot{K}_I(t_{n-1}) \cos \omega_1 \Delta t \quad \dots\dots\dots (18)$$

で与えられるので、上式により $K_I(t_n)$ が求められれば、式(1)により塑性域補正の値 r_p を決定することができる。そこで、き裂長さに関する諸式を $a^* = a + r_p$ にかえて次の時刻での計算に移ることができる。以上を繰り返すことによって式(3)より $\hat{J}$ 積分の時間変化が求められる。この計算手順のフローチャートを図5に示す。

4. 有限要素解析結果との比較

前節で述べた $\hat{J}$ の簡便評価法の精度等について検討するために、有限要素解析を行った。構成式としては、次式で与えられる弾/粘塑性体の応力 σ_{ij} - ひずみ ϵ_{ij} 関係式⁽¹⁰⁾を用いた。

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2G \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{G}{\eta} \left(1 - \frac{\kappa}{\sqrt{J_2}}\right) \sigma'_{ij} \quad (\sqrt{J_2} > \kappa)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2G \dot{\epsilon}_{ij} \quad (\sqrt{J_2} \leq \kappa) \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 λ 、 G は Lamé の定数、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ、 η はせん断粘性係数であり、 σ'_{ij} は偏差応力、 J_2 は偏差応力テンソルの第2不変量である。また、 κ は加工硬化パラメータで相当塑性ひずみ増分 $d\epsilon_p$ の関数として次式で与えられる。

図6 有限要素解析に用いた応力 σ - ひずみ ϵ 関係 (単軸引張)

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{3}} H(f d \epsilon_p) \quad \dots\dots\dots (20)$$

有限要素法解析に際しては、A508S鋼を想定⁽¹¹⁾して直線硬化を仮定し、降伏応力 $\sigma_{ys} = 462 \text{ MPa}$ 、ひずみ硬化率 $H' = 1152 \text{ MPa}$ 、せん断粘性係数 $\eta = 0.524 \text{ MPa/s}$ 、縦弾性係数 $E = 206 \text{ GPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、密度 $\rho = 7.8 \text{ Mg/m}^3$ とした。解析に用いた単軸引張の応力ひずみ曲線を図6に示す。

図7に解析対象とした三点曲げ試験片の要素分割を示す。問題の対称性から試験片の1/2を考えている。図中の太い実線は $\hat{J}$ 積分を計算するための積分経路を表しており、次式⁽¹²⁾により $\hat{J}$ を求めた。

$$\hat{J} = \iint_A (\rho \ddot{u}_i u_{i,1} + \sigma_{ij} \epsilon_{ij,1}) dA - \int_{\Gamma} T_i u_{i,1} d\Gamma \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 T_i は表面力である。また、 Γ は積分経路を表し、 A は経路 Γ とき裂面によって囲まれた領域を表す。

試験片に作用する衝撃力 $F(t)$ は1/2周期の $\sin$

図7 有限要素分割と積分経路

図8 $\hat{J}$ の時間的变化
($\sigma_{Mmax}/\sigma_{ys} = 0.59$)

n波状パルスで模擬し、持続時間を1msの一定値とし、ピーク値を3通りに変えて平面ひずみ状態を仮定して計算を行った。簡便法による計算においては、降伏応力のひずみ速度依存性を考慮に入れて $\dot{\epsilon} = 100/s$ に対する降伏応力の値 $\sigma_{ys} = 615 \text{ MPa}$ を用い、時間刻みを $\Delta t = 1.5 \mu s$ とした。参考のために弾性計算による $\hat{J}$ 積分値も求めた。

図8, 9, 10に計算結果を示す。縦軸は、最大荷重 F_{max} に対する静的弾性解析結果 $\hat{J}_{max}^e$ で無次元化した $\hat{J}$ である。実線が有限要素解析結果、破線が簡便評価法による結果である。図8の $\sigma_{Mmax}/\sigma_{ys} = 0.59$ ($F_{max} = 12 \text{ kN}$) の場合および図9の $\sigma_{Mmax}/\sigma_{ys} = 0.63$ ($F_{max} = 13 \text{ kN}$) の場合には両者の結果は大略一致しており、簡便法により実用上十分な精度で $\hat{J}$ 積分値を算定できることがわかる。しかし、図10の $\sigma_{Mmax}/\sigma_{ys} = 0.73$ ($F_{max} = 15 \text{ kN}$) の場合には、簡便法による結果は有限要素計算に比較して過小評価となっている。したがって、動的問題においても2.3節において示した静的な場合と同様に、塑性域補正の適用範囲は $\sigma_{Mmax}/\sigma_{ys} \leq 0.65$ で与

図9 $\hat{J}$ の時間的变化
($\sigma_{Mmax}/\sigma_{ys} = 0.63$)

図10 $\hat{J}$ の時間的变化
($\sigma_{Mmax}/\sigma_{ys} = 0.73$)

えられる。動的な場合については平面ひずみ解析しか行っていないが、平面応力状態の場合についても同様な結果となることが予想され、塑性域補正の適用範囲は $\sigma_{Mmax}/\sigma_{ys} \leq 0.5$ と考えられる。なお、計算時間は有限要素法が一解析当たり 9 分 45 秒であったのに対して、簡便法では 4 秒であった。

5. 結 言

三点曲げ試験片の動的応力拡大係数の簡便式を塑性域補正の考えを適用することにより拡張し、動的弾塑性破壊力学パラメータ $\hat{J}$ 積分の簡便評価法を提案した。有限要素法による弾／粘塑性解析結果と比較検討し、本簡便評価法が実用上十分な精度を有していること、および塑性域補正の適用範囲を明らかにした。今後は、さらに大規模な塑性変形をする場合に対しても有効な簡便評価法を探索することが課題である。なお、計算は東京工業大学総合情報処理センター・HITAC・

M-280Hを用いて行った。

文 献

- (1) 坂田, 岸本, 材料, 34-386 (昭60) 1356.
- (2) Kishimoto, K. ・ほか2名, Engng. Frac. Mech., 13-3 (1980) 501.
- (3) 黒田 ・ほか3名, 機論, 50-453, A (昭59) 988.
- (4) 岡村, 線形破壊力学入門, (昭51) 培風館
- (5) Rice, J. R., Trans. ASME J. Appl. Mech., 35 (1968) 379.
- (6) Tada, H. ・ほか2名, The Stress Analysis of Cracks Handbook, (1973), Del Research.
- (7) 日本機械学会, 弾塑性破壊靱性 J_{Ic} 試験法, JSMES001-1981.
- (8) 岸本 ・ほか3名, 機論, 50-453, A (昭59) 912.
- (9) 坂田 ・ほか4名, 機論, 48-429, A (昭57) 579.
- (10) 岸田 ・ほか2名, 材料, 17-180 (昭51) 61.
- (11) 吉村・矢川, 第3回破壊力学シンポジウム講演論文集, (昭60) 117.
- (12) 岸本 ・ほか2名, 機論, 46-410, A (昭55) 1049.