ズーミング法による構造解析の精度評価 に関する基礎的研究*

(第1報, 有限要素法による薄平板の面外曲げ解析)

横山 正明**, 佐々木 茂***

A Basic Study of the Accuracy Estimation of Structural Analysis by the Zooming Method (1st Report, Finite Element Analysis of the Transverse Bending of Thin Flat Plates)

Masaaki YOKOYAMA and Shigeru SASAKI

As a basic study for the establishment of an accuracy estimation method in structural analysis using the zooming method, this report deals with the finite element analysis of the problems of transverse bending of thin, flat plates. From numerical experiments for uniform mesh divisions, the following relation was deduced, $\varepsilon \propto (h/a)^k$, $k \geq 1$, where ε is the error of the value by the finite element method relative to the exact value and h/a is the dimensionless mesh diameter. Using this relation, the errors of gradients on a zooming boundary and that of the bending moment at the selected points in the zooming region can be estimated by the recursive analyses of the whole region or of the zooming region. The error of the bending moment at the selected points is expected to be smaller than the sum of these two errors. A computer program using this error estimation method was developed and applied to sixteen problems of various shapes. The usefulness of this accuracy estimation method was illustrated by these application results.

Key Words: Numerical Analysis, Structural Analysis, Finite Element Method, Zooming Method, Error Analysis

1. 緒 言

有限要素解析において, 要素寸法を小さくしていくと多くの場合厳密解に収束するといわれている。しかし, 計算機にはおのずからその使用可能な記憶容量に限度があり, また四則演算のけた数にも限度がある。さらに, 計算時間に対しても厳しい制限を受けるのが普通であるから, 精度を高めるためにといっても要素寸法をいたづらに小さくすることはできず, 解析精度と制約に気を使って計算しなければならない。このような場合に解析精度を高めようとの意図から, 要素寸法を逐次小さくしてはいくが, 制約条件には違反しない数値解析の方法の一つとして「ズーミング法」が考えられている。ズーミング法は, 次目すべき点の物理量を精度よく解析するために, 「注目点周りの小さな部分領域(ズーミング領域と仮称する)を取り出し, 前回のより粗い分割におけるこの部分領域の境界(ズーミング境界と仮称する)上の数値解を境界条件としてズーミング領域をより細かく分割して精度を前回より

高めた数値解を求める」という過程を繰返し反復する数値解析法である。

ズーミング法のこのような解析法から容易に予想されるように, 求められた数値解はズーミング境界の誤差の影響を大きく受ける。最悪の場合には誤差が累積して厳密解から著しくかけ離れた数値解が得られることもある。したがって, ズーミング法の使用に際してはズーミング境界の誤差を考慮すべきではあるが, 従来ズーミング法を使用した数値解に関するいくつかの報告^{(1)~(5)}あるいはそれに説明を加えた著書⁽⁶⁾の中にも, ズーミング境界の誤差と求められた数値解の誤差の関係にまで言及したものは見当たらない。

本研究はズーミング法による数値解析のこのような現状にかんがみ, 最初にズーミング境界の誤差と数値解の誤差の関係を調べ, 次にこの関係を応用して精度評価ができるズーミング法による数値解析の方式を開発しようとするものである。本報はその手始めとして厳密解の知られている問題の多い薄平板の面外曲げ解析の場合を取扱う。

なお, 本報の精度評価法は薄平板の有限要素法のすべての定式化法, すべての板形状, 境界条件ならびに荷重条件について適用できると断定するものではないことを最初にお断りしておく。

* 昭和61年11月24日 関西支部第246回講演会において講演, 原稿受付 昭和61年5月6日。

** 正員, 東京工業大学総合理工学研究所 (〒227 横浜市緑区長津田町 4259)。

*** 学生員, 東京工業大学大学院。

2. ズームング法による 数値解の誤差特性

精度評価の方式を考えるための基礎資料として、まずズームングの繰返しにおける数値解の誤差の特性を数値実験により求める。

数値実験には、平板の形状として正方形板、円板の2種類を用い、境界条件としては周辺単純支持、周辺固定の2条件、荷重条件としては面に垂直な一様分布荷重を採用した。実際には対称性を考えて、正方形板については4分の1、円板については6分の1の領域について解析している。

有限要素法としては吉田らの開発した応力仮定のハイブリッド法⁷⁾を使用した。要素には三角形要素を用い、正方形板については図1の2種類の分割パターンを用いている。

連立一次方程式の解法にはガウスの消去法を用いている。数値計算は HITAC M 180, M 200 により倍精度で実行した。

次に、ズームング領域の取り出しと要素の細分割であるが、注目すべき節点周りの前段階の解析領域のほぼ4分の1の領域を取り出し、全要素の要素寸法を2分の1にした。図2に正方形板の場合についてその例を示す。白丸印が注目すべき節点である。この図の場合、ズームング境界上の節点は3点しかないが、あらかじめ一つの問題について5点あるいは9点の場合について数値実験し、基本的な誤差特性に大きな変化がないことを確かめて、以後の数値実験はほとんどこのような分割数を用いている。要素の細分割において新たに発生した節点の変位と傾きは正方形板においては三次関数近似により補間して求めた。円板の場合は同

図1 正方形板および円板の一様分割パターン

図2 ズームングの繰返し過程の分割例

心円上にある他の節点の変位と傾きのそれぞれの平均値を採用した。

図3から図5までにズームングの繰返しにおける無次元要素寸法と注目点の曲げモーメントの相対誤差の関係を示す。要素寸法 h は、正方形板については直角をはさむ辺の長さ、円板については半径上にある辺の長さを採用している。相対誤差は Timoshenko の著書⁸⁾にある厳密解 M_{EXACT} に対する有限要素解 M_{FEM} の相対誤差

$$\varepsilon = \frac{M_{\text{EXACT}} - M_{\text{FEM}}}{M_{\text{EXACT}}} \times 100 \quad \dots\dots\dots (1)$$

の絶対値をとっている。円板に関する曲げモーメント M_N は半径方向、 M_T は接線方向の曲げモーメントを示す。円板の外周における誤差は周上すべての節点における誤差の平均値である。また、各節点の誤差は周囲の要素から計算される曲げモーメントの誤差の平均値である。図3は正方形板の実験結果、図4は円板、図5は正方形板と円板の双方の実験結果を示す。プロット点が円の場合は円板、正方形の場合は正方形板の結果であることを示す。図中の折線に付加された記号の第1番めのものは境界条件を示し、単純支持(記号SS)、固定(記号CL)に対応する。第2番めの記号は注目点を示す。第3番めの記号は、図3では分割タイプ、図4では曲げモーメントの種類を示し、 M_N (記号N)か M_T (記号T)かを示す。図5では正方形板では分割タイプ、円板では曲げモーメントが M_N であるのか($M_N + M_T$)/2であるのかを示す。

各図において、白点を連ねた折線はズームング法によらない、全領域解析の誤差特性、黒点を連ねた折線はズームング法による誤差特性を示す。枝別れしたところからズームング法の繰返しが始まる。図5において、SS-O-Aの場合に折線が反転上昇するが、これは誤差の符号が反対なものを折返したためである。

これらの数値実験結果を見るに、ズームング法によって誤差が増大しながら一定値に漸近するものと誤差が減少しながらある一定値に漸近するものがある。これらの特性は注目点の物理量(ここでは曲げモーメント)の相対誤差とズームング境界において境界条件とする物理量(ここでは変位と傾き)の相対誤差の符号、その大小関係に左右される。すなわち、要素寸法の漸減とともに、注目点の物理量とズームング境界の物理量(曲げモーメントへの影響は変位に比較して傾きがけたちがいに大きいので傾きのみを考えればよい)が各々の厳密解に、両方とも数値の大きいほうから、あるいは小さいほうから漸近する場合、後者の相対誤差の絶対値が前者のそれより大きいときは図3および図

4のように誤差は増大しながらある一定値に漸近する。後者の相対誤差の絶対値が前者のそれより小さいときは図5のSS-O-A以外のように誤差は減少しながらある一定値に漸近する。両方別々の方向から厳密解に漸近する場合は図5のSS-O-Aのように白点を連ねた折線より黒点を連ねた折線が下側にくる。このような誤差の漸近特性はズームング境界の物理量の相対誤差ならびに要素寸法の大きさの漸減による誤差減少の二つを考慮することにより説明できる。

3. ズームング法による 数値解の誤差評価法

前章における数値実験結果から、注目点の曲げモーメントの相対誤差はズームング境界の変位と傾き、主として傾きの相対誤差、ならびに要素寸法の大きさに関係する誤差の影響を大きく受けることが明らかになったので、本章ではまずそれらの誤差の関係を求め、次にその関係を使って誤差評価法を考える。

ズームング境界に厳密解を与えたと仮定したときの注目点の曲げモーメントの数値解を M_{FEM} とする。また、ズームング境界における変位と傾きの厳密解に対する式(1)の形式の相対誤差が全節点等しく δ_b であり、 $\delta_b \ll 1$ であると仮定する。このとき注目点の曲げモーメントは、ズームング領域内に荷重がない場合は $(1-\delta_b)M_{FEM}$ となる。ズームング領域内に荷重がある場合はこの曲げモーメントに、ズームング境界におい

て変位=0, 傾き=0を境界条件として求めた曲げモーメントを加えなければならない。しかし、比較的小さいズームング領域を選んだときにはこの付加曲げモーメントの寄与は小さいので、この場合も曲げモーメントは $(1-\delta_b)M_{FEM}$ であると考えても大きな誤りはない。厳密解に対するこの曲げモーメントの相対誤差は

$$\begin{aligned} & \frac{M_{EXACT} - (1-\delta_b)M_{FEM}}{M_{EXACT}} = (1-\delta_b) \\ & \times \frac{M_{EXACT} - M_{FEM}}{M_{EXACT}} + \delta_b \\ & \approx \frac{M_{EXACT} - M_{FEM}}{M_{EXACT}} + \delta_b \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

となる。ズームング境界を固定し、ズームング領域内の要素寸法を小さくしていくと、要素寸法の大きさに関係する相対誤差(これを δ_d とおく)である右辺の第1項は多くの場合は零に収束する。このことはズームング境界の変位と傾きの相対誤差が δ_b のとき、ズームング領域をどんなに細分割しても注目点の曲げモーメントは厳密解に収束することではなく、相対誤差 δ_b をもつことを意味する。変位と傾きについても式(2)と同様の関係式が成り立つ。

次に、これらの関係を使ってズームング法の繰返しにおける誤差の累積について検討する。第1回めのズームング境界の変位と傾きの相対誤差を δ_{b1} とするとき、このズームング領域内の各節点における変位、傾きあるいはそれから計算される曲げモーメントの相対

図3 ズームング法による数値解の誤差特性(1)

図4 ズームング法による数値解の誤差特性(2)

図5 ズームング法による数値解の誤差特性(3)

誤差は式(2)から類推して $\delta_{b1} + \delta_{d1}$ となる。ここで、 δ_{d1} は物理量ごとに、あるいは節点ごとに要素寸法とともに変化する。このズーム領域内において、変位と傾きの相対誤差が等しく δ_{d1} である節点を選べたと仮定して、これらの節点列を第2回めのズーム境界とする。この結果、第2回めのズーム境界の変位と傾きの相対誤差は $\delta_{b1} + \delta_{d1}$ となる。この第2回めのズーム領域の中に、変位と傾きの相対誤差が $\delta_{b1} + \delta_{d1} + \delta_{d2}$ となるような第3回めのズーム境界を同様に設定できる。このようにして n 回のズーム法を繰返したとき、注目点の曲げモーメント M_{FEM} の相対誤差は次式のようになる。

$$\frac{M_{EXACT} - M_{FEM}}{M_{EXACT}} = \delta_{b1} + \sum_{i=1}^n \delta_{di} \quad \dots\dots\dots (3)$$

以上の検討の過程においては、ズーム境界上のすべての節点において変位と傾きの相対誤差は等しいと仮定してきたが、実際の数値解析においてはこのようなことはありえない。一つの節点においてすら変

位、 x 方向傾き、 y 方向傾きの各々の相対誤差は等しくならない。そこでこの難点をさけるために実際の数値解析においては、注目点の曲げモーメントへの影響の大きさを考慮して、ズーム境界の相対誤差としては傾きの相対誤差を考えることにする。さらに、傾きとしては x 方向傾きと y 方向傾き、あるいは半径方向傾きと接線方向傾きを合成した最大傾きを考えることにする。また、ズーム境界の設定に際しては最大傾きの相対誤差のほぼ等しい節点を選ぶように努力し、それらの平均値をもってズーム境界の相対誤差と考えることにする。注目点の曲げモーメントへの影響の大小であるが、これは正方形板について実施したいいくつかの数値実験結果によっている。すなわち、ズーム境界上の変位と傾きの厳密解に別々に一定の誤差を与え、注目点の曲げモーメントへの影響の大きさを調べた結果、変位の相対誤差に比較して傾きの相対誤差の影響が7~20倍大きいことが確かめられている。

式(3)において厳密解に対する相対誤差 δ_{b1} 、 δ_{di} が計算できれば注目点の曲げモーメントの相対誤差は評価できる。しかし、問題領域内の傾きの厳密解は不明であるので、これらの相対誤差を直接計算することはできない。それゆえに本報では、著者らの別報⁽⁹⁾と同様な手法でそれらの存在範囲を推定することにする。この別報において、曲げモーメントに関してはそれが十分に収束した状態において無次元要素寸法と厳密解

図6 ズーム境界における相対誤差の累積

図7 要素寸法と変位の相対誤差の関係

図8 要素寸法と傾きの相対誤差の関係(1)

図9 要素寸法と傾きの相対誤差の関係(2)

に対する相対誤差の間にはほぼ

$$\left| \frac{M_{\text{EXACT}} - M_{\text{FEM}}}{M_{\text{EXACT}}} \right| \propto \left(\frac{h}{a} \right)^k, k \geq 1 \dots (4)$$

の関係が成立することを報告した。このとき、要素寸法を逐次2分の1にする方式の要素分割の繰返しにおいて、ある注目点の曲げモーメントについて連続した2回の数値解の間の相対誤差が

$$\left| \frac{M_{\text{FEM}}^{(k)} - M_{\text{FEM}}^{(k-1)}}{M_{\text{FEM}}^{(k)}} \right| \leq \theta \dots (5)$$

を満足するとき、厳密解に対する曲げモーメント $M_{\text{FEM}}^{(k)}$ の相対誤差はほぼ

$$\theta \geq \frac{M_{\text{EXACT}} - M_{\text{FEM}}^{(k)}}{M_{\text{EXACT}}} \geq 0 \dots (6)$$

あるいは

$$0 \geq \frac{M_{\text{EXACT}} - M_{\text{FEM}}^{(k)}}{M_{\text{EXACT}}} \geq -\theta \dots (7)$$

の範囲内にあることを報告した。要素寸法を逐次 α 分の1にするときは式(6), (7)は

$$\frac{\theta}{\alpha - 1} \geq \frac{M_{\text{EXACT}} - M_{\text{FEM}}^{(k)}}{M_{\text{EXACT}}} \geq 0 \dots (8)$$

$$0 \geq \frac{M_{\text{EXACT}} - M_{\text{FEM}}^{(k)}}{M_{\text{EXACT}}} \geq \frac{-\theta}{\alpha - 1} \dots (9)$$

のように書き直さなければならない。

同様のことが変位と傾きについてもいえる。すなわち、図7から図9までにいくつかの数値実験結果を示すように、変位 w ならびに傾き w_x, w_y に関しても、それが十分に収束した状態において無次元要素寸法と

厳密解に対する相対誤差の間には式(4)と同様な関係が成立する。したがって、要素寸法を α 分の1にする方式の要素分割の繰返しにおいて、問題領域あるいはズームング領域内のクリティカルな点から離れた任意の点の変位と傾きについても式(5)と同様な関係が成立するとき、厳密解に対する変位と傾きの相対誤差はほぼ式(8), (9)と同様な範囲内にあることが期待できる。

以上の基礎的な関係式に基づき、図10に示す概略流れ図に従ってズームング法の誤差評価を行う。式(8), (9)からわかるように最大傾き、曲げモーメントの相対誤差はその存在範囲が与えられる。ズームング境界は最大傾きの相対誤差の存在範囲のほぼ等しい節点列により形成される。各段階のズームング領域について注目点の曲げモーメントの相対誤差の存在範囲をも式(8), (9)により求める。式(3)に以上求めた相対誤差の存在範囲を代入し、累積誤差を求めると注目点の曲げモーメントの最終的な相対誤差の存在範囲を評価できる。

なお、この評価法の導出の基礎となった式(4)および変位、傾きに関する類似の式は理論的に証明できるものではなく、したがって一般的に成立するか否かは不明である。

4. ズームング法による 数値解の誤差評価例

前章において、ズームング法の繰返しにおける注目点の曲げモーメントの厳密解に対する相対誤差は式(3)で与えられ、各誤差項は各々のズームング境界上の節点における最大傾きの相対誤差の平均値および最後のズームング領域における注目点の曲げモーメントの相対誤差であることを説明した。さらに、これらの相対誤差の存在範囲は、要素寸法が異なり、かつ連続した2回の要素分割における数値解の間の相対誤差を使って評価でき、したがってこれらの相対誤差の存在範囲の重ね合せによって注目点の曲げモーメントの相対誤差の存在範囲を評価できることを説明した。本章においては、より一般的な形状に適用してこの誤差評価方式の有効性を調べる。この数値実験に用いられる自動要素分割プログラムおよびその実行に必要な入力データなどは別報⁽⁹⁾の場合と同様であるので、詳細はそれを参照されたい。ズームング法への移行は次のように行う。すなわち、もとの問題領域に関して、要素寸法が異なり、かつ連続した2回の要素分割における傾きの数値解の間の相対誤差をすべての節点についてとめる。3分の2以上の節点の相対誤差が5%以下に

図10 ズームング法の誤差評価の概略流れ図

なればズームング法へ移行する。ズームング領域は解析者が出力リストを見ながら適宜決定する。ズームング領域の細分割は次のように行う。すなわち、ズームング境界上に1辺を有さないすべての要素は4等分割あるいは9等分割する。境界上に1辺を有する要素については4等分割、9等分割する方式と、その1辺上に新しく節点を設けない方式の2種類の方式を採用した。前者においては三次関数補間により新しい節点の変位と傾きを求めた。ズームング領域内の節点における相対誤差の計算のためにはズームング領域をさらに1回以上細分割しなければならない。本報では、各要素を4等分割と9等分割の2回分割する方式と4等分割の1回のみ分割する方式を採用した。前者を2度分割方式、後者を1度分割方式と仮称する。2度分割方式を採用したのは次のような理由による。すなわち、前述のズームング領域の2種類の細分割方式によれば、一方では境界近傍が一樣に分割されない。他方では新しい節点の変位と傾きを補間によりもとめなければ

ならないという新しい環境下で数値解を求めなければならない。新しい環境下での数値解どうしを比較して相対誤差を求める2度分割方式と新旧両環境下での数値解の比較になる1度分割方式の差異を調査するためである。

誤差評価に使用した薄平板面外曲げ問題を図11に示す。問題A～Iについては厳密解が知られており、問題J～Pについては村上らの体積法による数値解析結果⁽¹⁰⁾がある。図12に問題Pについて、ズームング法移行時の要素分割パターンとズームング領域を示す。図13にこのズームング領域の2種類の細分割パターンを示す。この図は4等分割の場合を示している。

表1, 2に2度分割方式, 1度分割方式のズームング法を1回施した場合の誤差評価結果を示す。この表で「補間なし」は図13の左の方式, 「補間あり」は右の方式に対応する。注目点曲げモーメントの厳密解を M_{exact} , 体積法による解を M_{bfm} で表す。 E_{qzb} はズームング境界の傾きの相対誤差の平均値(単位%, 以下同じ), M_2, M_1 は2度分割方式, 1度分割方式の注目点の曲げモーメント, E_{me2}, E_{me1} は M_{exact}, M_{bfm} に対する M_2, M_1 の相対誤差を示す。 E_{m21} は M_2 と前回の分割の曲げモーメントの相対誤差を示し, E_{m10} は M_1 と前回の分割, この場合はズームング法移行時の曲げ

図11 誤差評価に使用した問題

図12 問題Pにおける要素分割とズームング領域

図13 ズームング領域の2種類の細分割方式

表 1 2度分割方式のズームング法を1回施した場合の誤差評価結果

	Mexact Mbfm	Egzb	Analysis without interpolation				Analysis with interpolation				
			M2	Eme2	Em21	Em21 + Egzb	M2	Eme2	Em21	Em21 + Egzb	Embz
A	0.537	1.663	0.527	1.756	0.148	0 $\sim$ 1.811	0.528	1.750	0.377	0 $\sim$ 2.040	3.067
B	0.677	2.853	0.655	3.205	2.124	0 $\sim$ 4.977	0.656	3.163	2.063	0 $\sim$ 4.916	6.613
C	1.009	3.132	0.976	3.205	2.114	0 $\sim$ 5.246	0.977	3.156	2.067	0 $\sim$ 5.199	6.721
D	0.291	0.472	0.286	1.748	1.436	0 $\sim$ 1.908	0.286	1.752	1.517	0 $\sim$ 1.989	4.661
E	0.398	0.861	0.384	3.690	4.201	0 $\sim$ 5.062	0.383	3.776	4.286	0 $\sim$ 5.147	10.879
F	0.653	0.665	0.631	3.410	3.961	0 $\sim$ 4.626	0.631	3.505	4.081	0 $\sim$ 4.746	10.350
G	-1.273	1.494	-1.259	1.107	0.667	0 $\sim$ 2.161	-1.259	1.115	0.668	0 $\sim$ 2.162	2.623
H	-1.714	1.106	-1.698	0.962	0.766	0 $\sim$ 1.872	-1.698	0.964	0.787	0 $\sim$ 1.893	2.380
I	-2.756	3.226	-2.699	2.090	1.460	0 $\sim$ 4.686	-2.698	2.103	1.464	0 $\sim$ 4.690	4.775
J	1.868	2.487	1.831	2.002	0.076	0 $\sim$ 2.563	1.831	2.007	-0.109	-0.109 $\sim$ 2.487	2.264
K	1.847	2.867	1.828	1.007	0.054	0 $\sim$ 2.921	1.828	1.007	-0.120	-0.120 $\sim$ 2.867	1.239
L	1.887	5.176	1.833	2.867	0.058	0 $\sim$ 5.234	1.833	2.867	-0.131	-0.131 $\sim$ 5.176	3.037
M	2.020	5.526	1.957	3.144	1.390	0 $\sim$ 6.916	1.956	3.166	1.319	0 $\sim$ 6.845	6.970
N	1.601	1.082	1.607	-0.369	-1.593	-1.593 $\sim$ 1.082	1.607	-0.381	-1.608	-1.608 $\sim$ 1.082	-4.022
O	2.204	2.870	2.203	0.032	-0.817	-0.817 $\sim$ 2.870	2.203	0.061	0.134	0 $\sim$ 3.004	0.554
P	1.564	4.033	1.559	0.313	-0.051	-0.051 $\sim$ 4.033	1.559	0.307	-0.051	-0.051 $\sim$ 4.033	0.141

表 2 1度分割方式のズームング法を1回施した場合の誤差評価結果

	Mexact Mbfm	Egzb	Analysis without interpolation				Analysis with interpolation				
			M1	Eme1	Em10	Em10 + Egzb	M1	Eme1	Em10	Em10 + Egzb	Embz
A	0.537	1.663	0.527	1.829	1.262	0 $\sim$ 2.952	0.527	1.935	1.155	0 $\sim$ 2.818	3.067
B	0.677	2.853	0.648	4.233	2.486	0 $\sim$ 5.339	0.649	4.162	2.559	0 $\sim$ 5.412	6.613
C	1.009	3.132	0.966	4.229	2.603	0 $\sim$ 5.735	0.967	4.157	2.675	0 $\sim$ 5.807	6.721
D	0.291	0.472	0.283	2.454	2.212	0 $\sim$ 2.684	0.283	2.498	2.168	0 $\sim$ 2.640	4.661
E	0.398	0.861	0.376	5.713	5.479	0 $\sim$ 6.340	0.375	5.838	5.352	0 $\sim$ 6.213	10.879
F	0.653	0.665	0.619	5.323	5.301	0 $\sim$ 5.966	0.618	5.474	5.158	0 $\sim$ 5.823	10.350
G	-1.273	1.494	-1.255	1.437	1.203	0 $\sim$ 2.697	-1.255	1.445	1.193	0 $\sim$ 2.687	2.623
H	-1.714	1.106	-1.691	1.342	1.052	0 $\sim$ 2.158	-1.691	1.354	1.038	0 $\sim$ 2.114	2.380
I	-2.756	3.226	-2.679	2.805	2.203	0 $\sim$ 5.429	-2.679	2.820	2.013	0 $\sim$ 5.239	4.775
J	1.868	2.487	1.830	2.003	0.229	0 $\sim$ 2.716	1.832	1.954	0.317	0 $\sim$ 2.804	2.264
K	1.847	2.867	1.828	1.031	0.210	0 $\sim$ 3.077	1.830	0.947	0.294	0 $\sim$ 3.161	1.239
L	1.887	5.176	1.832	2.897	0.144	0 $\sim$ 5.320	1.834	2.803	0.241	0 $\sim$ 5.417	3.037
M	2.020	5.526	1.943	3.817	3.279	0 $\sim$ 8.805	1.943	3.804	3.292	0 $\sim$ 8.818	6.970
N	1.601	1.082	1.620	-1.168	-2.822	-2.822 $\sim$ 1.082	1.620	-1.189	-2.802	-2.802 $\sim$ 1.082	-4.022
O	2.204	2.870	2.204	-0.009	0.563	0 $\sim$ 3.406	2.201	0.128	0.425	0 $\sim$ 3.295	0.554
P	1.564	4.033	1.560	0.288	-0.147	-0.147 $\sim$ 4.033	1.560	0.281	-0.141	-0.141 $\sim$ 4.033	0.141

表 3 2度分割方式のズームング法を2回施した場合の誤差評価結果

	Analysis without interpolation					Analysis with interpolation				
	M2	Eme2	Eg2zb	Em21	Egzb+Em21+Em21	M2	Eme2	Eg2zb	Em21	Egzb+Em21+Em21
B	0.664	1.970	0.138	0.753	0 $\sim$ 3.774	0.664	1.924	0.071	0.726	0 $\sim$ 3.650
C	0.988	2.044	0.150	0.711	0 $\sim$ 3.993	0.989	1.995	0.077	0.672	0 $\sim$ 3.881
E	0.393	1.383	-0.112	1.247	-0.112 $\sim$ 2.108	0.393	1.473	-0.072	1.376	-0.072 $\sim$ 2.237
F	0.646	1.151	-0.118	1.216	-0.118 $\sim$ 1.881	0.645	1.246	-0.071	1.348	-0.071 $\sim$ 2.013

表 4 1度分割方式のズームング法を2回施した場合の誤差評価結果

	Analysis without interpolation					Analysis with interpolation				
	M1	Eme1	Eg2zb	Em10	Egzb+Em21+Em10	M1	Eme1	Eg2zb	Em10	Egzb+Em21+Em10
B	0.656	3.093	0.063	1.177	0 $\sim$ 4.093	0.658	2.865	0.146	1.335	0 $\sim$ 4.334
C	0.977	3.169	0.057	1.095	0 $\sim$ 4.284	0.979	2.920	0.149	1.275	0 $\sim$ 4.556
E	0.385	3.486	-0.012	2.307	-0.012 $\sim$ 3.168	0.384	3.697	-0.066	2.223	-0.066 $\sim$ 3.084
F	0.633	3.115	0.012	2.278	0 $\sim$ 2.955	0.632	3.352	-0.049	2.196	-0.049 $\sim$ 2.861

図 14 問題 B におけるズームング領域と要素分割

モーメントの相対誤差, E_{mbz} は M_{exact} , M_{bim} に対する, ズームング法移行時の注目点の曲げモーメントの相対誤差を示す。

これらの表を概観するに, ズームング法により求められた曲げモーメント M_2 , M_1 の M_{exact} , M_{bim} に対する相対誤差 E_{me2} , E_{me1} はほとんどすべて, 本報告の誤差評価法による相対誤差の存在範囲 $E_{m21} + E_{gzb}$, $E_{m10} + E_{gzb}$ にあることが確認できる。

以上はズームング法を1回施した場合であるが, 評価された誤差範囲が所望のものより広い場合はズームング法をさらに繰返し施さなければならない。ここでは厳密解が知られており, かつ誤差範囲の広い問題 B, C, E, F についてさらにもう1回ズームング法を施してみる。その誤差評価結果を表3, 表4に示す。また, 問題 B におけるズームング領域と要素分割パターンを図14に示す。これらの表を概観するに相対誤差 E_{me2} , E_{me1} はほとんど, 評価誤差範囲 $E_{gzb} + E_{g2zb} + E_{m21}$, $E_{gzb} + E_{g2zb} + E_{m10}$ にあることが確認できる。ここで, E_{g2zb} は2回めのズームング境界の傾きの相対誤差の平均値を示す。評価誤差範囲を外れるものに

おいても, その差は大きくはない。

また, 2度分割方式のズームング法と1度分割方式のその間, さらに, ズームング領域の2種類の細分割方式の間には, 誤差評価の観点からは明白な差異は認められない。

以上の数値実験結果を総括するに, 本報において提案したズームング法の誤差評価の方式は, ここに取扱った問題と類似の形状, 境界条件, 荷重条件の薄平板面外曲げ問題については有効であると考えられる。

5. 結 言

ズームング法による構造解析の誤差評価の方式を開発するために, 有限要素法による薄平板の面外曲げ解析問題を取り上げ, 最初に正方形板, 円板の1様分割における曲げモーメントに関して誤差特性を調べた。

次に, ズームング法によるこの曲げモーメントの数値解の誤差評価の方式を提案した。すなわち, ズームング法の繰返しにおける注目点の曲げモーメントの相対誤差の存在範囲は, ズームング境界の傾きの相対誤差の平均値の存在範囲の累積和と最後のズームング領域における注目点の曲げモーメントの相対誤差の存在範囲の和で与えられることを示した。

最後に, この方式を種々の問題に適用し, その有効性を確認した。

終わりに, 日頃有益な助言とご協力をいただいている本学大学院総合理工学研究科 林 国一教授に厚く謝意を表す。

文 献

- (1) 丸山, 機論, 39-324 (昭49), 2340.
- (2) 有吉・ほか2名, 九州工業大学学報, 26 (昭48), 35.
- (3) Fuhring, H., Stahlbau, 9 (1975), 272.
- (4) 山本・ほか2名, 潤滑, 27-11 (昭57), 853.
- (5) Hirai, I., ほか2名, Int. J. Numer. Methods Eng., 20-9 (1984), 1671.
- (6) 川井・ほか2名, 薄板構造解析, (昭48), 107, 培風館.
- (7) 吉田・ほか2名, 土木学会論文報告集, 211 (昭48), 19.
- (8) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and Shell, (1959), McGraw-Hill.
- (9) 横山・菅谷, 機論, 52-476, A (昭61), 853.
- (10) 村上・荒木, 機論, 45-397, A (昭54), 998.

討 論

〔質問〕 横内 康人〔電気通信大学〕

(1) 3章の論旨および図3~5のすなおな解釈から、ズームングを行っても注目点の精度が向上する保証はないといえる。したがってズームング支持者には皮肉な表現かもしれないが、本論文は例題の範囲内でズームングが無意味であることを理論的・数値的に確認したものと解釈することができる。結言においてズームングの是非に触れていないが、著者はどのようにお考えか。

(2) 式(5)の解釈として、 $M_{FEM}^{(\nu)}$ が M_{EXACT} のよい近似であることを前提に、誤差の挙動は要素細分化 α に対して、悪くても線形、実際には非線形で加速的に減衰することを述べているように見える。そうであるとすれば、式(8)の $\theta/(\alpha-1)$ は $2\theta/\alpha$ ではないか。

〔回答〕 (1) 本論文の取扱っている問題の範囲内に限定すれば、ご指摘のとおりズームング法によっても必ずしも注目点の曲げモーメントの精度が向上する保証はないといえる。例えば、ズームング境界の傾きの誤差が注目点の曲げモーメントの誤差より大きい場合には、ズームング法を施すと注目点の曲げモーメントの誤差は施さない場合よりも大きくなる。他方、曲げモーメント集中の比較的大きな問題については、初期の粗い分割に対する注目点の曲げモーメントの誤差がかなり大きいために、誤差の小さいズームング境界の選択とズームング領域の細分割によって、誤差の累積を考えてもなおズームング法を施さない場合の誤差より小さくすることができ、精度向上を図ることができる。

このようにズームング法の精度はズームング境界の物理量の誤差の影響を大きく受ける。したがって、著者らも全幅の信頼をもってズームング法を支持するものではなく、その使用に際しては注目点の物理量の誤差、ズームング境界の物理量の誤差などを十分に考慮して使用しなければならないと考えている。

(2) 相対誤差が両対数グラフ上で直線となることから

$$\frac{M_{EXACT} - M_{FEM}^{(\nu)}}{M_{EXACT}} = c \left(\frac{h}{a} \right)^k, \quad k \geq 1, \quad c: \text{定数}$$

いま、要素寸法を $1/\alpha$ にする場合を考えると

$$\frac{M_{EXACT} - M_{FEM}^{(\nu-1)}}{M_{EXACT}} = c \left(\alpha \frac{h}{a} \right)^k$$

この2式より

$$\frac{M_{FEM}^{(\nu)} - M_{FEM}^{(\nu-1)}}{M_{EXACT}} = (\alpha^k - 1) \cdot c \left(\frac{h}{a} \right)^k$$

$$= (\alpha^k - 1) \frac{M_{EXACT} - M_{FEM}^{(\nu)}}{M_{EXACT}}$$

$\alpha, k \geq 1$ より $\alpha^k - 1 \geq \alpha - 1$ であるから

$$\frac{M_{FEM}^{(\nu)} - M_{FEM}^{(\nu-1)}}{M_{EXACT}} \geq (\alpha - 1) \frac{M_{EXACT} - M_{FEM}^{(\nu)}}{M_{EXACT}}$$

十分収束した状態においては $M_{FEM}^{(\nu)} \doteq M_{EXACT}$ とみなせるので

$$\frac{1}{\alpha - 1} \frac{M_{FEM}^{(\nu)} - M_{FEM}^{(\nu-1)}}{M_{FEM}^{(\nu)}} \geq \frac{M_{EXACT} - M_{FEM}^{(\nu)}}{M_{EXACT}}$$

また、連続した2回の解析において

$$\theta \geq \frac{M_{FEM}^{(\nu)} - M_{FEM}^{(\nu-1)}}{M_{FEM}^{(\nu)}}$$

であるから

$$\frac{\theta}{\alpha - 1} \geq \frac{M_{EXACT} - M_{FEM}^{(\nu)}}{M_{EXACT}}$$

が得られる。なお、 $\alpha \geq 2$ のとき $\alpha - 1 \geq \alpha/2$ であるから

$$\frac{2\theta}{\alpha} \geq \frac{\theta}{\alpha - 1} \geq \frac{M_{EXACT} - M_{FEM}^{(\nu)}}{M_{EXACT}}$$

となり、ご質問の場合はより広い誤差範囲を与える。

また、 $2 > \alpha > 1$ のときは $\alpha^k - 1$ と $\alpha/2$ の大小関係が α のみならず、 k にも依存して変化し、 $\alpha^k - 1 > \alpha/2$ の場合はご質問の場合が狭い誤差範囲を与えて好ましいが、例えば、 $\alpha = \sqrt{2}, k = 1$ のときのように $\alpha/2 > \alpha^k - 1$ の場合もあり、この場合は本論文の誤差評価に使用できない。このような理由から、本論文ではご質問の $\alpha/2$ ではなく、 $\alpha - 1$ を統一的に使用し、式(8)、(9)を誤差評価に使用している。

〔質問〕 横内 康人

回答は理解したつもりである。しかし、第2問に関して、回答と本文の記述にはくい違いがあると思う。本文中、 θ の定義あるいは関係式として逐次2分の1 (すなわち $\alpha = 2$ に対応) に限定して式(5)を与え、以後定義が変わる旨の記述がない。一方、回答では逐次 α 分の1 (任意の α) に対して式(5)を用いている。

なお回答の主旨に沿うとして、図4のCL-M-Nの曲線は、部分的に1以下のこう配 (すなわち k) をとり、 θ が誤差の上界を与えない反証例になっているように見受けられるがいかがか。

〔回答〕

式(5)は要素寸法を逐次2分の1にする場合に限定したものではなく、「要素寸法の異なる、連続した2回の分割に対して計算された数値解の間に、もし式(5)が成りたてば」という仮定の式である。逐次2分の1

にする場合を先に説明した関係で紛わしい表現になったことをお詫びしたい。

また、図4のCL-M-Nの折れ線であるが、ご指摘のとおり部分的に1以下のこう配を与えている。このほかにも図3のCL-M-Bの折れ線、図5のCL-O-Aの折れ線も部分的に1以下のこう配を与えている。これらはいずれも要素分割が粗い場合に発生しており、要素分割が細かくなるとこのような事態は発生していない。有限要素法のような離散化に基づく数値解析の場合には、分割が粗いと高い精度の数値解は一般には得られにくく、この三例も粗い分割に起因して直線的

な変化からはずれ、部分的に1以下のこう配を与えたものと考えている。本文中にもお断りしてあるように、式(4)およびそれに類似の式は曲げモーメント、変位および傾きが十分に収束した状態において成り立つものであり、したがって、式(4)に基づいて導出した誤差評価式は物理量が十分に収束した状態において成立するものである。前述の三例のように、初期の粗い分割においては物理量はまだ十分に収束している状態ではなく、したがって、こう配も一様ではなく、このような粗い分割に対しては誤差評価式は使用できないと考えている。

53巻487号, A編(昭62-3) 正誤表

執筆者名	ページ	欄	行	誤	正
三木田嘉男 ほか	目次 1		下12	中林一郎	中林一郎
南 起 祐 ほか	444	著者名		安藤 柱***	安藤 柱****
鈴木 靖 昭	516	左	12	距離を h により無次元化して表示した。	距離を表す。
浜田 実 ほか	532		下2	$-arP\phi_x^*$	$-arP\phi_x^*$
石橋達弥 ほか	644	右	下10	$P_m = P_{up}(d/D_p)x_p \sim$	$P_m = P_{up}(d/D_p)x_p \sim$