平板を伝ばする熱弾性波の分散と減衰*

台丸谷 政 志^{*1}, 内 藤 正 鄰^{*1}

Dispersion and Energy Dissipation of Thermoelastic Waves in a Plate

Masashi DAIMARUYA and Masachika NAITOH

The aim of this paper is to illustrate the effect of thermoelastic coupling on the propagation of Rayleigh-Lamb waves in an infinite plate. The propagation of thermoelastic waves in a plate bounded by traction-free surfaces is studied on the basis of the linear theory of coupled thermoelasticity taking into account the coupling between the strain and temperature fields. The characteristic equations are derived for the thermal condition of general heat transfer on the surfaces and their asymptotic equations for particular cases are also examined. Especially, numerical evaluations corresponding to the first three modes of symmetric and antisymmetric waves are carried out over wide range of frequencies, and the thermoelastic energy dissipation together with the phase velocity for both adiabatic and isothermal boundary conditions are illustrated and discussed in detail.

Key Words: Elasticity, Thermoelasticity, Thermoelastic Waves, Effect of Thermoelastic Coupling, Plate, Phase-Velocity Dispersion, Energy Dissipation

1. 緒 言

固体のひずみ場の変動は一般に温度場の変化をもたらす, その結果, 熱流を生ずる. これに基因する力学的エネルギーの散逸は熱弾性減衰として知られている. 前報⁽¹⁾では連成熱弾性理論に基づいて熱弾性円柱を伝ばする縦波の分散と熱弾性減衰特性を明らかにした. ここでは熱弾性平板を伝ばする波動の特性, 分散および熱弾性減衰を調べる.

無限平板における調和波動の解析は, 初め Rayleigh⁽²⁾, Lamb⁽³⁾らによって行われたが, そこではひずみ場と温度場の連成の影響, いわゆる熱弾性効果は考慮されていない. 平板に関する Rayleigh-Lamb 理論では, 波動モードは平板の中立面に関する変位の対称, 逆対称の区別で対称波動(縦波)および逆対称波動(曲げ波)に分類される. 古典理論の範囲では, これら二つの波動モードは独立に生じ, それらに対する周波数スペクトル, 位相速度および群速度が求められている⁽⁴⁾. この問題に関する熱弾性効果の影響は, Nowacki, Sokolowski⁽⁵⁾, Deresiewicz⁽⁶⁾ら

によって, 第一次波動モードの特別な場合に関して調べられている.

本研究では, まず Rayleigh-Lamb 理論を熱弾性平板に拡張し, 一般的な熱的境界条件下の平板における波動特性を調べた. 次に数値例として, 断熱ならびに等温境界条件下における縦波および曲げ波の, それぞれ第三次モードまでの位相速度分散および熱弾性減衰の周波数特性を示し, 平板の弾性波動に及ぼす熱弾性効果について検討した.

2. 熱弾性平板における調和波動

図 1 のように一様な任意厚さを有し平行な自由表面 $y = \pm a$ を持つ熱弾性平板の x 方向への平面ひずみ波動を考える. このとき変位成分 U_x, U_y は次式で表される.

$$U_x = \partial\phi/\partial x + \partial\psi/\partial y, \quad U_y = \partial\phi/\partial y - \partial\psi/\partial x \quad \cdots (1)$$

ここで, ϕ はスカラーポテンシャル, ψ はベクトルポテンシャル成分である. このとき, 連成熱弾性方程式⁽⁷⁾

図 1 平板の座標系

* 昭和 62 年 3 月 7 日 北海道支部第 28 期総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 61 年 6 月 26 日.

*¹ 正員, 室蘭工業大学 (〒050 室蘭市水元町 27-1).

は次式のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{\beta_t}{\lambda + 2G} T \\ \nabla^2 \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0 \\ \kappa \nabla^2 T - \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\beta_t T^*}{\rho c_v} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}$$

$$\beta_t = (3\lambda + 2G)\alpha_t$$

λ, G はラーメの定数, α_t は線膨張係数, T は温度, T^* は基準絶対温度, t は時間, κ は温度伝導率, c_v は比熱, ρ は密度である. また, y 方向に関する応力成分は Duhamel-Neumann の関係式および式(1), (2)より, 次式のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy} &= -2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{G}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \\ \sigma_{xy} &= G \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで時間に関する調和波動を考え次式の解を仮定する.

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \bar{\Phi}(x, y) e^{i\omega t} \\ \psi(x, y, t) &= \bar{\psi}(x, y) e^{i\omega t} \\ T(x, y, t) &= \bar{T}(x, y) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで ω は円周波数.

式(4)を式(2)に代入し, $\bar{T}$ を消去すれば次式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} (\nabla^2 + \lambda_1^2)(\nabla^2 + \lambda_2^2) \bar{\Phi} &= 0 \\ \{\nabla^2 + (\omega/c_2)^2\} \bar{\psi} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで,

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{c_1} \right)^2 \left[1 + \frac{1+\delta}{i\omega_0} \pm \left\{ 1 - \frac{2(1-\delta)}{i\omega_0} + \left(\frac{1+\delta}{i\omega_0} \right)^2 \right\}^{1/2} \right]$$

$$\delta = \beta_t^2 T^* / (\lambda + 2G) \rho c_v, \quad \omega_0 = \kappa \omega / c_1^2$$

さらに $\bar{\Phi}, \bar{\psi}$ を次式のようにおく.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}(x, y) &= \{\varphi_1(y) + \varphi_2(y)\} e^{i\gamma x} \\ \bar{\psi}(x, y) &= \varphi_3(y) e^{i\gamma x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで, γ は複素波数, $\varphi_1 \sim \varphi_3$ は次式である.

$$\varphi_j(y) = A_j \cosh \zeta_j y + B_j \sinh \zeta_j y, \quad (j=1, 2, 3) \dots\dots\dots (7)$$

ここで, A_j, B_j は定数であり, ζ_j は次式で与えられる.

$$\zeta_j^2 = \gamma^2 \pm \lambda_j^2 \quad (j=1, 2), \quad \zeta_3^2 = \gamma^2 - \left(\frac{\omega}{c_2} \right)^2 \dots\dots\dots (8)$$

式(2), (4), (6)より, 温度が次式のように表される.

$$T = \frac{\lambda + 2G}{\beta_t} \left[\left\{ \lambda_1^2 - \left(\frac{\omega}{c_1} \right)^2 \right\} \varphi_1(y) + \left\{ \lambda_2^2 - \left(\frac{\omega}{c_1} \right)^2 \right\} \varphi_2(y) \right] e^{i(\gamma x + \omega t)} \dots\dots\dots (9)$$

また, 応力成分は次式のように得られる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy} &= G \left[(\zeta_3^2 + \gamma^2) \{\varphi_1(y) + \varphi_2(y)\} - 2i\gamma \frac{d}{dy} \varphi_3(y) \right] e^{i(\gamma x + \omega t)} \\ \sigma_{xy} &= G \left[2i\gamma \frac{d}{dy} \{\varphi_1(y) + \varphi_2(y)\} + (\zeta_3^2 + \gamma^2) \varphi_3(y) \right] e^{i(\gamma x + \omega t)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

3. 周波数方程式

平板の自由表面における力学的境界条件

$$y = \pm a \text{ において, } \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

および式(10)より次式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} (\zeta_3^2 + \gamma^2) \{\varphi_1(\pm a) + \varphi_2(\pm a)\} - 2i\gamma \varphi_3'(\pm a) &= 0 \\ 2i\gamma \{\varphi_1'(\pm a) + \varphi_2'(\pm a)\} + (\zeta_3^2 + \gamma^2) \varphi_3(\pm a) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

一方, 温度に関する境界条件はニュートンの冷却法則で与えられるとすれば,

$$y = \pm a \text{ で, } \partial T / \partial y + hT = 0 \dots\dots\dots (13)$$

ここで, h は相対熱伝達率である. 式(9), (13)より次式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \{\lambda_1^2 - (\omega/c_1)^2\} \{\varphi_1'(\pm a) + h\varphi_1(\pm a)\} \\ + \{\lambda_2^2 - (\omega/c_1)^2\} \{\varphi_2'(\pm a) + h\varphi_2(\pm a)\} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式(12), (14)において, $\varphi_j'(\pm a) = (d\varphi_j/dy)_{y=\pm a}$

式(12), (14)の6本の同次方程式より未知係数 $A_j, B_j (j=1, 2, 3)$ を消去して周波数方程式が得られ, 無次元量を導入すれば次式のように表示される.

$$\begin{aligned} & [\bar{x}_2 z_2 \tanh z_2 \{4\eta^2 z_1 z_3 \tanh z_1 - (z_3^2 + \eta^2) \tanh z_3\} - \bar{x}_1 z_1 \tanh z_1 \{4\eta^2 z_2 z_3 \tanh z_2 - (z_3^2 + \eta^2) \tanh z_3\}] \\ & \times [\bar{x}_2 z_2 \{4\eta^2 z_1 z_3 \tanh z_1 - (z_3^2 + \eta^2) \tanh z_1\} - \bar{x}_1 z_1 \{4\eta^2 z_2 z_3 \tanh z_3 - (z_3^2 + \eta^2) \tanh z_2\}] \\ & - H^2 [\bar{x}_2 \{4\eta^2 z_1 z_3 \tanh z_1 - (z_3^2 + \eta^2) \tanh z_3\} - \bar{x}_1 \{4\eta^2 z_2 z_3 \tanh z_2 - (z_3^2 + \eta^2) \tanh z_3\}] \\ & \times [\bar{x}_2 \tanh z_2 \{4\eta^2 z_1 z_3 \tanh z_3 - (z_3^2 + \eta^2) \tanh z_1\} - \bar{x}_1 \tanh z_1 \{4\eta^2 z_2 z_3 \tanh z_3 - (z_3^2 + \eta^2) \tanh z_2\}] = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (15)$$

ここで,

$\eta = a\gamma$, $\Omega_1 = a\omega/c_1$, $\Omega_2 = a\omega/c_2$, $\bar{x}_j = \Lambda_j^2 - \Omega_j^2$, $\Lambda_j = a\lambda_j$ ($j=1, 2$), $H = ah$, $z_1^2 = \eta^2 - \Lambda_1^2$, $z_2^2 = \eta^2 - \Lambda_2^2$, $z_3^2 = \eta^2 - \Omega_2^2$
 式(15)において、時間に関する調和波動を仮定して円周波数 ω を実数かつ正とすれば波数 γ は一般に複素数である。これを $\gamma = \gamma_r - i\gamma_i$ とおけば位相速度は ω/γ_r で求められ、 γ_i は x 軸の負方向に伝ばする波動の熱弾性減衰係数となる。また熱弾性減衰による力学的エネルギーの比損失 Q^{-1} は次式で求められる⁽¹⁾⁽⁸⁾。

$$Q^{-1} = 2\gamma_i/\gamma_r \quad \dots\dots\dots (16)$$

なお、熱弾性効果を見捨てた Rayleigh-Lamb 周波数方程式の周波数スペクトルにおいても、実数分枝以外に虚数および複素数分枝が存在するが、無限平板の場合には物理的意味を持たず⁽⁹⁾、ここでは古典解の実数分枝に対応するモードに注目する。

周波数方程式(15)は、熱弾性効果を考慮すれば無限平板における縦波動と曲げ波動は一般の熱的境界条件下では互いに影響することを示している。断熱境界あるいは等温境界の場合に対してのみ二つの波動モードは独立に生ずる。すなわち、ビオ数 $H=0$ の断熱境界の場合に対しては次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_2 z_2 \tanh z_2 \{4\eta^2 z_1 z_3 \tanh z_1 - (z_3^2 + \eta^2)^2 \tanh z_3\} - \bar{x}_1 z_1 \tanh z_1 \{4\eta^2 z_2 z_3 \tanh z_2 - (z_3^2 + \eta^2)^2 \tanh z_3\} &= 0 \\ \bar{x}_2 z_2 \{4\eta^2 z_1 z_3 \tanh z_3 - (z_3^2 + \eta^2)^2 \tanh z_1\} - \bar{x}_1 z_1 \{4\eta^2 z_2 z_3 \tanh z_3 - (z_3^2 + \eta^2)^2 \tanh z_2\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

式(17)の第1式は縦波動、第2式は曲げ波動に対応する。次に $H \rightarrow \infty$ の等温境界の場合に対しては、式(15)は次の縦波動および曲げ波動に対応する二式になる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_2 \{4\eta^2 z_1 z_3 \tanh z_1 - (z_3^2 + \eta^2)^2 \tanh z_3\} - \bar{x}_1 \{4\eta^2 z_2 z_3 \tanh z_2 - (z_3^2 + \eta^2)^2 \tanh z_3\} &= 0 \\ \bar{x}_2 \tanh z_2 \{4\eta^2 z_1 z_3 \tanh z_3 - (z_3^2 + \eta^2)^2 \tanh z_1\} - \bar{x}_1 \tanh z_1 \{4\eta^2 z_2 z_3 \tanh z_3 - (z_3^2 + \eta^2)^2 \tanh z_2\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

式(15)あるいは式(17), (18)において熱弾性効果を見捨てれば古典理論に基づく次の縦波動および曲げ波動に関する Rayleigh-Lamb 周波数方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} 4\eta^2 z_1 z_3 \tanh z_1 - (z_3^2 + \eta^2)^2 \tanh z_3 &= 0 \\ 4\eta^2 z_1 z_3 \tanh z_3 - (z_3^2 + \eta^2)^2 \tanh z_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

この非連成の場合の位相速度を $c' = \omega/\gamma$ で表す。

次に波長が板厚に比べて非常に長い場合あるいは短い場合の極限式を導き、それらについて検討する。

波長が非常に長い場合、式(17)第1式および式(18)第1式の縦波動に関しては、それぞれ次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 z_1^2 \{4\eta^2 z_2^2 - (z_3^2 + \eta^2)^2\} \\ - \bar{x}_2 z_2^2 \{4\eta^2 z_1^2 - (z_3^2 + \eta^2)^2\} &= 0 \\ \bar{x}_1 \{4\eta^2 z_2^2 - (z_3^2 + \eta^2)^2\} \\ - \bar{x}_2 \{4\eta^2 z_1^2 - (z_3^2 + \eta^2)^2\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

これらの極限式からでさえ分散関係を見出すことは難しく、さらに近似を行うか⁽⁶⁾、あるいは数値計算にたよらざるを得ない。ただし、熱弾性効果を見捨てた非連成の場合には、式(20)の両式から次式が得られる。

$$C_{ex} = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 C_{ex} は薄い弾性平板における縦波の伝ば速度である。

一方、波長が板厚に比べて非常に短い場合、式(15)より次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \{4\eta^2 z_1 z_3 - (z_3^2 + \eta^2)^2\} (H - z_2) \bar{x}_2 \\ - \{4\eta^2 z_2 z_3 - (z_3^2 + \eta^2)^2\} (H - z_1) \bar{x}_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(22)は平板表面の温度条件が一般的にニュートン則で与えられた場合の熱弾性平板における Rayleigh の表面波を表す式に一致する⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。熱弾性効果を見捨てれば、Rayleigh 波に対する古典解が得られる。

$$4\eta^2 z_1 z_3 - (z_3^2 + \eta^2)^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

4. 分散と熱弾性減衰

Rayleigh-Lamb 周波数方程式(19)においてはポアソン比 ν が与えられれば周波数スペクトルが求められ分散関係が得られる。それに対し、熱弾性効果を考慮した周波数方程式(15), (17), (18)においては、 ν 以外に縦弾性係数 E 、温度伝導率 κ などの材料物性値および相対熱伝達率 h 、板厚 a などが関係してく

図 2 縦波動の位相速度分散

る。数値計算例にはアルミニウム合金を想定して、次の物性値を用いた。 $\nu=0.33$, $E=72.6$ GPa, $\alpha=7 \times 10^{-5}$ m²/s, $\alpha_t=2.35 \times 10^{-5}$ 1/°C, $\rho=2.8 \times 10^3$ kg/m³, $c_v=9.6 \times 10^2$ J/kg°C。また、 $T^*=293$ K, $a=1$ cm とした。境界が断熱条件あるいは等温条件で与えられる場合の縦波動および曲げ波動に関する数値計算例を以下に示す。

図2に縦波動の場合の位相速度の分散曲線を示す。図中の番号①～③はそれぞれ第一～三次モードを意味する。縦軸の対数目盛は実線で示した非連成の場合の無次元位相速度 c'/C_{ex} (ここで $c'=\omega/\gamma$) に対してのものである。破線で示した連成の場合の c/C_{ex} (ここで $c=\omega/\gamma_r$) は c'/C_{ex} からの差を示しており、縦軸の目盛にはよらない。 c'/C_{ex} , c/C_{ex} の差を表す尺度は図中に示してある。図より熱弾性効果を考慮した場合の方が位相速度はいくぶん大きくなることがわかる。第一次モードに関して、 $\Omega_2 \rightarrow 0$ のとき、 $c/c' \rightarrow 1.005$ 程度である。また $\Omega_2 \rightarrow \infty$ のとき、 c, c' はそれぞれ式(22), (23)で与えられる Rayleigh の表面波の伝ば速度になる。第二、三次モードに関しては、遮断周波数近傍で c/c' の差が大きく現れている。なお、図2の c は断熱境界の場合であるが、等温境界の場合に対しても、図2のスケールでは現れない程度の数値的な差異はあったが

同じ曲線が得られた。

図3は図2に対応する縦波動の第一～三次モードに対するエネルギー比損失 Q^{-1} の周波数特性である。ただし、 $Q_0=\delta \cdot \omega_0/\Omega_1$ 。実線は断熱境界、破線は等温境界の場合である。エネルギー比損失は等温境界の場合、断熱境界の場合に比べて、オーダーで $O(10^2)$ 程度大きくなっている。また、熱的境界条件にかかわらず、 Q^{-1} は Lamé の等容積周波数で零になっている。平板表面

図4 曲げ波動の位相速度分散

図3 縦波動エネルギー比損失の周波数特性 (—断熱条件, ---等温条件)

図5 曲げ波動エネルギー比損失の周波数特性 (—断熱条件, ---等温条件)

に関する条件式(12), (14)は, $A_1=A_2=A_3=0, B_1=B_2=0, \xi_3^2+\gamma^2=0, \cos(\xi_3 a)=0$ のとき満足され, 縦波動に関する Lamé の等容積周波数が次のように求められる。

$$\Omega_2 = \pi/\sqrt{2}, 3\pi/\sqrt{2}, 5\pi/\sqrt{2}, \dots$$

このとき変形は体積変化を伴わないせん断変形のみで, 熱弾性効果の影響は受けず Q^{-1} は零となる。また, $\Omega_2 \rightarrow \infty$ のとき, 第一次モードに対応する Q^{-1} は熱弾性体の Rayleigh 波のエネルギー比損失になる。第二次以上の高次モードに関しては, 遮断周波数近傍で大きくなり Lamé の等容積周波数で一度零になっている。

図4は図2と同様にして表示した曲げ波動に対する位相速度の分散曲線である。第一次モードに関しては $\Omega_2 \rightarrow 0$ のとき, $c/c' \rightarrow 1$ となり, $\Omega_2 \rightarrow \infty$ のときは縦波動の場合と同様にそれぞれ Rayleigh 波の伝ば速度に近づく。第二次以上の高次モードについては縦波動の場合と同様である。

図5は図4に対応する曲げ波動のエネルギー比損失 Q^{-1} の周波数特性である。図3と同様に実線は断熱境界, 破線は等温境界の場合である。いずれの場合も第一次モードの Q^{-1} は低周波数域で大きな値をとっている。また $\Omega_2 \rightarrow \infty$ のときは Rayleigh 波となるので, 図3の縦波動の第一モードのエネルギー比損失と同じ値に近づく。第二次以上の高次のモードに関する Q^{-1} は, 縦波動の場合と同様で, 遮断周波数近傍で大きく, 曲げ波動に関する Lamé の等容積周波数 $\Omega_2 = \sqrt{2}\pi, 2\sqrt{2}\pi, 3\sqrt{2}\pi, \dots$ で零になっている。

5. 結 言

熱弾性平板の調和波動に関する解析を行い, 広範な周波数域で位相速度分散や熱弾性減衰を調べ, 次の結論を得た。

(1) 平板表面の熱的境界条件が一般的なニュート

ン則で与えられるとき, 熱弾性効果によって縦波動と曲げ波動とは互いに影響する。断熱境界あるいは等温境界の場合のみ, 縦波動と曲げ波動は独立に生ずる。

(2) 両波動とも位相速度に関しては, 断熱境界と等温境界の場合との間にほとんど差異はなく, いずれも古典理論の場合よりも若干大きくなる。

(3) エネルギー比損失に関しては熱的境界条件によって大きな差があり, 等温境界の場合のエネルギー比損失は断熱境界の場合に比べて $O(10^2)$ 程度大きな値を持つ。

(4) 熱弾性平板の場合も Lamé の等容積周波数が存在し, そこでは波動の熱弾性効果によるエネルギー比損失は零になる。

最後に, 本研究では熱弾性効果のみに注目したが, 波動エネルギーの損失をもたらし固体の内部摩擦の原因には粘弾性その他があり, これらとの関連については検討中である。

文 献

- (1) 台丸谷, 機論, 47-420, A (昭56), 834; Daimaruya, M. and Naitoh, M., *ACUSTICA*, 51-2 (1982), 124.
- (2) Love, A. E. H., *The Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., (1934), 307, Cambridge Univ. Press.
- (3) Lamb, H., *Proc. R. Soc., Ser. A*, 93 (1917), 114.
- (4) 例えば, Mindlin, R. D., *Proc. 1st Sym. Naval Struc. Mech.*, (1960), 199, Pergamon Press; Graff, K. F., *Wave Motion in Elastic Solids*, (1973), 431, Clarendon Press.
- (5) Nowacki, W. and Sokolowski, M., *Arch. Mech. Stos.*, 11-6 (1959), 715.
- (6) Deresiewicz, H., *Proc. 3rd U. S. Natio. Congr. Appl. Mech.*, (1958), 287; *Acta. Mech.*, 21-4 (1975), 329.
- (7) Boley, B. A. and Weiner, J., *Theory of Thermal Stress*, (1960), 27, John Wiley & Sons.
- (8) Kolsky, H., *Stress Waves in Solids*, (1963), 99, Clarendon Press.
- (9) Gazis, D. C. and Mindlin, R. D., *Trans. ASME, Ser. E*, 27-3 (1960), 541.
- (10) Lockett, F. J., *J. Mech. Phys. Solids*, 7 (1958), 71.
- (11) Deresiewicz, H., *J. Mech. Phys. Solids*, 9 (1961), 191.