降伏応力の分布関数を用いた非弾性構成式* (第 1 報, 塑性構成式の定式化)

新 津 靖*¹, 池 上 皓 三*¹

Inelastic Constitutive Equation on the Basis of the Distribution Function of Yield Stress (1st Report, Formulation of Plastic Constitutive Equation)

Yasushi NIITSU and Kozo IKEGAMI

In this paper, we propose the distribution function of the yield stress to characterize the inelastic behavior of metal. This inelastic model is consisted with infinite small cells of the ideal plastic material, which are placed in parallel. The distribution function of the yield stress means the content of infinite small cells. The integral constitutive equation for this model is derived under combined stress state. The stress strain relations for several strain histories, which include the sharp corner of the strain paths, are calculated. It is shown that this constitutive equation can simulate Bauschinger's effect and the delay phenomenon.

Key Words: Plasticity, Constitutive Equation, Combined Stress, Stress Strain Relation, Bauschinger's Effect, Delay Phenomenon

1. 緒 言

固体の非弾性変形挙動には主に時間非依存性を有する変形成分として定義される塑性変形と、時間依存性を有する粘性変形やクリープ変形、またはリラクゼーションが含まれる。

固体材料の構成関係は、上述した時間に依存しない変形成分と、時間に依存する変形成分を考え、それぞれの変形挙動についての構成関係を重ね合わせることで、全体の変形挙動を表現しようとするもの(重ね合わせモデル)がほとんどである。しかしながら、実際の材料では非弾性変形の進行が材料特性を変化させることから、これらの塑性変形と粘性変形は相互に影響を及ぼしていると考えられている。例えば、塑性変形による加工硬化が、クリープ速度に影響を及ぼしたり、クリープ変形が塑性変形の流動特性に影響を及ぼすといった現象が観察されている^{(1)~(3)}。このような観点から、多くの研究者らによって材料の変形挙動を統一的に取扱えるような手法、または、構成式が考察されてきた。これらの構成式は、大きく分けて三つの

流れがある。これらのうち、任意の進行条件を考慮しうるものとしては、以下のものがある。

(1) 塑性変形に用いられる降伏曲面の概念を粘性変形まで拡張した構成式。このような理論には、村上・大野モデル⁽⁴⁾、Chaboche モデル⁽⁵⁾、Miller モデル⁽⁶⁾などがある。

(2) 降伏曲面を考えず熱力学的な関係式から塑性変形と粘性変形を同時に取扱う、Endclonic theory⁽⁷⁾。

(3) 一つの固体を多数の性質の異なるものの集合として考え、個々の要素の塑性および粘性の特性からその固体の粘塑性挙動をモデル化するフラクションモデル⁽⁸⁾⁽⁹⁾。また、すべり面の方向を三次元的に考え、すべてのすべり面での変形の和を固体の変形であると考えるすべり理論⁽¹⁰⁾。

一方著者らは、引張圧縮の単純負荷条件下に対し、降伏応力の分布関数を用いた塑性構成式⁽¹¹⁾を導出した。そして、材料の加工硬化および軟化(バウシinger効果)を降伏応力の分布関数の変化として表現しうることを示した。しかしながら、組合せ応力下での変形挙動を表現することができなかった。そこで本報告では、この降伏応力の分布関数を用いた構成式を、組合せ応力下の変形挙動に適応できるように拡張を行った。さらに、簡単な形状の分布関数に対する組合せ変

* 昭和 62 年 3 月 16 日 東海支部第 36 期総会講演会において講演、原稿受付 昭和 61 年 9 月 12 日。

*¹ 正員、東京工業大学精密工学研究所 (〒227 横浜市緑区長津田町 4259)。

形挙動を計算した結果、この構成式により、 μ 荷重方向が変化するとき観察される遅れ現象をシミュレートすることが可能であることを示した。

2. 降伏応力の分布関数の物理的意味

図1に示すように、一つの固体材料を、 N 個の弾性率が等しく降伏応力が異なる弾完全塑性体を並列に重ね合わせたものとする。これがフラクションモデルの原形であるが、現在、各要素に移動硬化則や粘性を導入する試みが進められている⁽¹²⁾。

いま i 番目の要素の体積率を ϕ_i 、この要素にひずみ ε を与えたときの応力を σ_i とすると、このモデルの応力は

$$\langle \sigma \rangle = \sum_{i=1}^N \phi_i \sigma_i(\varepsilon), \quad \sum_{i=1}^N \phi_i = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。弾性率を E 、要素 i の降伏応力を Y_i とすれば、単純に引っ張った場合の弾塑性域での応力ひずみ関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \sum_j \phi_j E \cdot \varepsilon + \sum_k \phi_k Y_k \\ Y_j &> E \cdot \varepsilon, \quad Y_k < E \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(2)で右辺第1項は与えられたひずみに対し弾性状態にある要素による応力であり、第2項は、塑性域内に入った要素による応力を表している。いま、この状態から逆方向(圧縮方向)に再負荷した場合を考えると、各要素の変形状態の差によって生じる内部応力により、バウシinger効果に近い形の軟化が観察される。

式(1)の ϕ_i を連続化することにより、次式の応力ひずみ関係を得ることができる。

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \int_0^\infty \Psi(\xi) \sigma(\varepsilon, \xi) d\xi \\ \int_0^\infty \Psi(\xi) d\xi &= 1 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで ξ は一般的には要素を特徴づける連続的な変

数であるが、ここでは、式(2)の Y_i 、すなわち要素の降伏応力に一对一に対応する変数と考え、降伏応力の分布関数 $\Psi(\xi)$ の物理的意味を、降伏応力が ξ から $\xi + d\xi$ の間にある要素の割合が $\Psi(\xi)d\xi$ で与えられるものとする。また式(3)の $\sigma(\varepsilon, \xi)$ は、降伏応力が ξ から $\xi + d\xi$ の要素が、 ε のひずみによって生じる応力を表している。式(2)と同様に弾塑性域では式(3)は次式になる。

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \int_0^{\xi_p} \Psi(\xi) \xi d\xi + \int_{\xi_p}^\infty \Psi(\xi) E \cdot \varepsilon d\xi \\ \xi_p &= E \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 ξ_p は図2に示すように塑性状態にある成分と弾性状態にある成分の境界点を示している。

3. 降伏応力の分布関数を用いた構成式の組合せ応力状態への拡張

2章では、構成式を引張圧縮の単純負荷状態で考えていた。これは図1に示したように、要素を棒状のものと考えていたからである。一方、この降伏応力の分布関数を用いた構成式を三次元応力状態にも適用するものにするために、ここでは同一空間内に多数の立体要素が存在するものとする。今、考えている材料が、ミーゼス形降伏条件にしたがう要素で構成されていると仮定する。この場合、各要素のポアソン比は弾性変形や体積変化については ν 、塑性変形については $1/2$ である。このときのモデルの変形を理解するため、図3に示すような二つの降伏応力が異なる要素を重ね合わせたものを考え、これに引張負荷を加えて二つの要素に同じひずみを与える。要素1が塑性域、要素2が弾性域にあるとすると、ポアソン比の差により要素1には正の静水圧応力が、要素2には負の静水圧応力が、引張応力に重畳されることになる。ここで、各要素の応力とひずみを偏差成分と静水圧成分に分解することによりフックの法則は次のようになる。

図1 一次元並列要素モデルの応力とひずみ

図2 降伏応力の分布関数

$$S_{ij}=2Ge_{ij}, \sigma_{kk}=3K\varepsilon_{kk}$$

$$\sigma_{ij}=S_{ij}+\sigma_{kk}\delta_{ij}/3$$

$$\varepsilon_{ij}=e_{ij}+\varepsilon_{kk}\delta_{ij}/3$$

$$G=E/2(1+\nu)$$

$$K=E/3(1-2\nu)$$

.....(5)

ここで、静水圧成分に対する応力ひずみ関係は常に弾性的に成り立つものとする。一方偏差成分については、ミーゼス形材料の塑性変形を表現するのに便利な五次元直交偏差ベクトル空間(距離空間、内積空間)を用いて表すことにする。このときの応力とひずみの各成分は次の式で与えられる。

$$\bar{\varepsilon}_1=e_{11}$$

$$\bar{\varepsilon}_2=(e_{11}+2e_{22})/\sqrt{3}$$

$$\bar{\varepsilon}_3=(2/\sqrt{3})e_{12}$$

$$\bar{\varepsilon}_4=(2/\sqrt{3})e_{23}$$

$$\bar{\varepsilon}_5=(2/\sqrt{3})e_{31}$$

.....(6)

$$\bar{\sigma}_1=(3/2)S_{11}$$

$$\bar{\sigma}_2=(\sqrt{3}/2)(S_{11}+2S_{22})$$

$$\bar{\sigma}_3=\sqrt{3}S_{12}$$

$$\bar{\sigma}_4=\sqrt{3}S_{23}$$

$$\bar{\sigma}_5=\sqrt{3}S_{31}$$

.....(7)

式(6)、(7)で与えられる、偏差ベクトル成分に対するフックの法則は式(5)から次のようになる。

$$\bar{\sigma}=3E/2(1+\nu)\bar{\varepsilon}$$

$$[d\bar{\sigma}=3E/2(1+\nu)d\bar{\varepsilon}]$$

.....(8)

図3 二次元並列要素モデル

図4 パラメータξ上の応力分布

ここで、式(3)を組合せ応力条件に拡張するため、偏差応力ベクトルの各成分について式(3)が与えられるものとする。

$$\langle \bar{\sigma}_i \rangle = \int_0^\infty \Psi(\xi) \bar{\sigma}_i(\xi) d\xi \quad \text{.....(9)}$$

ここで、 $\langle \bar{\sigma}_i \rangle$ は系の偏差応力ベクトル成分であり、 $\bar{\sigma}_i(\xi)$ は降伏応力がξの要素の偏差応力ベクトルの成分である。すなわち、図4に示すように、連続的なパラメータξ上に五次元の応力ベクトル場が存在するものとする。

次に、 $\xi=\xi_c$ の要素について($\xi=\xi_c$ の断面)応力ベクトルとひずみベクトルの関係を求めてみる。ここで、ひずみベクトルは偏差ベクトル空間上の一点にあり、全要素に共通のものである。

この要素は半径ξ_cの超球面を降伏曲面としてもち、応力ベクトルはこの超球面の中または上を移動する。図5に示すように、 $|\bar{\sigma}| < \xi_c$ (弾性域内)または $(d\bar{\varepsilon} \cdot \bar{\sigma}) \leq 0$ (除荷および中立負荷)の条件では、ひずみ増分ベクトルと応力増分ベクトルの関係は式(8)の線形写像で与えられる。一方 $\bar{\sigma}$ が降伏応力に達すると $\bar{\sigma}$ は超球面に沿って、図6に示すように回転する。ここで、このときのひずみ増分ベクトル $d\bar{\varepsilon}$ を塑性成分 $d\bar{\varepsilon}_p$ (球面に対し垂直方向の成分)と弾性成分 $d\bar{\varepsilon}_e$ (円周方向成分)に分解し、この状態における応力ベクトル $\bar{\sigma}$ の

図5 要素ξ_cの弾性域内でのひずみ増分と応力増分の関係

図6 要素ξ_cの塑性状態でのひずみ増分と応力増分の関係

回転が弾性ひずみ成分によって生じるものと考え、

$$d\bar{\sigma} = E'(d\bar{\varepsilon} - d\bar{\varepsilon}_p)$$

$$E' = 3E/2(1+\nu)$$

.....(10)

ここで $d\bar{\sigma}$, $d\bar{\varepsilon}_p$ は要素 ξ_i に対する量である。塑性ひずみ $d\bar{\varepsilon}_p$ は次の式で与えられる。

$$d\bar{\varepsilon}_p = (d\bar{\varepsilon} \cdot \bar{\sigma}) \bar{\sigma} / \xi_i^2 \quad \text{.....(11)}$$

ここで、 Ψ および $\bar{\sigma}$ が ξ と $\bar{\varepsilon}$ のみの関数であるとすると式(10), (11)より系全体の応力増分とひずみ増分の関係は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} d\langle \bar{\sigma} \rangle &= \int_0^\infty \{ \Psi \cdot \partial \bar{\sigma} / \partial \bar{\varepsilon}_i \cdot d\bar{\varepsilon}_i \\ &\quad + \bar{\sigma} \cdot \partial \Psi / \partial \bar{\varepsilon}_i \cdot d\bar{\varepsilon}_i \} d\xi \\ &= \int_0^\infty \{ E' \Psi d\bar{\varepsilon} + \bar{\sigma} \cdot \partial \Psi / \partial \bar{\varepsilon}_i \cdot d\bar{\varepsilon}_i \} d\xi \\ &\quad - \int_0^{\xi_p} E' \Psi (d\bar{\varepsilon} \cdot d\bar{\sigma}) \bar{\sigma} / \xi_i^2 d\xi \end{aligned}$$

.....(12)

ここで、 ξ_p は塑性域と弾性域の境界点 (図2) であり、 $\partial \Psi / \partial \bar{\varepsilon}_i$ は変形による分布関数の変化を表しており加工硬化を表現しうる項を示している。実際には加工硬化は塑性ひずみや温度に依存すると考えるべきであろう。また、系全体の塑性ひずみ増分は

$$\begin{aligned} d\langle \bar{\varepsilon}_p \rangle &= d\bar{\varepsilon} - d\langle \bar{\sigma} \rangle / E' \\ &= \int_0^\infty \Psi \cdot \{ d\bar{\varepsilon} - d\bar{\sigma} / E' \} d\xi \\ &= \int_0^{\xi_p} \Psi \cdot \{ (d\bar{\varepsilon} \cdot d\bar{\sigma}) \bar{\sigma} / \xi_i^2 \} d\xi \quad \text{.....(13)} \end{aligned}$$

となり、各要素の塑性ひずみ増分に Ψ の重みをつけ

図7 薄肉円筒面の引張せん断応力とひずみ

図8 計算に用いた降伏応力の分布関数

た和 (期待値) として与えられる。

4. ひずみ経路が折れ曲がる場合の 塑性変形挙動

図7に示すような薄肉円筒試験片に軸方向負荷とねじり負荷を組合せて加える場合を考える。このときの応力とひずみは (σ, τ) , (ε, γ) で表される。この条件下での偏差ベクトルの各成分は次式で与えられる。

$$\bar{\varepsilon}_1 = 2/3(1+\nu)\varepsilon, \quad \bar{\varepsilon}_2 = 0$$

$$\bar{\varepsilon}_3 = \gamma/\sqrt{3}, \quad \bar{\varepsilon}_4 = 0, \quad \bar{\varepsilon}_5 = 0$$

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma, \quad \bar{\sigma}_2 = 0, \quad \bar{\sigma}_3 = \sqrt{3}\tau$$

$$\bar{\sigma}_4 = 0, \quad \bar{\sigma}_5 = 0$$

.....(14)

例として図8に示すようなステップ状の分布関数

$$\Psi(\xi) = \{ u(\xi - 50) - u(\xi - 550) \} / 500$$

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \cdots x \geq 0 \\ 0 & \cdots x < 0 \end{cases}$$

.....(15)

をもつ塑性体モデルを考える。ここでは、弾性域でもポアソン比は 1/2 と仮定し、ヤング率は 200 GPa とす

図9 引張圧縮の応力ひずみ曲線

図10 計算に用いた全ひずみ経路

図 11 応力経路

る。これに引張圧縮の負荷を加えたときの応力ひずみ曲線を図 9 に示す。さらに、同じモデルに図 10 に示すような、0.4% の $\bar{\epsilon}_1$ を与えた後、偏差ひずみベクトルの増分方向を変化させた場合について計算を行った。図 10 のひずみ経路に対する計算結果を図 11~13 に示す。図 11 は応力経路、12 はひずみ経路折り曲げ後生じた相当塑性ひずみ量と相当応力の関係、図 13 は塑性ひずみ経路を表している。図 11 の破線は半径 300 MPa の円弧を示している。この破線に最も近い点は、負荷 (a) に対する応力の軌跡である。図 12 において実線 (k) はバウシinger 曲線を、(a) は引張り後ねじったときの応力ひずみ曲線を表している。ここで (a) の状態は全要素が降伏状態にあるにもかかわらず、相当応力がいったん減少している(遅れ現象)。この原因は各要素によって、せん断ひずみによる応力ベクトルの回転角が異なるためと考えられる。つまり、Schwarz の不等式より

$$\left| \int_0^\infty \Psi(\xi) \bar{\sigma}(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^\infty \Psi(\xi) |\bar{\sigma}(\xi)| d\xi \cdots \cdots (16)$$

となり、この結果、上式の左辺で与えられる系全体(みかけの)の相当応力は、右辺の引張負荷時の最大応力 300 MPa より小さくなる。すなわち、この構成式では、実際の材料において観察される遅れ現象を、各要素間の応力ベクトルの方向差として表現している。

5. 結 言

無限個の弾完全塑性体要素から構成される塑性体モデルを提唱した。このモデルを定式化するために、降伏応力の分布関数を導入し、積分形の塑性構成式を導き出した。さらに、この塑性構成式を、任意の組合せ応力状態での変形挙動を表現しうるような増分形式に変換した。この構成式を用いて、ステップ状の分布関数

図 12 後続塑性ひずみ量と相当応力の関係

図 13 後続塑性ひずみ経路

について、ひずみ増分方向を大きく変化させる負荷に対する応力ひずみ曲線を計算した結果、バウシinger 効果や、負荷方向変化による遅れ現象を表現しうるということがわかった。

文 献

- (1) 新津・池上, 機論, 50-451, A (昭 59), 424.
- (2) 新津・池上, 機論, 50-453, A (昭 59), 996.
- (3) 佐橋・ほか 2 名, 機論, 52-476, A (昭 61), 1126.
- (4) 大野・ほか 2 名, 機論, 51-470, A (昭 60), 2349.
- (5) Chaboche, J. L. and Rousselier, G., *Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol.*, 105 (1983), 153.
- (6) Miller, A., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, 98 (1976), 97.
- (7) Valanis, K. C. and Wu, H. C., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 105 (1975), 67.
- (8) Duwez, P., *Physical Rev.*, 47 (1935), 494.
- (9) Besseling, J. F., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 25 (1958), 529.
- (10) Batdorf, S. B. and Budianski, B., *NACA Tech. Rep. No.* 1371 (1950), 1.
- (11) 新津・池上, 日本塑性加工学会第 33 回塑性加工連合講演会講演論文集 (昭 57), 215.
- (12) 鈴木・土屋, 機論, 50-453, A (昭 59), 1026.