束試験を利用した繊維強度分布の推定*

合 田 公 一^{*1}, 山 本 匡 章^{*2}, 福 永 秀 春^{*1}Estimation of Weibull Parameters of Fiber Strength
by Tensile-Test of the Bundle

Koichi GODA, Masaaki YAMAMOTO, and Hideharu FUKUNAGA

Using the strength data of individual fiber fracture caused by the tensile-test of the bundle, a method for estimating the Weibull parameters has been proposed. This method has shown that the weakest fiber fractures firstly in a bundle, and the strength of the fractured fiber scatters by trying the bundle-test several times. That is to say, the strength is a random variable based on the concept of the order statistics, so the likelihood functions and equations necessary to estimate the Weibull parameters can be found on the condition that the fiber strength is given by a single or multi-modal Weibull distribution function. A bundle composed of ten boron fibers was tensile-tested, and the fiber strength equivalent to the first failure was calculated. The result is that the Weibull parameters estimated by the present method were almost in good agreement with the parameters obtained from the single-filament tests. To investigate the accuracy of the Weibull estimates, the present method was additionally compared with the method proposed by Chi, etc., from the simulation data on the basis of the Monte-Carlo method.

Key Words: Strength, Bundle, Boron Fiber, Weibull Distribution, Order Statistics, Maximum Likelihood Estimation, Monte-Carlo Simulation

1. 緒 言

カーボン繊維やボロン繊維などに代表される複合材料強化用セラミック繊維の強度は、一般に確率変数として扱われ、多くの場合その分布関数にワイブル分布が用いられる⁽¹⁾。そしてそれらのワイブルパラメータは、たとえば JIS 規格などに準じて行われる単繊維引張試験の結果から推定される。Chi ら⁽²⁾はこのような単繊維の試験方法の困難さを指摘するとともに、繊維束試験によって単繊維の強度を推定する手法を提案した。しかしながらこの手法は繊維本数が多い場合に利用できるものであり、また Chi ら自ら指摘しているように束ひずみの測定が間接的にしか与えられないという点で問題を残している。

本研究ではこれに対し繊維束試験の際に生じる個々の繊維破壊の強度データを利用して、単繊維強度分布を推定する手法を提案する。すなわち、順序統計⁽³⁾の概念を利用し、最初の 1 本の繊維が破壊するまで試験を行う。これらの試験データを蓄積することによって未破壊の繊維をも含む全体の繊維強度分布を推定しよ

うとするものである。ここではボロン繊維束を用い、この手法の正当性を実証するとともに、シミュレーションデータに基づいて Chi らの手法と比較を行い、本手法の推定精度の有効性について検討した。

2. 解 析 方 法

2.1 繊維の強度分布関数 解析に当たり、対象とする繊維束は以下の前提を満足するものとして議論する。

(1) 束を構成する個々の繊維は多数の欠陥を含み、それらの最弱欠陥によってその強度は決定される。なお、このとき欠陥同士の相互干渉は無視できるとする。

(2) 束試験の際、個々の繊維は均等に応力が配分される。

前提(1)にあるように、多くのセラミック繊維の強度分布関数 $F(\sigma)$ は単純引張応力 σ に対し、次式に示す単一ワイブル分布が用いられてきた。ここでは簡単のため 2 母数として扱う。

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left\{-\frac{L}{L_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 m : 形状母数, σ_0 : 尺度母数, L : ゲージ長さ, L_0 : ワイブル母数の推定に用いたゲージ長さであ

* 昭和 62 年 4 月 3 日 第 64 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 61 年 9 月 22 日。

^{*1} 正員、広島大学工学部 (〒724 東広島市西条下見)。

^{*2} 学生員、広島大学大学院。

してその上に繊維を1本ずつ並べ束試験片を作製した。これによって繊維同士の接触や、傾きによる曲げの影響を無くすることができる。このとき束試験片20個、1束当たりの繊維本数は10本とし、ゲージ長さ50 mm、ひずみ速度0.01/minでインストロン形引張試験機(島津製、オートグラフIS-5000)を用いて試験を行った。さらに最初に破壊した繊維の破面をSEM(日立製、S-510形)によって観察し、破壊起点となる欠陥を1本ずつ調査した。

4. 結果および考察

4.1 ワイブルパラメータ 束試験中に最弱繊維が破壊すると、全断面積の急激な減少のために荷重低下が生じる。繊維数が増大するところの低下量が小さくなるため、AE計測によって低下点を確認する手法も提示されている⁽⁶⁾が、本研究ではその本数が10本と小さいためにロードセルおよびアンプを介したレコーダ上で十分に確認することができた。このとき最弱繊維の破断直前の束荷重を $P^{(1)}$ とすると、 $\sigma^{(1)}$ は

$$\sigma^{(1)} = \frac{P^{(1)}}{NA} \quad \text{..... (13)}$$

となる。ここで、 A : 繊維の断面積である。前報⁽⁵⁾と同様に、用いた繊維は表面の欠陥を起点として破壊するものと、内部の欠陥を起点として破壊するものの2種類が観察された。したがって以後ボロン繊維の強度分布には式(2)を用い、 $k=2$ として扱う。しかしながら、最初の1本が破壊した瞬間にほかの数本あるいはすべてが破壊し、最初に破壊した繊維が確認できない場合も認められた。これはボロン繊維が内部欠陥で破壊するとき、その強度のばらつきが非常に少なくそのために生じたものと考えられる。しかしここではこのようなデータを破壊応力および破壊原因の種類には関係しないとみなし、破壊原因不明データとして扱う。このようなデータを含んだ標本に対し、村田ら⁽⁴⁾はその母数の推定法として多段最尤法に基づく修正EMアルゴリズム法を提案した。この手法は個々の破壊原因による故障率関数の比率を重みとして、破壊原因不明データ数を分割しているところに特徴を有する。ここではこの手法を用いて、パラメータの推定を行う。順序統計量 $\sigma^{(i)}$ に対し、その尤度方程式は欠陥 $i(i=1, 2)$ について次式のように書くことができる。

表1 束試験および単繊維試験より得られたワイブルパラメータ

Method	Sample n	G.L. mm	Parameter			
			m_1	m_2	σ_{01} GPa	σ_{02} GPa
Bundle	20	50	8.20	24.15	4.55	4.22
Single-filament	31	50	8.42	44.74	5.66	4.15
	33	200	11.63	45.39	4.77	4.15

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\delta_{i,j}}{m_i} + \sum_{j=1}^n \delta_{i,j} \ln \sigma_j^{(1)} - \frac{\sum_{j=1}^n \delta_{i,j} \sum_{j=1}^n \sigma_j^{(1)m_i} \ln \sigma_j^{(1)}}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^{(1)m_i}} &= 0 \\ \sigma_{0i} &= \left(\frac{N}{\sum_{j=1}^n \delta_{i,j} \sum_{j=1}^n \sigma_j^{(1)m_i}} \right)^{1/m_i} \end{aligned} \right\} \quad \text{..... (14)}$$

ここで、

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, (i=1, j=1, \dots, n_1 \text{ および } i=2, j=n_1+1, \dots, n_1+n_2) \\ 0, (i=1, j=n_1+1, \dots, n_1+n_2 \text{ および } i=2, j=1, \dots, n_1) \\ \frac{\lambda_{i,j}}{\sum_{i=1}^2 \lambda_{i,j}} (j=n_1+n_2+1, \dots, n) \end{cases} \quad \text{..... (15)}$$

ただし、

$$\lambda_{i,j} = \frac{m_i}{\sigma_{0i}} \left(\frac{\sigma_j^{(1)}}{\sigma_{0i}} \right)^{m_i-1} \quad \text{..... (16)}$$

である。 n_1, n_2 は総試験片数 n のうち最弱繊維が表面および内部欠陥を原因として破壊する試験片数である。本研究では $n=20$ に対し、 $n_1=10, n_2=2$ 、破壊原因不明データ数 $(=n-n_1-n_2)8$ が得られた。このときまず $\sigma_1^{(1)}, \dots, \sigma_{n_1+n_2}^{(1)}$ のデータを式(12)に採用して初期値を求め、それを式(14)の第1式に代入しパラメータの推定値が収束するまで何度も繰返した。このようにして得られたワイブルパラメータの推定値を表1に示す。比較のために、単繊維試験結果⁽⁵⁾から得られたパラメータもあわせて示す**1。

表1よりワイブルパラメータはおおまかであるが、単繊維試験の結果とよく似た傾向を示して推定されていることがわかる。このとき内部欠陥を原因とする m_2 は単繊維結果と比べいくほど低い値が得られているが、これは内部欠陥による破壊データ数がさほど得られずそのために生じる推定値の変動⁽⁴⁾によるものと考えられる。しかしながら本手法によって、ある程度まで単繊維の強度分布を推定することが可能であると思われる。

4.2 シミュレーションによるChiらの手法との比較 Chiら⁽²⁾は繊維束の荷重-ひずみ線図からワイブルパラメータを推定する手法を提案した。このとき繊維強度は2母数ワイブル分布に従うものとして束荷重 P を次式のように表した。

$$P = \varepsilon E_f A N \exp \left\{ - \frac{L}{L_0} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^m \right\} \quad \text{..... (17)}$$

**1 G.L. 200 mmで得られた尺度母数は $\sigma_{0i}(i=1, 2)$ に $(L/L_0)^{-1/m_i}$ を乗じることでG.L. 50 mmのものに換算したものである。

ここで、 ε ：ひずみ、 E_f ：繊維の弾性率、 $\varepsilon_0 = \sigma_0/E_f$ である。 $dP/d\varepsilon=0$ のとき、束は最大荷重を示すので、それに相当するひずみを $\varepsilon_{\max}$ とすると、

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0 \left(\frac{L}{L_0} m \right)^{-1/m} \dots\dots\dots (18)$$

となる。式(18)を式(17)に代入することによって、最大束荷重 $P_{\max}$ が次式のように得られる。

$$P_{\max} = ANE_f \varepsilon_0 \left(\frac{L}{L_0} m \right)^{-1/m} \exp\left(-\frac{1}{m}\right) \dots\dots\dots (19)$$

したがって、 $P_{\max}$ と $\varepsilon_{\max}$ の比より、

$$m = \left\{ \ln \left(\frac{\varepsilon_{\max} E_f AN}{P_{\max}} \right) \right\}^{-1} \dots\dots\dots (20)$$

が成立する。しかしこの手法の基になる式(17)の与え方は Daniels⁽⁷⁾ や Phoenix⁽⁸⁾ が指摘しているように、繊維数が大きな束で成立するものであり、本実験のような繊維数のときに成立するかどうかかわからない。たとえば少数繊維束では最弱繊維が破壊した時点で束は最大荷重を示すがしばしば生じ、このような場合、 $P_{\max} = \varepsilon_{\max} E_f AN$ となり式(20)は使用できなくなるからである。

そこで繊維本数 N に伴うワイブルパラメータの推定精度について、Chi らおよび本手法をモンテカルロ法に基づくシミュレーションデータ⁽⁹⁾によって比較検討する。ここで Chi らの手法は単一ワイブル分布にしか使用できないため、式(11)に基づく推定結果と比較を行う。シミュレーションに用いる設定値は Chi らが推定した Thornel-300 カーボン繊維のデータとする。すなわち、 $m=4.5$ 、 $\varepsilon_0=0.026$ ($L=1$ mm に相当)、 $E_f=225$ GPa、繊維直径 $7\mu\text{m}$ である。ここではゲージ長さ 60 mm を用いる。シミュレーションによるワイブルパラメータの推定は次のように行った。

(1) 一様乱数から逆関数法によってワイブル乱数に従う繊維強度 $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(N)}$ ($N=5, 10, 20, 50, \dots, 10000$) を発生させる。

(2) ひずみ ε を適度に与え、 εE_f が $\sigma^{(i)}$ に達したとき $N=N-1$ とし、束荷重 ($P=\varepsilon E_f AN$)-ひずみ (ε) 線図を作成する。

(3) これを n 回 ($=5, 20, 30, 50, 100$) 繰返し、ワイブルパラメータを推定する。

Chi らの手法は束試験 1 回によってワイブルパラメータが得られるので n 回の平均値として本手法と比較する。また少数繊維束において Chi らの手法を用いる際、最弱繊維の破壊時に最大荷重を示す場合はデータの対象から除外した。

図 2 にこのようにして求めたワイブルパラメータ (m

値)の推定値に及ぼす繊維本数の影響について示す。これより Chi らの手法は N が大きくなるにつれて設定値に近づくことがわかる。これは Daniels⁽⁷⁾ や Phoenix⁽⁸⁾ が指摘したように、 N が大きければ、束強度は母分散を N で除した分散をもつ正規分布に近づくためであろうと思われる。また束試験の試行回数 n の影響はさほど受けないのが今一つ大きな特徴である。これに対して本手法は N の大小にかかわらずその推定値の収束性はほとんど変化なく、 $N=100\sim 200$ 当たりで Chi らの手法による推定値の収束性と反転していることがわかる。これは対象とするデータ数 ($=n$) が N の大きさと無関係に一定だからと思われる。これゆえに n が増加すれば、推定値の収束性は良好になっていくことが認められる**2。以上より繊維本数が $100\sim 200$ 本程度以上の束では Chi らの手法が、それ以下では本手法が有効なものと判断される。

図 2 シミュレーションによるワイブルパラメータの推定値と繊維本数 N の関係 (m ：設定値、 $\bar{m}$ ：推定値)

**2 σ_0 値もまた同様の傾向を示したが、両手法とも m 値よりばらつきの度合いが小さかった。

5. 結 言

順序統計を利用し、束試験の際に生じる個々の繊維破壊データからワイブルパラメータを推定する手法を提示した。このとき10本から成るボロン繊維束を用いて試験および解析をしたところ、単繊維試験から得られる推定値とある程度同様な傾向にある値が得られた。またこの手法とChiらが提示した手法をモンテカルロシミュレーションによって比較・検討した結果、繊維数の多い束では後者の手法が、少ない束では前者の手法がそれぞれ設定値への収束性に優れていることがわかった。

文 献

- (1) 例えば Jones, J. B., ほか2名, *J. Mater. Sci.*, **15** (1980), 2455., Beetz, C. P. Jr., *Fib. Sci. Tech.*, (1984), 3649.
- (2) Chi, Z., ほか2名, *J. Mater. Sci.*, **19** (1984), 3319.
- (3) 石川, 材料, **24-260** (昭50), 477.
- (4) 村田・ほか3名, 機論, **52-473, A** (昭61), 27.
- (5) 合田・ほか2名, 機論, **52-480, A** (昭61), 1848.
- (6) Hamstad, M. A. and Moore, R. L., *J. Compos. Mater.*, **20** (1986), 46.
- (7) Daniels, H. E., *Proc. R. Soc. Ser. A*, **183** (1945), 405.
- (8) Pheonix, S. L., *Fib. Sci. Tech.*, **7** (1974), 15.
- (9) 市田・鈴木, 信頼性の分布と統計, (昭59), 80, 日科技連出版.