無限板内に存在する2個の円形充てん材と 刃状転位の相互作用について*

(第1報, 転位が x 軸に対し傾いている場合)

佐々木 秀 一^{*1}, 塩 谷 駿 介^{*2}

On the Interaction between an Edge Dislocation and Two Circular Inclusions in an Infinite Medium

(1st Report, With the Glide Plane Inclined to the x -axis)

Shuichi SASAKI and Shunsuke SHIOYA

In this paper, we consider the interaction between an edge dislocation, placed on the x -axis and having the glide plane inclined to the x -axis, and two circular inclusions in an infinite medium. They are placed in the order inclusion-inclusion-edge dislocation. The Airy's stress function is used with bipolar coordinates, for convenience. The solution is constructed by considering the relation between the real-edge dislocation and the imaginary one. The dislocation has a stable equilibrium position or an unstable equilibrium position at some intermediate distance from the inclusions under some combinations of elastic constants. The equilibrium positions are also affected by the inclination of glide plane.

Key Words: Elasticity, Edge Dislocation, Circular Inclusion, Stress Function, Bipolar Coordinates, Perturbation Method, Glide Plane

1. 緒 言

金属材料中に含まれる, 空孔, 介在物, 析出物等の近傍に転位が存在するとき, 転位は, これらの異質物の影響を受けることはよく知られている。したがって, 異質物の影響による転位の力学的挙動を知ることは材料強度の問題を検討するうえで重要であると考えられる。刃状転位と異質物の相互作用に関する弾性力学的研究としては, すでに, 異質の半無限板を接合した場合における接合境界の影響を取扱った報告⁽¹⁾, 1個の円形充てん材と1個の刃状転位を含む無限板⁽²⁾⁽³⁾あるいは半無限板⁽⁴⁾⁽⁵⁾の相互作用に関する報告等がある。さらに, 最近, 吉岡ら⁽⁶⁾⁽⁷⁾は無限板が1個の刃状転位と1個の円孔および1個の円形充てん材を含む場合の相互作用について報告している。同様に福崎ら⁽⁸⁾⁽⁹⁾は無限板中の x 軸上に配列された1個の刃状転位と2個の円形充てん材を含む場合の相互作用について検討し, 転位の釣合位置ならびに二次的作用力は充てん材の寸法比および剛性率比に大きく影響されるが, ポアソン比の影響は比較的小さいこと, および剛性率比の

組合せにより釣合位置が存在する場合と存在しない場合があることなどを明らかにしている。なおこれらの報告では転位のすべり面は x 軸と一致している。

本論文では, 無限板内に存在する2個の円形充てん材と1個の刃状転位が, x 軸上に充てん材-充てん材-転位の順に配列されかつ, すべり面が配列軸に対し傾いている場合について解析を行い, すべり面の傾きが変化することによって二次作用力, および釣合位置がどのように変わるかを検討している。解析はAiryの応力関数を用い, 未知係数の決定にあたっては摂動法を採用している。最後に, 数値計算を行い結果を図示したが, 二次作用力および釣合位置は転位のすべり方向の影響を顕著にうけている。

2. 基 礎 式

直角座標 (x, y) と双極座標 (ξ, η) の関係は次式で与えられる。

$$z = a \coth(\zeta/2) \cdots \cdots \cdots (1)$$

ここに, $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ ($-\infty < \xi < \infty$, $-\pi \leq \eta \leq \pi$), a は正の実数, 写像拡大率 J は, $J = a/(\cosh \xi - \cos \eta)$ である。よって, 式(1)より, $x = J \sinh \xi$, $y = -J \sin \eta$ と表される。

* 昭和61年9月26日 日立地方講演会において講演, 原稿受付 昭和61年11月19日。

*¹ 学生員, 防衛大学校 (〒239 横須賀市走水1-10-20)。

*² 正員, 防衛大学校。

双極座標と幾何学的形状の関係は図1において、右側の充てん材縁(充てん材1)を $\xi=\xi_1$ 、左側の充てん材縁(充てん材2)を $\xi=-\xi_2$ 、刃状転位の位置を($\xi=\alpha, \eta=0$)で表せば、次の諸式で与えられる。

$$\bar{a}_1 = a/\sinh \xi_2, \bar{a}_2 = a/\sinh \xi_1, c = a \left(\frac{\cosh \xi_2}{\sinh \xi_2} + \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha - 1} \right), d = a(\cosh \xi_2/\sinh \xi_2)$$

Airy の応力関数 κ を双極座標を用いて表せば、

$$(\partial^4/\partial \xi^4 + 2\partial^4/\partial \xi^2 \partial \eta^2 + \partial^4/\partial \eta^4 - 2\partial^2/\partial \xi^2 + 2\partial^2/\partial \eta^2 + 1)(X/J) = 0 \quad (2)$$

応力成分 $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$ は次の諸式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a\sigma_\xi &= [(\cosh \xi - \cos \eta) \partial^2/\partial \eta^2 - \sinh \xi \partial/\partial \xi - \sin \eta \partial/\partial \eta + \cosh \xi](X/J) \\ a\sigma_\eta &= [(\cosh \xi - \cos \eta) \partial^2/\partial \xi^2 - \sinh \xi \partial/\partial \xi - \sin \eta \partial/\partial \eta + \cos \eta](X/J) \\ a\tau_{\xi\eta} &= -(\cosh \xi - \cos \eta) \partial^2/\partial \xi \partial \eta (X/J) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

また、変位成分 u_ξ, u_η は一般化された平面応力状態において

$$\left. \begin{aligned} 2G_1 u_\xi &= [(\kappa_1 - 1)/2][\partial/\partial \xi - \sinh \xi/(\cosh \xi - \cos \eta)](X/J) \\ &\quad - [(\kappa_1 + 1)/4][\partial/\partial \eta - \sin \eta/(\cosh \xi - \cos \eta)](Q/J) \\ 2G_1 u_\eta &= [(\kappa_1 - 1)/2][\partial/\partial \eta - \sin \eta/(\cosh \xi - \cos \eta)](X/J) \\ &\quad + [(\kappa_1 + 1)/4][\partial/\partial \xi - \sinh \xi/(\cosh \xi - \cos \eta)](Q/J) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)において Q は変位関数で次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{Q}{J} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 1 \right) \left(\frac{X}{J} \right), \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 1 \right) \left(\frac{X}{J} \right) = -4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{X}{J} \right) \quad (5)$$

ここに、

$$\kappa_1 = \begin{cases} 3-4\nu & ; \text{平面ひずみ} \\ (3-\nu)/(1+\nu) & ; \text{平面応力} \end{cases}$$

G_1 は剛性率、 ν はポアソン比である。問題の境界条件は、母材と充てん材が完全接着の状態にあり、かつ、

外力が働かないものとするば、

(i) $\xi=\xi_1$ において

$$\sigma_\xi = \bar{\sigma}_\xi, \tau_{\xi\eta} = \bar{\tau}_{\xi\eta} \quad (6)$$

$$u_\xi = \bar{u}_\xi, u_\eta = \bar{u}_\eta \quad (7)$$

(ii) $\xi=-\xi_2$ において

$$\sigma_\xi = \bar{\sigma}_\xi, \tau_{\xi\eta} = \bar{\tau}_{\xi\eta} \quad (8)$$

$$u_\xi = \bar{u}_\xi, u_\eta = \bar{u}_\eta \quad (9)$$

(iii) 無限遠において

$$\sigma_\xi = \sigma_\eta = \tau_{\xi\eta} = 0 \quad (10)$$

(iv) $\xi=\alpha, \eta=0$ に刃状転位が存在する。

ここに、“ $\bar{}$ ”、“ $\bar{}$ ” は、それぞれ充てん材1、充てん材2に関する記号を表す。

3. 応力関数の導入

所要の応力関数は、問題の対称性を考慮すれば、次の諸式で与えられる。

$$\begin{aligned} X/J &= D[\cos \omega(X_{01}/J + X_{11}/J) \\ &\quad + \sin \omega(X_{02}/J + X_{12}/J)] \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{X}/J &= D[\cos \omega(\bar{X}_{01}/J + \bar{F}\bar{X}_{11}/J) \\ &\quad + \sin \omega(\bar{X}_{02}/J + \bar{F}\bar{X}_{12}/J)] \quad (12) \end{aligned}$$

$$\bar{X}/J = D\bar{F}(\cos \omega\bar{X}_{11}/J + \sin \omega\bar{X}_{12}/J) \quad (13)$$

ここに、 $D = G_1 b_a/\pi(\kappa_1 + 1)$ 、 $\bar{D} = \bar{G}_1 \bar{b}_a/\pi(\bar{\kappa}_1 + 1)$ 、 $\bar{D} = \bar{G}_1 \bar{b}_a/\pi(\bar{\kappa}_1 + 1)$ 、 $\bar{F} = \bar{D}/D$ 、 $\bar{F} = \bar{D}/D$ 、また、 b_a はバースベクトルである。

式(11)および式(12)において X_{01}/J 、 X_{02}/J 、 $\bar{X}_{01}/J$ および $\bar{X}_{02}/J$ は図2に示すように無限板内に1個の円形充てん材(充てん材2)と一個の刃状転位が存在する場合の解であり、鏡像原理を用いて(図中 O_2 に鏡像転

図1 幾何学的形状

図2 1個の充てん材と刃状転位

位がある), 次の諸式で表される⁽²⁾.

$$X_{01} = (1/2i) \{ -(z_1 - z_1^*) \log(z_1 z_1^*) + (\tilde{D}/2) [(z_2 - z_2^*) \log(z_2 z_2^*) - (z_3 - z_3^*) \log(z_3 z_3^*)] - [2/(z_2 z_2^*)] \\ \times [(z_2^2 - z_2^{*2}) \tilde{A} - 2(z_2 - z_2^*) \tilde{B}] - \tilde{E} (z_3 - z_3^*) / (z_3 z_3^*) + (\tilde{C}/2) [(z_2 + z_2^*) \log(z_2/z_2^*) \\ - (z_3 + z_3^*) \log(z_3/z_3^*)] + \tilde{L} \log(z_3/z_3^*) \} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$X_{02} = (1/2) \{ (z_1 + z_1^*) \log(z_1 z_1^*) - (\tilde{D}/2) [(z_2 + z_2^*) \log(z_2 z_2^*) - (z_3 + z_3^*) \log(z_3 z_3^*)] - [2/(z_2 z_2^*)] \\ \times [(z_2^2 + z_2^{*2}) \tilde{A} - 2(z_2 + z_2^*) \tilde{B}] + \tilde{E} (z_3 + z_3^*) / (z_3 z_3^*) - (\tilde{C}/2) [(z_2 - z_2^*) \log(z_2/z_2^*) \\ - (z_3 - z_3^*) \log(z_3/z_3^*)] + 2\tilde{F} \log(z_2 z_2^*) - \tilde{M} \log(z_3 z_3^*) \} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\bar{X}_{01} = (1/4i) \{ (\tilde{D} - 2)(z_1 - z_1^*) \log(z_1 z_1^*) - [\tilde{C}(z_1 + z_1^*) + \tilde{H}] \log(z_1/z_1^*) \} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\bar{X}_{02} = (1/4) \{ -(\tilde{D} - 2)(z_1 + z_1^*) \log(z_1 z_1^*) + \tilde{C}(z_1 - z_1^*) \log(z_1/z_1^*) - \tilde{H} \log(z_1 z_1^*) - 4\tilde{N} z_3 z_3^* \} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに, z^* は z の共役複素数である. また, $i = \sqrt{-1}$,

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= [(\beta^2 - 1)/(2\beta^3)] \bar{a}_1 \bar{\beta} / \bar{\omega}, \quad \tilde{B} = [(\beta^2 - 1)^2/(4\beta^4)] \bar{a}_1^2 \bar{\beta} / \bar{\omega}, \quad \tilde{C} = \bar{\lambda} / \bar{\mu} - \bar{\beta} / \bar{\omega} \\ \tilde{D} &= \bar{\lambda} / \bar{\mu} + \bar{\beta} / \bar{\omega}, \quad \tilde{E} = \bar{a}_1^2 \bar{\beta} / \bar{\omega}, \quad \tilde{F} = [\bar{a}_1(\beta^2 - 1)/\beta] \bar{\beta} / \bar{\omega}, \quad \tilde{H} = 2\tilde{C} \bar{a}_1(\beta^2 - 1)/\beta \\ \tilde{L} &= \tilde{C} \bar{a}_1 / \beta, \quad \tilde{M} = [(2\beta^2 - 1) \bar{\beta} / \bar{\omega} - 2/(\bar{\mu} \bar{\gamma} \bar{F}) - 1] \bar{a}_1 / \beta, \quad \tilde{N} = \bar{\beta} / (\bar{\mu} \bar{\gamma} \beta \bar{a}_1), \quad \beta = c / \bar{a}_1 \\ x^* &= (x_1 - 1)/(x_1 + 1), \quad \bar{\gamma} = (x^* - 1) - \bar{x}^* / \bar{F}, \quad \bar{\lambda} = (x^* + 1) - (\bar{x}^* + 1) / \bar{F} \\ \bar{\mu} &= (x^* - 1) - (\bar{x}^* + 1) / \bar{F}, \quad \bar{\beta} = (x^* - 1) - (\bar{x}^* - 1) / \bar{F}, \quad \bar{\omega} = (\bar{x}^* + 1) - (\bar{x}^* - 1) / \bar{F} \end{aligned}$$

一方, 関数 X_{11}/J , X_{12}/J , $\bar{X}_{11}/J$, $\bar{X}_{12}/J$, $\hat{X}_{11}/J$, および $\hat{X}_{12}/J$ は, 式(14)~(17)で与えられた境界条件(ii)および(iv)を乱さずかつ境界条件(i), (iii)を満足させるために導入した解であり, 次の諸式で与えられる.

$$X_{11}/J = {}^1D \sin \eta + \sum_{n=1}^{\infty} {}^1\varphi_n(\xi) \sin n\eta \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$X_{12}/J = {}^2D \sinh \xi + B_0 \xi (\cosh \xi - \cos \eta) + K (\cosh \xi - \cos \eta) \log (\cosh \xi - \cos \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} {}^2\varphi_n(\xi) \cos n\eta \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\bar{X}_{11}/J = \sum_{n=1}^{\infty} {}^1\bar{\varphi}_n(\xi) \sin n\eta \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\bar{X}_{12}/J = {}^1\bar{D} \sin \eta + \sum_{n=1}^{\infty} {}^1\bar{\varphi}_n(\xi) \sin n\eta \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\hat{X}_{12}/J = {}^2\hat{D} \sinh \xi + \sum_{n=1}^{\infty} {}^2\hat{\varphi}_n(\xi) \cos n\eta \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\bar{X}_{12}/J = {}^2\bar{D} \sinh \xi + \sum_{n=1}^{\infty} {}^2\bar{\varphi}_n(\xi) \cos n\eta \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^j\varphi_n(\xi) &= {}^jA_n \cosh(n+1)\xi + {}^jB_n \cosh(n-1)\xi + {}^jC_n \sinh(n+1)\xi + {}^jD_n \sinh(n-1)\xi \\ &\quad (n \geq 1) \\ {}^j\bar{\varphi}_n(\xi) &= {}^j\bar{A}_n e^{-(n+1)\xi} + {}^j\bar{B}_n e^{-(n-1)\xi} \quad (n \geq 1), \quad {}^j\bar{\varphi}_n(\xi) = {}^j\bar{A}_n e^{(n+1)\xi} + {}^j\bar{B}_n e^{(n-1)\xi} \quad (n \geq 1) \\ \text{ただし, } {}^j\bar{B}_1 &= {}^j\bar{B}_1 = {}^1B_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに, $j=1, 2$, また, ${}^jD, {}^j\bar{D}, {}^j\hat{D}$ は剛体変位, ${}^jA_n, {}^jB_n, {}^jC_n, {}^jD_n, {}^j\bar{A}_n, {}^j\bar{B}_n, {}^j\hat{A}_n, {}^j\hat{B}_n, B_0, K$ は, 未知係数である. さらに式(14), (15)で与えられた X_{01} および X_{02} を $\xi > \alpha$ の範囲で, η に関してフーリエ展開すれば,

$$X_{01}/J = F_0 \sin \eta + \sum_{n=1}^{\infty} {}^1\varphi_{n,0}(\xi) \sin n\eta \quad \dots\dots\dots (25)$$

$${}^1\varphi_{n,0}(\xi) = {}^1P_n e^{-(n+1)\xi} + {}^1R_n e^{-(n-1)\xi} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$X_{02}/J = H e^\xi + L e^{-\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} {}^2\varphi_{n,0}(\xi) \cos n\eta \quad \dots\dots\dots (27)$$

$${}^2\varphi_{n,0}(\xi) = {}^2P_n e^{-(n+1)\xi} + {}^2R_n e^{-(n-1)\xi} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$F_0 = \log[2/(\cosh \alpha - 1)] - \alpha + (\tilde{D}/2) \{ \log[(\cosh \gamma_2 - 1)/(\cosh \gamma_1 - 1)] + \gamma_1 - \gamma_2 \} \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^1P_n &= \{ 1/[2(n+1)] \} \{ (1 - e^{-(n+1)\gamma_1}) (\tilde{L} - \tilde{D} - \tilde{C}d) + (1 - e^{-(n+1)\gamma_2}) (\tilde{D} + \tilde{C}f) \\ &\quad + 2(e^{-(n+1)\alpha} - 1) + [1/(2n)] \{ (1 - e^{-n\gamma_1}) [\tilde{C}(d+1) - \tilde{L}] - (1 - e^{-n\gamma_2}) \tilde{C}(f+1) \} \\ &\quad + e^{-n\gamma_2} (1 - e^{-\gamma_2})^2 [\tilde{A} + \tilde{B}(1 - e^{-\gamma_2})] + (\tilde{E}/4) (1 - e^{-\gamma_1})^3 e^{-(n-1)\gamma_1} \quad (n \geq 1) \\ {}^1R_1 &= (1/2) (1 - e^{-\gamma_1}) [\tilde{C}(d+1) - \tilde{L}] + (1 - e^{-\gamma_2}) [2\tilde{A} - \tilde{B}(1 - e^{-\gamma_2}) - (\tilde{C}/2)(f+1)] + (\tilde{E}/4) (1 - e^{-\gamma_1})^2 \\ {}^1R_n &= \{ 1/[2(n-1)] \} \{ (1 - e^{-(n-1)\gamma_1}) (\tilde{L} + \tilde{D} - \tilde{C}d) + (1 - e^{-(n-1)\gamma_2}) (\tilde{C}f - \tilde{D}) \\ &\quad + 2(1 - e^{-(n-1)\alpha}) + [1/(2n)] \{ (1 - e^{-n\gamma_1}) [\tilde{C}(d+1) - \tilde{L}] - (1 - e^{-n\gamma_2}) \tilde{C}(f+1) \} \\ &\quad + (1 - e^{-\gamma_2})^2 e^{-n\gamma_2} [\tilde{B}(1 - e^{-\gamma_2}) - \tilde{A}] + (\tilde{E}/4) (1 - e^{-\gamma_1})^3 e^{-(n+1)\gamma_1} \quad (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$H=(1/2)\{V_2(1-e)-(\tilde{D}/2)[V_1(f+1)-V_3(d+1)]+\tilde{F}V_1-2\tilde{A}+2\tilde{B}(1-e^{-\tau_2})-\tilde{M}V_3/2+\tilde{E}(1-e^{-\tau_1})/2\} \quad (31)$$

$$L=(1/2)\{-V_2(1+e)+(\tilde{D}/2)[2d(e^{-\tau_1}-1)+V_3(d-1)-V_1(f-1)] \\ +\tilde{C}(e^{-\tau_1}-1)-(\tilde{M}/2)[V_3+2(e^{-\tau_1}-1)]+(\tilde{E}/2)(1-e^{-\tau_1})(2-e^{-\tau_1}) \\ +2e(1-e^a)+(\tilde{D}f+\tilde{C})(1-e^{-\tau_2})+\tilde{F}[V_1+2(e^{-\tau_2}-1)]-2[\tilde{A}e^{-\tau_2}-\tilde{B}(1-e^{-\tau_2})](2-e^{-\tau_2})\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^2P_n &= \{1/[2(n+1)]\}[(1-e^{-(n+1)\tau_1})(\tilde{M}-\tilde{C}-\tilde{D}d)+(1-e^{-(n+1)\tau_2})(\tilde{C}+\tilde{D}f-2\tilde{F})+2e(1-e^{(n+1)a})] \\ &\quad +[1/(2n)]\{(1-e^{-n\tau_1})[\tilde{D}(d-1)-\tilde{M}]- (1-e^{-n\tau_2})[\tilde{D}(f-1)-2\tilde{F}]+2(e^{na}-1)(1+e)\}+e^{-n\tau_2} \\ &\quad \times (1-e^{-\tau_2})^2[\tilde{B}(1-e^{\tau_2})-\tilde{A}]- (\tilde{E}/4)(1-e^{-\tau_1})^3e^{-(n-1)\tau_1} \quad (n \geq 1) \\ {}^2R_1 &= (1/2)\{[\tilde{D}(V_1f-V_3d)-2\tilde{F}V_1+\tilde{M}V_3+2V_2e]+(1-e^{-\tau_1})[\tilde{D}(d+1)-\tilde{M}]+(1/2)(1-e^{-\tau_2}) \\ &\quad \times [2\tilde{F}-\tilde{D}(f+1)]+(1-e^a)(1-e)-\tilde{B}(3-e^{-\tau_2})(1-e^{-\tau_2})+4\tilde{A}-(\tilde{E}/2)(3-e^{-\tau_1})(1-e^{-\tau_1})\} \\ {}^2R_n &= \{1/[2(n-1)]\}[(1-e^{-(n-1)\tau_1})\tilde{M}-\tilde{D}d+\tilde{C}]+(1-e^{-(n-1)\tau_2})(\tilde{D}f-\tilde{C}-2\tilde{F}) \\ &\quad +2e(1-e^{(n-1)a})+[1/(2n)]\{(1-e^{-n\tau_1})[\tilde{D}(d+1)-\tilde{M}]+(1-e^{-n\tau_2})[2\tilde{F}-\tilde{D}(f+1)] \\ &\quad +2(1-e^{na})(1-e)\}+e^{-n\tau_2}(e^{\tau_2}-1)^2[\tilde{B}(1-e^{-\tau_2})-\tilde{A}]+(\tilde{E}/4)(e^{\tau_1}-1)^3e^{-(n+1)\tau_1} \quad (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ここに, $V_1 = \log[2/(\cosh \gamma_2 - 1)] + \gamma_2$, $V_2 = \log[2/(\cosh \alpha - 1)] + \alpha$, $V_3 = \log[2/(\cosh \gamma_1 - 1)] + \gamma_1$, $e = a \sinh \alpha / (\cosh \alpha - 1)$, $f = a \sinh \gamma_2 / (\cosh \gamma_2 - 1)$, なお, 式(4), (5)に式(11)~(13)を代入すれば変位関数 Q/J , $\bar{Q}/J$, $\bar{Q}/J$ は定まる。

4. 未知係数の決定

未知係数を決定するにあたり, 境界条件(i)~(iv)のほかに解が存在するために必要な次の三つの物理的諸条件, (v)充てん材内で応力, 変位が有限, (vi)未知係数列が収束すること, (vii)関数列 ${}^1\varphi_n$, ${}^2\varphi_n$ が収束すること, を追加する。なお, (vi)および(vii)は母材に関する条件であり, 各々相対変位零の位置を決めるため, および応力値が常に有限値を取るために必要な条件である。境界条件(i), (ii)に, X/J , $\bar{X}/J$ および, $\bar{X}/J$, を代入し, $\cos n\eta$, $\sin n\eta$ の係数を等値し, (vi), (vii)の条件を加えると, 未知係数決定の条件式は, 次の諸式で与えられる。すなわち, 式(6)および条件(vii)から,

$$\left. \begin{aligned} {}^1\bar{\varphi}_n(\xi_1) &= [{}^1\varphi_n(\xi_1) + {}^1\varphi_{n,0}(\xi_1)]/\bar{F} \quad (n \geq 2) \\ {}^1\bar{\varphi}_n'(\xi_1) &= [{}^1\varphi_n'(\xi_1) + {}^1\varphi_{n,0}'(\xi_1)]/\bar{F} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^2\bar{\varphi}_1(\xi_1) &= \{[{}^2\varphi_1(\xi_1) + {}^2\varphi_{1,0}(\xi_1)] - (1/4)(Z_1e^{2\xi_1} + Z_2e^{-2\xi_1})\}/\bar{F} \\ {}^2\bar{\varphi}_n(\xi_1) &= \{[{}^2\varphi_n(\xi_1) + {}^2\varphi_{n,0}(\xi_1)] + Ke^{-n\xi_1}[(n+1)e^{\xi_1} - (n-1)e^{-\xi_1}]/[n(n^2-1)]\}/\bar{F} \quad (n \geq 2) \\ {}^2\bar{\varphi}_1'(\xi_1) &= \{[{}^2\varphi_1'(\xi_1) + {}^2\varphi_{1,0}'(\xi_1)] - Z_1 + Ke^{-2\xi_1}\}/\bar{F} \\ {}^2\bar{\varphi}_n'(\xi_1) &= \{[{}^2\varphi_n'(\xi_1) + {}^2\varphi_{n,0}'(\xi_1)] + (1/n)K[e^{-(n+1)\xi_1} - e^{-(n-1)\xi_1}]/\bar{F} \quad (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

式(8)および条件(vii)から,

$$\left. \begin{aligned} {}^1\bar{\varphi}_n(-\xi_2) &= {}^1\varphi_n(-\xi_2)/\bar{F} \quad (n \geq 2) \\ {}^1\bar{\varphi}_n'(-\xi_2) &= {}^1\varphi_n'(-\xi_2)/\bar{F} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^2\bar{\varphi}_1(-\xi_2) &= \{[{}^2\varphi_1(-\xi_2) - (1/4)(Z_2e^{2\xi_2} + Z_1e^{-2\xi_2})]/\bar{F} \\ {}^2\bar{\varphi}_n(-\xi_2) &= \{[{}^2\varphi_n(-\xi_2) + Ke^{-n\xi_2}[(n+1)e^{\xi_2} - (n-1)e^{-\xi_2}]/[n(n^2-1)]]/\bar{F} \quad (n \geq 2) \\ {}^2\bar{\varphi}_1'(-\xi_2) &= [{}^2\varphi_1'(-\xi_2) + Z_2 - Ke^{-2\xi_2}]/\bar{F} \\ {}^2\bar{\varphi}_n'(-\xi_2) &= [{}^2\varphi_n'(-\xi_2) + (1/n)K[e^{-(n-1)\xi_2} - e^{-(n+1)\xi_2}]]/\bar{F} \quad (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

式(7)および条件(vi)から,

$$\begin{aligned} & \bar{\mu}[(n+2)^j W_{n+1} e^{2(n+1)\xi_1} + (n+1)^j U_{n+1} e^{2n\xi_1} - n^j W_n e^{2(n+1)\xi_1} - (n-1)^j U_n e^{2n\xi_1}] \\ & + \bar{\lambda}[{}^j X_{n+1} + {}^j V_n + 2({}^j R_{n+1} + {}^j P_n)] + (\bar{\mu} Z_1 e^{2\xi_1} \delta_{1,n}) \delta_{2,j} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\beta}[(n+2)^j V_{n+1} e^{-2(n+1)\xi_1} + (n+1)^j X_{n+1} e^{-2n\xi_1} - n^j V_n e^{-2(n+1)\xi_1} - (n-1)^j X_n e^{-2n\xi_1} \\ & + 2[(n+2)^j P_{n+1} e^{-2(n+1)\xi_1} + (n+1)^j R_{n+1} e^{-2n\xi_1} - n^j P_n e^{-2(n+1)\xi_1} \\ & - (n-1)^j R_n e^{-2n\xi_1}]] + \bar{\omega}({}^j U_{n+1} + {}^j W_n) + (\bar{\beta} Z_2 e^{-2\xi_1} \delta_{1,n}) \delta_{2,j} = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & -2\chi^*(H+L) + (1/2)[{}^1\varphi_1(\xi_1) - B_1 + 4{}^1\varphi_{1,0}(\xi_1)] - 2\chi^*[{^2\varphi_1(\xi_1)} + {}^2\varphi_{1,0}(\xi_1)] \\ & - {}^1\bar{\varphi}_1'(\xi_1) + 2\bar{\chi}^*[{^2\varphi_1(\xi_1)} + {}^2\varphi_{1,0}(\xi_1)] - (1/2)(1-\chi^*)(Z_1 e^{2\xi_1} + Z_2 e^{-2\xi_1}) = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

式(9)および条件(vi)から,

$$\begin{aligned} & \bar{\mu}[(n+2)^j V_{n+1} e^{2(n+1)\xi_2} + (n+1)^j X_{n+1} e^{2n\xi_2} - n^j V_n e^{2(n+1)\xi_2} - (n-1)^j X_n e^{2n\xi_2}] \\ & + \bar{\lambda}({}^j U_{n+1} + {}^j W_n) + (\bar{\mu} Z_2 e^{2\xi_2} \delta_{1,n}) \delta_{2,j} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\beta}[(n+2)^j W_{n+1} e^{-2(n+1)\xi_2} + (n+1)^j U_{n+1} e^{-2n\xi_2} - n^j W_n e^{-2(n+1)\xi_2} - (n-1)^j U_n e^{-2n\xi_2}] \\ & + \bar{\omega}({}^j X_{n+1} + {}^j V_n) + (\bar{\beta} Z_1 e^{-2\xi_2} \delta_{1,n}) \delta_{2,j} = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & - (1/2)[{}^1\varphi_1'(-\xi_2) - B_1] + 2\chi^*{}^1\varphi_1(-\xi_2) - {}^1\bar{\varphi}_1'(-\xi_2) - 2\bar{\chi}^*{}^1\bar{\varphi}_1(-\xi_2) \\ & + (1/2)(1-\chi^*)(Z_2 e^{2\xi_2} + Z_1 e^{-2\xi_2}) = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

次に, (iii)の条件, すなわち $\xi \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$ のとき $X_{12} \rightarrow 0$ より

$${}^2B_1 + (1/2) \sum_{n=1}^{\infty} ({}^2W_n + {}^2V_n + {}^2U_{n+1} + {}^2X_{n+1}) = 0 \quad (44)$$

ここに, $\bar{\lambda} = (\chi^* + 1) - (\bar{\chi}^* + 1)/\bar{\Gamma}$, $\bar{\mu} = (\chi^* - 1) - (\bar{\chi}^* + 1)/\bar{\Gamma}$, $\bar{\beta} = (\chi^* - 1) - (\bar{\chi}^* - 1)/\bar{\Gamma}$, $\bar{\omega} = (\chi^* + 1) - (\bar{\chi}^* - 1)/\bar{\Gamma}$, ${}^j\varphi_n(\xi) = \partial^j\varphi_n(\xi)/\partial\xi^j$, ${}^jW_n = {}^jA_n + {}^jC_n$, ${}^jV_n = {}^jA_n - {}^jC_n$, ${}^jU_n = {}^jB_n + {}^jD_n$, ${}^jX_n = {}^jB_n - {}^jD_n$, $Z_1 = K + B_0$, $Z_2 = K - B_0$, $\delta_{p,q}$ はクロネッカデルタである. なお条件(v)は ${}^j\varphi_n(\xi)$ および ${}^j\bar{\varphi}_n(\xi)$ を各々, 式(24)で与えれば, 自動的に満足される. また, 剛体変位の項は数値計算上重要ではない, したがって, 結果は省略する. 未知係数決定の条件式(38)~(44)から未知係数を決定するにあたり $m = e^{-2\xi_1}$ を摂動変数とする摂動法を採用する. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} {}^jW_n &= \sum_{t=0}^{\infty} {}^jW_n^{(t)} m^{t-n}, {}^jV_n = \sum_{t=0}^{\infty} {}^jV_n^{(t)} m^{t+n}, {}^jU_n = \sum_{t=0}^{\infty} {}^jU_n^{(t)} m^{t-n-1}, \\ {}^jX_n &= \sum_{t=0}^{\infty} {}^jX_n^{(t)} m^{t-n-1}, {}^2B_1 = \sum_{t=0}^{\infty} B_1^{(t)} m^t, Z_1 = \sum_{t=0}^{\infty} Z_1^{(t)} m^t, Z_2 = \sum_{t=0}^{\infty} Z_2^{(t)} m^t \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

とにおいて, 式(38)~(44)に代入し m の同べき項で整理すれば, 次の諸式が得られる.

$$\begin{aligned} & {}^jW_n^{(t)} = (1/n) \{ -(n-1){}^jU_{n+1}^{(t-1)} + (n+2){}^jW_{n+1}^{(t-1)} + (n+1){}^jU_{n+1}^{(t-1)} \\ & + Z_1^{(t-1)} \delta_{1,n} \delta_{2,j} + (\bar{\lambda}/\bar{\mu})[{}^jV_n^{(t-n-1)} + {}^jX_{n+1}^{(t-n-1)} + 2({}^jP_n + {}^jR_{n+1}) \delta_{1,t}] \} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & {}^jU_{n+1}^{(t)} = -{}^jW_n^{(t)} + (\bar{\beta}/\bar{\omega}) \{ n^jV_n^{(t-n-1)} + (n-1){}^jX_n^{(t-n-1)} - (n+2){}^jV_{n+1}^{(t-n-2)} - (n+1){}^jX_{n+1}^{(t-n)} \\ & - Z_2^{(t-1)} \delta_{1,n} \delta_{2,j} + 2[{}^jP_n - (n+2){}^jP_{n+1}] \delta_{1,t} + 2[(n-1){}^jR_n - (n+1){}^jR_{n+1}] \delta_{0,t} \} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} & {}^jV_n^{(t)} = (1/n) \{ -(n-1){}^jX_n^{(t)} + (n+2){}^jV_{n+1}^{(t-1)} + (n+1){}^jX_{n+1}^{(t-1)} \\ & + Z_2^{(t-1)} b \delta_{1,n} \delta_{2,j} + (\bar{\lambda}/\bar{\mu}) b^{n+1} [{}^jW_n^{(t-n-1)} + {}^jU_{n+1}^{(t-n-1)}] \} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} & {}^jX_{n+1}^{(t)} = -{}^jV_n^{(t)} + (\bar{\beta}/\bar{\omega}) b^n [n b^jW_n^{(t-n-1)} + (n-1){}^jU_n^{(t-n+1)} \\ & - (n+2){}^jV_{n+1}^{(t-n-2)} - (n+1){}^jU_{n+1}^{(t-n)} - Z_1^{(t-1)} \delta_{1,n} \delta_{2,j}] \end{aligned} \quad (49)$$

$$B_1^{(t)} = -(1/2) \sum_{n=1}^t ({}^2W_n^{(t-n)} + {}^2V_n^{(t-n)} + {}^2U_{n+1}^{(t-n)} + {}^2X_{n+1}^{(t-n)}) \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & (\bar{\gamma}/2) Z_1^{(t)} = -\bar{\mu}^2 W_1^{(t)} - 2\bar{\varepsilon} B_1^{(t)} - Z_1^{(t-1)}/\bar{\Gamma} - \bar{\beta}^2 V_1^{(t-2)} - (\bar{\gamma}/2) Z_2^{(t-2)} \\ & + K^{(t-2)}/\bar{\Gamma} - 2\bar{\beta}^2 P_1 \delta_{1,t} - 2\bar{\varepsilon}({}^2R_1 + H + L) \delta_{0,t} \end{aligned} \quad (51)$$

$$(\bar{\gamma}/2) Z_2^{(t)} = -\bar{\mu}^2 V_1^{(t)} - 2\bar{\varepsilon} B_1^{(t)} b - Z_2^{(t-1)}/\bar{\Gamma} - \bar{\beta}^2 W_1^{(t-2)} b^2 - (\bar{\gamma}/2) Z_1^{(t-2)} b^2 + K^{(t-2)} b^2/\bar{\Gamma} \quad (52)$$

ここに, $\bar{\varepsilon} = \chi^* - \bar{\chi}^*/\bar{\Gamma}$, $\bar{\varepsilon} = \chi^* - \bar{\chi}^*/\bar{\Gamma}$, $b = e^{(2\xi_2 - \xi_1)}$ である. 式(46)~(52)を n および t の小さい項から順次解いていけば式(45)の右辺の各項が定まり未知係数 jA_n , jB_n , jC_n , jD_n , K , B_0 が決定される. さらに, 式(34)~(37)に代入すれば, 未知係数 ${}^j\bar{A}_n$, ${}^j\bar{B}_n$, ${}^j\bar{A}_n$, ${}^j\bar{B}_n$ が定まる.

5. 転位に働く作用力

すべり面方向のせん断応力 τ は、無限板内に1個の刃状転位のみが存在する場合のすべり面方向のせん断応力を τ_0 、2個の充てん材が存在するために生ずるすべり面方向の二次せん断応力を τ^* とすると、

$$\tau = \tau_0 + \tau^* \quad \dots\dots\dots (53)$$

したがって、転位に働く作用力 F は、 ξ, η 方向の二次応力を $\sigma_\xi^*, \sigma_\eta^*, \tau_{\xi\eta}^*$ とおけば、Peach-Koehler の式⁽¹⁰⁾から、

$$F = b_a(\tau^*)_{\xi=\alpha, \eta=0} = b_a[\tau_{\xi\eta}^* \cos 2\omega + (1/2)(\sigma_\xi^* - \sigma_\eta^*) \sin 2\omega]_{\xi=\alpha, \eta=0} \quad \dots\dots\dots (54)$$

と表される。さらに、 $F_1 = \tau_{\xi\eta}^*/D$, $F_2 = (1/2)(\sigma_\xi^* - \sigma_\eta^*)/D$ とおいて式(54)を整理すれば、

$$F = F_A(F_1 \cos 2\omega + F_2 \sin 2\omega) / \sinh \xi_1 \quad \dots\dots\dots (55)$$

ここに、 $F_A = G_1 b_a^2 / [\pi \bar{a}_1 (\alpha_1 + 1)]$

$$\begin{aligned} F_1 = & (\bar{D}/c + \bar{L}/c^2 - 2\bar{E}/c^3 - \bar{D}/(e+f) - 4\bar{A}/(e+f)^2 + 8\bar{B}/(e+f)^3 \\ & + (1/4) \sum_{n=1}^{\infty} \{n(n+1)[(1-e^{-\alpha})^2 e^{-n\alpha} V_n - (1-e^{-\alpha})^2 e^{n\alpha} W_n] \\ & + n(n-1)[(1-e^{-\alpha})^2 e^{-n\alpha} X_n - (1-e^{-\alpha})^2 e^{n\alpha} U_n]\} \cos \omega \quad \dots\dots\dots (56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 = & (\bar{C}/c + \bar{M}/c^2 + 2\bar{E}/c^3 - \bar{C}/(e+f) - 2(\bar{F} + 2\bar{A})/(e+f)^2 + 8\bar{B}/(e+f)^3 \\ & + (1/4)[(1-e^{-\alpha})^2 Z_1 + (1-e^{-\alpha})^2 Z_2] + (1/4) \sum_{n=1}^{\infty} \{n(n+1)[(1-e^{-\alpha})^2 e^{-n\alpha} V_n \\ & + (1-e^{-\alpha})^2 e^{n\alpha} W_n] + n(n-1)[(1-e^{-\alpha})^2 e^{-n\alpha} X_n + (1-e^{-\alpha})^2 e^{n\alpha} U_n]\} \sin \omega \quad \dots\dots\dots (57) \end{aligned}$$

6. 数 値 計 算

充てん材の剛性率比、幾何学的寸法および転位のすべり面の方向が転位の釣合位置および二次作用力にいかの影響するかを具体的に明らかにするため、数値計算を行った。なおポアソン比の影響は少ないと思われるので⁽⁶⁾⁽⁷⁾、計算では $\nu = \bar{\nu} = \bar{\nu}' = 0.3$ とおいた。また、計算結果を整理するため、あらたに x 軸と接着境界線の交点を原点とする補助座標 (x'_1, y'_1) および (x'_2, y'_2) ならびに幾何学的寸法 S_1, S_2, S_3 を導入した(図1)。ただし、応力は平面ひずみ状態にあるものとする。図3, 4は、すべり面の傾き ω をパラメータにとって表した各接着境界線上の応力分布である。なお、応力は $D_A = D/\bar{a}_1$ で割って無次元化している。図5は、 $\omega =$

45° の場合に対する x 軸上の応力分布を示している。

なお、数値計算では、 $\bar{G}_1/G_1=1$ または、 $\bar{G}_1/G_1=1$ と置いた場合と $\bar{a}_1/\bar{a}_1 \rightarrow 0$ (実際の数値は $\bar{a}_1/\bar{a}_1 = 0.0554$) における応力値を比較し一致することを確認した。

図6および図7はそれぞれ $\bar{G}_1/G_1=0$, $\bar{G}_1/G_1=\infty$ および $\bar{G}_1/G_1=\infty$, $\bar{G}_1/G_1=0$ の場合について、転位位置ならびにすべり面の傾き ω と転位に働く作用力の関係を表している。図において作用力は、 $F/F_A > 0$ のとき斥力、 $F/F_A < 0$ のとき引力として働いている。また、 $F/F_A = 0$ を満足する $S_3/\bar{a}_1$ の値が釣合位置となる。図6では釣合は安定であり、かつその位置は、 ω が増加すると充てん材縁に近づいている。一方、図7では釣合は不安定であり、かつその位置は ω が増加する

図3 境界線上の応力分布 ($\xi = \xi_1$)

図4 境界線上の応力分布 ($\xi = -\xi_2$)

図5 x 軸上の応力分布 ($\omega = 45^\circ$)

図6 転位の位置と作用力の関係

図7 転位の位置と作用力の関係

と充てん材縁から遠ざかっている。また、これらの図から明らかなように転位のすべり面が傾くと作用力の影響が急激に減少している。

図8は、釣合位置と剛性率比の関係を示している。この場合には一般に釣合は安定である。図から明らかなように、 $\omega \leq 60^\circ$ の範囲では、釣合位置は ω が小さいほど、剛性率比の影響を大きく受け、 $\bar{G}_1/G_1$ が、0.7以上になると急激に充てん材縁から遠ざかっている。一方、 ω が 63° を超えると、剛性率比 $\bar{G}_1/G_1 > 1$ においても釣合位置が存在するようになるが、 $\omega = 75^\circ$ の場合、図に示しているように、剛性率比の極めて限られた範囲 ($\bar{G}_1/G_1 = 1.1410 \sim 1.1427$) で、2箇所の安定釣合位置と、1箇所の不安定釣合位置が共存する。剛性率比がさらに増加すると、釣合位置は、急速に遠ざかり、 $\bar{G}_1/G_1 \rightarrow \infty$ において一定値に収束する。

図9は、同じく安定釣合位置と剛性率比の関係を示

図8 釣合位置と剛性率比の関係

図9 釣合位置と剛性率比の関係

図 10 釣合位置と ω の関係

している。この場合には釣合いは不安定である。図から明らかなように $G_1/\bar{G}_1$ が 1.0 に近づくとき釣合位置は遠ざかり、存在しなくなる。また、 ω が比較的小さい場合には ω の大きさの変化による釣合位置変動の影響は少ないが、 ω が大きくなるにつれて、その影響は顕著になりかつ釣合位置の存在する剛性率比 $G_1/\bar{G}_1$ の範囲が小さくなってきている。

図 10 は、釣合位置と ω の関係を示している。 $\bar{G}_1/G_1 < 1$ のとき、釣合位置は、安定であり剛性率比に関係なく、 ω が 30° から 60° の間で、大きく変化しており、 $\omega = 45^\circ$ 付近で変化率は最大となっている。なお、 ω が 60° 以上になると、剛性率比の影響は非常に小さくなる。また、 $\bar{G}_1/G_1 > 1$ の範囲では、 $\bar{G}_1/G_1 = 1.15$ に見られるように、2箇所の安定釣合位置と、1箇所の不安定釣合位置が共存する範囲 ($\omega = 75.55^\circ \sim 75.70^\circ$) が現れる。

同様に図 11 は、釣合位置と ω の関係を示している。剛性率の比に関係なく、 ω が 30° 以上で釣合位置は大きく遠ざかり、 ω が 60° を超えると、釣合位置は無限に遠ざかることを表している。なおこの場合には釣合いはすべて不安定釣合いである。

7. 結 言

- (1) 転位に働く二次作用力の影響は、 $s_3/\bar{a}_1 < 1$ の

図 11 釣合位置と ω の関係

範囲で顕著に表れる。一方、 ω が増加するにつれてその影響は減少している。

(2) 剛性率比 $\bar{G}_1/G_1 = \infty$ の場合、 ω が約 60° より小さいときには、 $\bar{G}_1/G_1 < 1$ の範囲で安定釣合位置が存在する。しかし、 ω が約 60° より大きくなると $\bar{G}_1/G_1 > 1$ の範囲においても釣合位置が現れる。しかも大部分は安定であるが、ある特定の ω の範囲では2箇所の安定釣合いと1箇所の不安定釣合いを生じている。

(3) 剛性率比 $\bar{G}_1/G_1 = 0$ の場合、 $\bar{G}_1/G_1 > 1$ 、 $\omega < 65^\circ$ の範囲で不安定釣合位置が存在する。

文 献

- (1) Head, A. K., *Philos. Mag.*, 44-348 (1953), 92.
- (2) Dundurs, J. and Mura, T., *J. Mech. Phys. Solids*, 12-3 (1964), 177.
- (3) Dundurs, J. and Sendekyj, G. P., *J. Mech. Phys. Solids*, 13-3 (1965), 141.
- (4) 松岡・ほか2名, 機論, 42-362 (昭51), 3051.
- (5) 松岡・ほか3名, 機論, 43-371 (昭52), 2492.
- (6) 吉岡・ほか2名, 機論, 52-474, A (昭61), 308.
- (7) 吉岡・ほか2名, 機論, 52-474, A (昭61), 507.
- (8) Fukuzaki, K. and Shioya, S., *Int. J. Eng. Sci.*, 24-12 (1986), 1771.
- (9) Fukuzaki, K. and Shioya, S., *Int. J. Eng. Sci.*, 25 (1987) (印刷中).
- (10) Peach, M. O. and Koehler, J. S., *Phys. Rev.*, 2-80 (1950), 436.