実物試験による低サイクル疲労設計に用いられる ASME の寿命安全係数の信頼性工学的検討*

市 川 昌 弘^{*1}, 高 松 徹^{*1}

Reliability-Based Consideration of ASME's Scatter Factor Used in Low-Cycle Fatigue Design Based on Geometrically Similar Model Tests

Masahiro ICHIKAWA and Tohru TAKAMATSU

In the low-cycle fatigue design based on testing of geometrically similar models, the scatter of fatigue life is taken into account using the factor for the statistical variation in test results, $K_{ss}=1.470-0.044r$, the formula given by the ASME Boiler and Pressure Vessel Code, where r is the number of replicate tests. In the present paper, this formula has been examined by calculating the upper confidence limit of the probability of failure P_{fu} for the design service cycles as determined using the above formula. It was found that P_{fu} varied with η and r , where η was the coefficient of variation of the fatigue life. An alternative formula was proposed which made P_{fu} independent of η and r .

Key Words: Fatigue, Low-Cycle Fatigue Design, Geometrically Similar Model Test, ASME Code, Reliability Engineering

1. 緒 言

低サイクル疲労設計法の一つに、実物試験あるいはコンポネント試験による方法がある⁽¹⁾。本設計法によれば、 N_D を設計寿命、 K_n を後述の係数とすると、実物あるいはコンポネント試験体を設計応力のもとで試験したときの疲労寿命が $K_n N_D$ 以上であればよい。

K_n は種々の因子に関する実物あるいはコンポネント試験体と実際構造物との差を補正するための係数であり、その具体的計算式としては、ASME の Boiler and Pressure Vessel Code⁽²⁾の次式が用いられている。

$$K_n = K_s^{4.3} = (K_{st} \cdot K_{sf} \cdot K_{sc} \cdot K_{se} \cdot K_{ss})^{4.3} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 K_{st} と K_{sf} はそれぞれ寸法、表面仕上げの差に関する補正係数、 K_{sc} は種々の温度における疲労曲線の差に関する補正係数、 K_{se} は試験温度と設計温度の差に関する補正係数である。また K_{ss} は試験結果の統計的ばらつきに関する補正係数で、次式で与えられている。

$$K_{ss} = 1.470 - 0.044r \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで r は試験体個数である。このように、本設計法では式(2)を用いることによって、寿命のばらつきを考慮するようになっているが、本報はこの考慮の仕方について信頼性工学の観点から検討し、より合理的な式を提唱したものである。

2. 検 討 の 方 法

本論文の目的はばらつきを考慮する方法の検討にあるので、以下では試験体と実際構造物の間に寸法、表面仕上げ、温度等の差がなく、したがって $K_{st} = K_{sf} = K_{sc} = K_{se} = 1$ の場合を考える。 K_n はこの場合

$$K_n = (K_{ss})^{4.3} = (1.470 - 0.044r)^{4.3} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。いま、 r 個の試験体について疲労試験を行ったとし、得られた寿命を短いほうから順に $N_1, N_2, \dots, N_r$ とする。最小寿命は N_1 である。上記の設計法によれば、試験結果から設計寿命 N_D を決める場合には、

$$N_D = N_1 / K_n \quad \dots\dots\dots (4)$$

とすればよい。このように K_n は寿命安全係数 (Scatter factor) の働きをするものであるが、通常の寿命安全係数が平均寿命等の代表値に対して定義されているのに対し、この K_n は最小寿命に対して定義されてい

* 昭和 62 年 4 月 1 日 第 64 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 61 年 9 月 22 日。

*¹ 正員、電気通信大学 (〒182 調布市調布ヶ丘 1-5-1)。

ることを指摘しておく。

さて、式(3)の K_n は次の二つの点から検討を要すると思われる。第一は、この K_n には寿命の変動係数の大小が反映されていないが、これでよいのかという点である。第二は、供試体個数 r と K_n の関係がこれでよいのかという点である。後者の疑問は上村らの報告⁽³⁾ [LNG タンクのメンブレン十字クロス構造を対象として、設計寿命 N_D を式(3)、(4)により決定した場合の破損確率を計算したもの] を見て生じた。この計算の目的は本論文の目的とは異なるが、破壊確率の値が供試体個数 r によって異なるという結果になっている。これは式(3)の妥当性に疑問を抱かせるものである。なぜなら K_n は、破損確率が供試体個数に関係なく一定となるように決めるほうが合理的と考えられるからである。ただし、上村らの計算は3母数ワイブル分布に対するものであり、かつ、その母数の値に関しあるひとつの場合しか計算していない。そこで、著者らは、疲労寿命分布としてよく用いられる2母数ワイブル分布と対数正規分布を取り上げ、かつ母数の値を広範囲に変化させて計算を行ったが、さきに口頭発表したように⁽⁴⁾、この場合にも破損確率は供試体個数によって異なっていた。

さて、上村らの報告⁽³⁾および著者らの先の報告⁽⁴⁾では破損確率を次式で計算した。

$$P_f = \int_0^{\infty} F(N_D)g(N_D)dN_D \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここで、 $F(\quad)$ は寿命の分布関数、 $g(\quad)$ は設計寿命の確率密度関数である。上式の P_f は次のように解釈できる。いま、 r 個の供試体を試験し、その結果より設計寿命を決め、製品を作るということを多数の製造所で別々に行ったとする。すると、 r 個中の最小寿命はばらつくから、設計寿命とこれに対する破損確率も製造所ごとに異なってくる。式(5)の P_f はそれらの平均値に相当するものである。しかしながら、実際にはこのような平均値よりも各製造所個々の破損確率のほうが重要であろう。そこで、本論文ではこの立場から、平均値ではなく個々の破損確率を用いて検討する。寿命分布としては2母数ワイブル分布と対数正規分布の二つを考える。

3. ASME の K_n の式の検討

3.1 2母数ワイブル分布の場合 対象としている構造物の疲労寿命分布が、次式の2母数ワイブル分布関数で表せるとする。

$$F(N) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{N}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで、形状母数 α の値は過去のデータより既知とし、尺度母数 β の値のみが未知とする。母数に関するこのタイプの仮定は、一般によく用いられるものである⁽⁵⁾。さて、 β の真値が未知であるから、与えられた N_D に対する破損確率の真値は計算できない。そこで、ある信頼水準 $1-\gamma$ (例えば $1-\gamma=0.95$) のもとでの上限破損確率 P_{fu} を計算することにする。 P_{fu} は2章で述べた各製造所ごとの破損確率に対応する。

さて、本論文では前述のように、試験体と実際構造物の間に、寸法、表面仕上げ、温度等の差がないと考えているので、式(6)の $F(N)$ は供試体の寿命の分布関数でもある。したがって、 r 個の供試体の寿命の最小値 N_1 の分布関数を $F_1(N_1)$ とすると

$$1 - F_1(N_1) = [1 - F(N_1)]^r \quad \dots\dots\dots(7)$$

の関係より次式が得られる。

$$F_1(N_1) = 1 - \exp\left[-r\left(\frac{N_1}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \quad \dots\dots\dots(8)$$

式(8)より、 N_1 の分布において累積確率 $1-\gamma$ に対する N_1 値は、 $\beta[-(\ln \gamma)/r]^{\alpha}$ である。よって

$$P\left[N_1 \leq \beta\left(-\frac{\ln \gamma}{r}\right)^{1/\alpha}\right] = 1 - \gamma \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 $P[\quad]$ は $[\quad]$ 内の事象の生起確率を表す。 $[\quad]$ 内の不等式の両辺に設計寿命 N_D を乗じ、変形すると、

$$P\left[\frac{N_D}{\beta} \leq \frac{N_D}{N_1}\left(-\frac{\ln \gamma}{r}\right)^{1/\alpha}\right] = 1 - \gamma$$

これをさらに変形して次式を得る。

$$P\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{N_D}{\beta}\right)^{\alpha}\right\} \leq 1 - \exp\left\{\left(\frac{N_D}{N_1}\right)^{\alpha} \frac{\ln \gamma}{r}\right\}\right] = 1 - \gamma \quad \dots\dots\dots(10)$$

式(10)の $[\quad]$ 内の不等式の左辺は、ある N_D 値に対する破損確率の真値であり、確定量である(ただし β の真値が未知であるから、この確定量の値は未知である)。一方、右辺は試験結果(具体的には N_1 の値)を用いて計算できる統計量であるが、式(10)によれば、この統計量が破損確率の真値より低い値をとる(すなわち破損確率を過小評価する)危険性はある小さな確率 γ (例えば $\gamma=0.05$) におさえられる。よって、右辺の値は、信頼水準 $1-\gamma$ での上限破損確率となっている。これを P_{fu} と書くと

$$P_{fu} = 1 - \exp\left[\frac{\ln \gamma}{r} \left(\frac{N_D}{N_1}\right)^{\alpha}\right] \quad \dots\dots\dots(11)$$

$N_D = N_1/K_n$ であるから [式(4)], 上式は

$$P_{fu} = 1 - \exp\left[\frac{\ln \gamma}{r} \cdot \frac{1}{K_n^{\alpha}}\right] \quad \dots\dots\dots(12)$$

とも表される。以上で上限破損確率 P_{fu} の式が導かれた。これは最小値 N_1 だけを用いた P_{fu} の式であり、

$N_1, N_2, \dots, N_r$ のすべてを用いた次の P_{fu} の式⁽⁶⁾とは異なるものである。

$$P_{fu} = 1 - \exp \left[-\frac{\chi^2_{2r}(2r)}{2r} \cdot \frac{N_1^2}{(\sum N_i^2)/r} \right] \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $\chi^2_{2r}(2r)$ は自由度 $2r$ のカイ二乗分布の上側確率 100γ パーセント点である。

さて、ASME の K_n を用いたとき、 P_{fu} と寿命の変動係数 η および供試体個数 r の関係がどのようになっているかを調べてみる。式(3)を式(12)に代入すると、 P_{fu} は供試体個数 r 、形状母数 α 、信頼水準 $1-\gamma$ の関数となる。 $1-\gamma$ の値としては、よく用いられている $1-\gamma=0.95$ と $1-\gamma=0.90$ をここでも用いた。また、 α と η の間には

$$\eta = \left[\frac{\Gamma(1+2/\alpha)}{\{\Gamma(1+1/\alpha)\}^2} - 1 \right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (14)$$

の関係があるが、 $1 \leq \alpha \leq 50$ の範囲では式(14)は

$$\eta = \alpha^{-0.93} \quad \dots\dots\dots (15)$$

により高精度で近似できるので(相対誤差3%以下)⁽⁷⁾、所定の η に対する α は

$$\alpha = \eta^{-1/0.93} \quad \dots\dots\dots (16)$$

により計算した。 r については、 $K_s \geq 1.25$ (いまの場合は $K_{ss} = 1.470 - 0.044r \geq 1.25$ となる) の制約があるので⁽²⁾、 $1 \leq r \leq 5$ とした。

数値計算の結果を図1に示す。 r は整数値しかとらないが、変化の傾向が見やすいように、計算点を線で結んだ。図1より、上限破損確率 P_{fu} は変動係数 η によってかなり変化すること、また η の小さな場合には供試体個数 r によってもかなり変化することがわかる。したがって、ASME の K_n の式には改善の余地があるといえよう。

3.2 対数正規分布の場合 この場合には、寿命 N の分布関数は次式で表される。

$$F(N) = \Phi \left(\frac{\ln N - \mu_L}{\sigma_L} \right) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで、 μ_L と σ_L は $\ln N$ の平均値と標準偏差である。また $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布関数で、次式により定義される。

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp \left(-\frac{X^2}{2} \right) dX \quad \dots\dots\dots (18)$$

2母数ワイブル分布の場合の α 既知、 β 未知なる仮定に対応して、 σ_L は過去のデータより既知で、 μ_L は未知とする。

式(7)、(17)より、 r 個の供試体中の最小寿命 N_1 の分布関数 $F_1(N_1)$ は

$$F_1(N_1) = 1 - \left[1 - \Phi \left(\frac{\ln N_1 - \mu_L}{\sigma_L} \right) \right]^r \quad \dots\dots\dots (19)$$

となる。この N_1 の分布における累積確率 $1-\gamma$ に対応する N_1 値は、 $\mu_L + \sigma_L \Phi^{-1}(1-\gamma^{1/r})$ であるから、

$$P[\ln N_1 \leq \mu_L + \sigma_L \Phi^{-1}(1-\gamma^{1/r})] = 1-\gamma \quad \dots\dots\dots (20)$$

が得られる。ここで $\Phi^{-1}(\cdot)$ は Φ の逆関数である。式(20)の $[\cdot]$ 内の不等式の両辺に、設計寿命 N_D の対数 $\ln N_D$ を加え、変形すると、

$$P \left[\frac{\ln N_D - \mu_L}{\sigma_L} \leq \frac{\ln N_D - \ln N_1}{\sigma_L} + \Phi^{-1}(1-\gamma^{1/r}) \right] = 1-\gamma \quad \dots\dots\dots (21)$$

これより

$$P \left[\Phi \left(\frac{\ln N_D - \mu_L}{\sigma_L} \right) \leq \Phi \left(\frac{\ln N_D - \ln N_1}{\sigma_L} + \Phi^{-1}(1-\gamma^{1/r}) \right) \right] = 1-\gamma \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(22)の $[\cdot]$ 内の不等式の左辺は、設計寿命 N_D に対する破損確率の真値である。一方、右辺は2母数ワイブルの場合と同様の理由により、信頼水準 $1-\gamma$ での上限破損確率 P_{fu} となっている。すなわち、

$$P_{fu} = \Phi \left[\frac{\ln N_D - \ln N_1}{\sigma_L} + \Phi^{-1}(1-\gamma^{1/r}) \right] \quad \dots\dots\dots (23)$$

$N_D = N_1/K_n$ [式(4)] であるから、上式は

$$P_{fu} = \Phi \left[-\frac{\ln K_n}{\sigma_L} + \Phi^{-1}(1-\gamma^{1/r}) \right] \quad \dots\dots\dots (24)$$

とも表される。以上で、 P_{fu} の表示式が導かれた。これは最小値 N_1 だけを用いた上限破損確率の式であり、

図1 ASME の K_n を用いた場合の上限破損確率 P_{fu} (2母数ワイブル分布の場合)

$N_1, N_2, \dots, N_r$ のすべてを用いた場合の次式⁽⁶⁾とは異なるものである。

$$P_{ru} = \phi \left[\frac{\ln N_D - (1/r) \sum \ln N_i}{\sigma_L} + \frac{\phi^{-1}(1-\gamma)}{\sqrt{r}} \right] \quad \dots\dots\dots (25)$$

次に、ASME の K_n を用いた場合の P_{ru} の η および r 依存性を調べる。式(3)を式(24)に代入すると、 P_{ru} は供試体個数 r 、 $\ln N$ の標準偏差 σ_L 、信頼水準 $1-\gamma$ の関数となる。2母数ワイブル分布の場合と同様に、信頼水準については $1-\gamma=0.95$ と $1-\gamma=0.90$ の2とおりを考えた。また、所定の η に対する σ_L は

$$\sigma_L = [\ln(1+\eta^2)]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (26)$$

の関係より計算した。

計算結果を図2に示す。この場合にも ASME の K_n を用いると、上限破損確率 P_{ru} は η によってかなり変化し、また η の小さな場合には供試体個数 r によっても変化することがわかる。したがって、対数正規分布を想定した場合にも、ASME の K_n の式には改善の余地があるといえよう。

4. 新しい K_n の式の提唱

K_n は、 P_{ru} が供試体個数 r や変動係数に関係なく一定となるように、定めるのが合理的と思われる。そこで以下このような K_n の式を導く。

$$K_n = \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\ln \gamma}{\ln(1-P_{ru})} \right]^{1/\alpha} \quad \dots\dots\dots (27)$$

とすればよい。上式を変形すると

$$\alpha \ln K_n = -\ln r + \ln \left(\frac{1-\ln \gamma}{1-P_{ru}} \right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。そこで縦軸に $\alpha \ln K_n$ 、横軸に $\ln r$ をとってこの K_n を示すと、図3が得られる。式(27)の場合には $1 \leq r \leq 5$ の制約はないので $r=10$ まで範囲を広げて示した。比較のため、ASME の K_n に対する $\alpha \ln K_n$ も示した。ただし、 $\eta=0.2$ (したがって $\alpha=5.64$) に対する値を示した。

次に、対数正規分布の場合には、式(24)より

$$K_n = \exp[\sigma_L \{ \phi^{-1}(1-P_{ru}) + \phi^{-1}(1-\gamma^{1/r}) \}] \quad \dots\dots\dots (29)$$

とすればよい。上式を変形すると

$$\frac{\ln K_n}{\sigma_L} = \phi^{-1}(1-P_{ru}) + \phi^{-1}(1-\gamma^{1/r}) \quad \dots\dots\dots (30)$$

縦軸に $\ln K_n / \sigma_L$ をとり、横軸に $\ln r$ をとってこの K_n を示すと、図4のようになる。この場合も $1 \leq r \leq 10$ の範囲について示した。比較のため、ASME の K_n に対する $\ln K_n / \sigma_L$ も示した。ただし、 $\eta=0.2$ (したがって

$\sigma_L=0.198$) に対する値を示した。

図3と図4を比較すると、縦軸の量が一方は $\alpha \ln K_n$ 、他方は $\ln K_n / \sigma_L$ であるが、これらはいずれも近似的に $(\ln K_n) / \eta$ に等しい。なぜなら、式(16)より $\alpha \approx 1/\eta$ であり、また式(26)より、 $\sigma_L \approx \eta$ となるからである。したがって、図3と図4の縦軸はほぼ同じ量を表している。

さて、式(27)や式(29)の使い方としては、許容破損確率を与えて K_n をこれらの式から決めるといいうわば絶対的な使い方のほかに、次のような相対的な使い方が考えられる。式(27)を例にとる。いま、これまでの設計により十分信頼性の高い製品が得られているとする。このとき、これまでの設計で用いていた K_n (およびその K_n に対応する r と η) の値を式(27)に代入し、例えば $1-\gamma=0.95$ に対する P_{ru} を計算する。次に、 r や η が変わったときは、この P_{ru} 値と先に用いた $1-\gamma$ の値ならびに新しい r や η を式(27)に代入して K_n を計算する。このようにすれば、過去の実績を活かしながら、条件の変化(r や η の変化)に対応して K_n を合理的に決めることができる。

5. 結 論

実物試験あるいはコンポネント試験による低サイクル疲労設計法において、ASME Boiler and Pressure

図2 ASME の K_n を用いた場合の上限破損確率 P_{ru} (対数正規分布の場合)

図3 本報で提唱した K_n [式(27)]
(2母数ワイブル分布の場合)

図4 本報で提唱した K_n [式(29)]
(対数正規分布の場合)

Vessel Codeの係数 $K_{ss} = 1.470 - 0.044r$ (r は供試体個数)を用いて、設計寿命 N_D を $N_D = N_1/K_n$, $K_n = K_{ss}^{4/3} = (1.470 - 0.044r)^{4/3}$ により決定した場合の破損確率(信頼水準 $1-\gamma$ での上限破損確率) P_{fU} を計算し、次の結論を得た(N_1 は r 個中の最小寿命)。

(1) $K_n = (1.470 - 0.044r)^{4/3}$ なる式を用いて設計した場合の P_{fU} の値は、寿命分布として2母数ワイブル分布、対数正規分布のいずれを用いた場合にも、寿命の変動係数 η によってかなり異なり、また η の小さいときは r によってもかなり異なる(図1、図2)。したがって、この K_n の式を用いて得られる裕度は、 η および r によって異なったものとなる。

(2) 2母数ワイブル分布の場合には K_n を式(27)(すなわち図3)のように定め、また対数正規分布の場合には K_n を式(29)(すなわち図4)のように定めれば、 P_{fU} は r や η に関係なく一定となり合理的であ

る。

本研究に対してご助言をいただいた本学田中栄学長に感謝の意を表す。また、本研究は文部省科学研究費補助金〔試験研究(1)〕によるものであり、記して謝意を表す。

文 献

- (1) 日本機械学会編、金属材料疲労強度の設計資料IV(低サイクル疲労強度)、(昭57)、202、日本機械学会。
- (2) ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Sec. III, Div. 1, Appendix II (1980)。
- (3) 上村・ほか3名、圧力技術、20-5(昭57)、240。
- (4) 市川・高松、第23回シンポジウム講演論文集、(昭61-5)、173。
- (5) 例えば、塩原・ほか6名、三菱重工技報、20-6(昭58)、1。
- (6) 例えば、市川、機械の研究、35-12(昭58)、1352。
- (7) Tanaka, S. and Ichikawa, M., *Reliability Eng.*, 4-3 (1983), 141。