Hetenyi の基本解を用いた効率的境界要素弾性解析*

結 城 良 治^{*1}, 曹 相 鳳^{*2}
松 本 敏 郎^{*2}, 木 須 博 行^{*3}Efficient Boundary Element Elastostatic Analysis
Using Hetenyi's Fundamental SolutionRyoji YUUKI, Sang-Bong CHO,
Toshiro MATSUMOTO, and Hiroyuki KISU

The boundary element method (BEM) to analyze the stress intensity factors for a crack in dissimilar materials is developed using Hetenyi's solution as a fundamental solution of BEM. Since Hetenyi's solution, which is a solution for a point load in an infinite dissimilar plate, satisfies exactly the boundary condition at the interface, this method with use of this solution does not require the discretization of the interface and only require the division of elements on the boundary of a finite plate. Therefore it is expected that this method can give an accurate solution for a crack on and near the interface. Moreover this solution includes Kelvin's solution and Mindlin's solution. After formulating and incorporating this solution in the BEM programmes, several numerical results of the stress intensity factors for a crack in dissimilar materials as well as a homogeneous material are presented. The usefulness of this solution for BEM analysis is discussed.

Key Words: Boundary Element, Elasticity, Dissimilar Material, Stress Intensity Factor, Hetenyi's Solution, Mindlin's Solution

1. 緒 言

境界要素法 (BEM) 弾性解析では, 基本解として無限体に対する Kelvin の解が主に用いられているが, 基本解は支配方程式 (Navier の式) を満たす限り, いかなる境界条件下の解でも利用でき, 対象とする問題に近い解を基本解として用いるとより効率的かつ高精度な BEM 解析が可能となる. 例えば, Kelvin の解の代わりに半無限体に対する Mindlin の解を基本解として用いると, 半無限領域の問題が容易に取扱えるばかりでなく, 平らな自由表面を有する有限体の解析においても, 自由表面の離散化の必要がなく, 効率的かつ高精度な解析が可能となることが知られている⁽¹⁾⁻⁽³⁾.

Hetenyi-Dundurs は, 異種材料を直線 (平面) 状に接合した無限体に集中力が作用する問題に対する二次元⁽⁴⁾⁽⁵⁾および三次元⁽⁶⁾の弾性解を与えている. 結城ら⁽⁷⁾および石田ら⁽⁸⁾は, この二次元の Hetenyi の解を体積力法に応用し, 異種材料中の各種のき裂問題の高精度

な解析を行っている. BEM にこの Hetenyi の解を利用した研究は見当たらないが, Hetenyi の解を基本解として BEM に組み込むことにより, 以下の利点が見込まれる.

(1) Hetenyi の解は, 異材境界上の境界条件を厳密に満たすので, 異材境界を離散化する必要がなく, しかも高精度な解が期待される (効率的, 高精度).

(2) Hetenyi の解は異種材料を同一材料とみなすと, Kelvin の解, さらに一方の材料を空 (無) とみなすと Mindlin の解となり, これらの解をも内包する汎用性のある基本解である (汎用性).

近年, 複合材料等の異種材料を接着・接合した材料の利用が増加しているが, その接合境界は強度上の問題となる場合が多い. その強度評価に際し, 弾性解析が不可欠であるが, 異材境界上での応力分布の特殊性から従来の数値解析法では精度上の不安があり, 上述の (1) の利点を生かした BEM の開発の意義は大きいものと思われる.

本論文では, 二次元の Hetenyi の解を BEM の基本解として定式化するとともに, この解を既報⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾の直接法 BEM 二次元弾性解析プログラムに組み込み, 均質材および異種材料中の各種のき裂の応力拡大係数の解析を行った. 特に自由表面および異材境界に近接し

* 昭和 62 年 4 月 3 日 第 64 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 61 年 9 月 30 日.

^{*1} 正員, 東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木 7-22-1).

^{*2} 学生員, 東京大学大学院.

^{*3} 正員, 長崎大学工学部 (〒852 長崎市文教町 1-14).

たき裂を解析し、本解析法の精度および有用性について検討した。

2. Hetenyi の解を用いた定式化

図1に示すように、互いに異なる材料1と材料2が直線境界（以下異材境界と呼ぶ）で接合された二次元の弾性体を考える。着力点 P は材料1の境界 Γ_1 上に位置するものとして、材料1の領域に対する Somigliana の境界積分方程式は次式で与えられる。ただし、体積力は零とする。

$$\begin{aligned} C_{ij}u_j(P_1) + \int_{\Gamma_1} T_{ij}^1(P_1, Q_1)u_j(Q_1)d\Gamma \\ + \int_{\Gamma^*} T_{ij}^1(P_1, Q_1^*)u_j(Q_1^*)d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_1} U_{ij}^1(P_1, Q_1)t_j(Q_1)d\Gamma \\ + \int_{\Gamma^*} U_{ij}^1(P_1, Q_1^*)t_j(Q_1^*)d\Gamma \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

また材料2の領域に対しては次式の Somigliana の内部相反公式が成立する⁽¹¹⁾。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} T_{ij}^2(P_2, Q_2)u_j(Q_2)d\Gamma \\ + \int_{\Gamma^*} T_{ij}^2(P_2, Q_2^*)u_j(Q_2^*)d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_2} U_{ij}^2(P_2, Q_2)t_j(Q_2)d\Gamma \\ + \int_{\Gamma^*} U_{ij}^2(P_2, Q_2^*)t_j(Q_2^*)d\Gamma \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで、 $u_j(Q)$, $t_j(Q)$ は境界上の点 Q における変位、表面力であり、 $U_{ij}(P, Q)$, $T_{ij}(P, Q)$ は変位および表面力の基本解である。なお、 P および Q に付した添字1, 2は、それぞれの点が材料1または材料2中にあることを意味し、 Q^* は異材境界 Γ^* 上に位置することを意味する。 C_{ij} は剛体変位条件から決まる係数である。

異材境界 Γ^* 上では、次式を満たす必要がある。

$$\left. \begin{aligned} u_j(Q_1^*) - u_j(Q_2^*) &= 0 \\ t_j(Q_1^*) + t_j(Q_2^*) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 Q_1^* と Q_2^* は異材境界上の同一の座標値とする。

Kelvin の解を基本解とする通常の BEM 解析では、領域分割法を適用し、異材境界を離散化して解析することになる。この場合、式(3)は離散化の意味で満たされているにすぎない。

Hetenyi の解は、図2に示すように無限の異種材料接合板中の一点に集中力が作用する場合の厳密解であり、支配方程式 (Navier の式) はもちろん、式(3)の異材境界条件も厳密に満たすものである。この Hetenyi の基本解を U_{ij}^h , T_{ij}^h と表記する。また着力点 P と観測点 Q とが同一材料中にある場合を $h1$, それ

以外の場合を $h2$ と区別する。Hetenyi の解は異材境界上の点 Q^* ($Q_1^* = Q_2^*$) において次式を満たしている。

$$\left. \begin{aligned} T_{ij}^{h1}(P_1, Q_1^*) + T_{ij}^{h2}(P_1, Q_2^*) &= 0 \\ U_{ij}^{h1}(P_1, Q_1^*) - U_{ij}^{h2}(P_1, Q_2^*) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

前述の積分方程式(1)と(2)を加え合せ、式(3)、(4)を考慮すると異材境界上の積分が消去され、 Γ_1 と Γ_2 のみの次式の境界積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} C_{ij}u_j(P_1) + \int_{\Gamma_1} T_{ij}^{h1}(P_1, Q_1)u_j(Q_1)d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_2} T_{ij}^{h2}(P_1, Q_2)u_j(Q_2)d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_1} U_{ij}^{h1}(P_1, Q_1)t_j(Q_1)d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_2} U_{ij}^{h2}(P_1, Q_2)t_j(Q_2)d\Gamma \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

この式を離散化して解析すれば、 Γ_1 および Γ_2 上の未知の変位と表面力が得られ、問題が解けたことになる。この際、異材境界上の要素分割は不必要となる。

さて、Hetenyi の解は、Kelvin の解とそれ以外の項 (コンプリメンタリ) の和として表示できる。すなわち、変位の基本解 U_{ij}^h は次式の形で表せる。

$$\left. \begin{aligned} U_{ij}^{h1} &= U_{ij}^k + U_{ij}^{c1} \\ U_{ij}^{h2} &= \frac{1}{\Gamma} U_{ij}^k + U_{ij}^{c2}, \quad \Gamma = \frac{G_2}{G_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで G_1, G_2 はそれぞれの材料のせん断弾性係数である。Kelvin の解 U_{ij}^k はよく知られているので説明は省く。コンプリメンタリな変位の解 U_{ij}^c は、付録に示す。 P と Q は同一材料中にあるかないかで、添字 c_1

図1 直線異材境界を有する有限板

図2 異種材料中の一点に働く集中力

と c_2 の区別が必要となる。

また表面力の基本解も同様な形で表示される。

$$T_0^s = T_0^{s1} + T_0^{s2} \dots\dots\dots (7)$$

Kelvin の表面力の解 T_0^s は説明を省くものとして、コンプリメンタリな表面力の解を付録に示す。ただし、応力の形で表示した。

図 2 において両材料のヤング率、ポアソン比を等しく ($E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2$) すると均質無限板となり、Kelvin の解となる。また $E_2 = 0$ すると直線自由境界を有する半無限板となり、Mindlin の解と一致する。すなわち、Hetenyi の解は特別な解として Kelvin および Mindlin の解を含むことがわかる。したがって、Hetenyi の解は一見複雑な式となるが、いったん組み込んでしまえば、汎用性を失なわないで三つの解を基本解として使い分けることができる。

3. 離散化解析

本研究における離散化解析は通常の直接法であり、用いたプログラムは二次アイソパラメトリック要素を用い、Lachat ら⁽¹²⁾に従い誤差評価法に基づく効率化した数値積分スキームを導入している。また領域分割法も可能である。なお、要素分割は自動分割プログラムを使って行い、境界の分割パターンとして等分割と等比分割を用意した。

二次のアイソパラメトリック要素を使う場合はいわゆる角の問題が生じる。すなわち角の両側で表面力が未知となる問題は方程式が不足して、そのままでは解くことができない〔図 3 (a)〕。また異材境界の両側で表面力が未知の問題も角点の問題のように方程式が不足する〔図 3 (b)〕。異材境界では図 2 の座標系におけ

る応力成分 σ_y が異材境界の両側で不連続な未知量として存在するからである。この問題は図 3 (b) のように異材境界の片側の要素を非適合要素にして解決した。ここでは、図 4 のように変位と表面力を定義する節点を、正規座標系で $\xi = -1, 0, 3/4$ の位置に置く非適合要素を用いた。この時、要素内の任意の点における変位、表面力は次のように表される。

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \phi_1(\xi)u_1 + \phi_2(\xi)u_2 + \phi_3(\xi)u_3 \\ t(\xi) &= \phi_1(\xi)t_1 + \phi_2(\xi)t_2 + \phi_3(\xi)t_3 \end{aligned} \dots\dots (8)$$

ここで、内挿関数 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 は次のようになる。

図 5 長方形板中の中央き裂 (均質材, 1/4 領域)

図 3 未知表面力の不連続点

図 4 非適合要素

図 6 中央き裂の要素分割パターン (Kelvin)

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\xi) &= \frac{4}{7}(\xi - 3/4)\xi \\ \phi_2(\xi) &= -\frac{4}{3}(\xi - 3/4)(\xi + 1) \\ \phi_3(\xi) &= \frac{16}{21}(\xi + 1)\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

4. 数値解析例

Hetenyi の解およびそれに内包される Kelvin の解, Mindlin の解を基本解として, 各種き裂の応力拡大係数を解析した。なお, 応力拡大係数は変位外挿法により決定した。

4.1 均質材中の中央き裂の解析 まず図 5 に示すような均質長方形板中の中央き裂が一樣引張りを受ける場合について, Kelvin の解および Mindlin の解を基本解として境界要素法解析を行った。その 1/4 領域における要素分割例を図 6 に示す。図 6 は Kelvin の解を用いる場合の要素分割であり, Mindlin の解を用いる場合は, 応力自由となる境界の要素分割は不必要となり, それ以外は同一の分割とした。2 種類の分割パターンを用意したが, 一つは等分割であり, 他方はあらかじめ応力集中が予想される部分を等比数列的に分割した。両者の節点数はほぼ同じである。

表 1 に, 2 種類の要素分割パターンに対して, Kelvin および Mindlin の解を用いた本解析結果を示す。応力拡大係数は $F_I = K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ で無次元化した。ここでは a/W が 0.6 から 0.99 までの大きなき裂を対象とした。同表には既存の解も併記したが, 石田の解は $a/W < 0.9$ で精度のよい解であり, Koiter の解は $a/W > 0.9$ において信頼できる解である⁽¹³⁾。表 1 から, Mindlin の解を用いた本解析結果は, 要素分割パターンにあまり依存せず, a/W の全範囲で精度よい解となっていることがわ

かる。特にき裂が自由境界に達する直前まで, よい解が得られたことが注目される。

一方 Kelvin の解を用いた場合は要素分割パターンに依存し, 自由境界を粗く等分割した解は, a/W が大きくなるに従って Mindlin の解を用いた解析結果との差がしだいに大きくなる。ただし, き裂が到達すべき自由境界近傍を等比分割した場合は, $a/W = 0.99$ の場合を除きほぼ正しい解が得られている⁽¹⁴⁾。すなわち, Kelvin の解を用いても, 適切な要素分割を行えば, き裂が自由境界に近接しても正しい解が得られることがわかる。しかし, この種の問題の解析において適切な要素分割の条件を見出すのは困難を伴い, Mindlin の解を用いることで自由境界を分割しなくてすむ利点は大きいものと思われる。

4.2 異種材料中のき裂の解析 前述の利点は異材境界き裂の解析においても成立し, 異材境界条件を厳密に満たす Hetenyi の解を用いれば, 異材境界の要素分割が不用となり, 特に異材境界に近接したき裂について高精度な解が得られるものと考えられる。これを実証するため, 二, 三の異材境界き裂問題を本解析法により解析した。

図 7 に示すように, 同一材料にはさまれた接着層中の中央き裂が一樣引張りを受ける問題について解析し

表 1 中央き裂 (図 5) の応力拡大係数

a/W	Our results				Isida	Fedderson	Koiter
	Discretizing Type A		Discretizing Type B				
	Kelvin	Mindlin	Kelvin	Mindlin			
0.6	1.3034	1.3018	1.2934	1.2975	1.3033	1.3043	1.2921
0.7	1.4848	1.4827	1.4764	1.4851	1.4882	1.4841	1.4779
0.8	1.8103	1.8100	1.7919	1.8135	1.8160	1.7989	1.8075
0.833	1.9818	1.9821	1.9576	1.9877	1.9904	1.9656	1.9834
0.851	2.1022	2.1019	2.0728	2.1061	2.1069	2.0769	2.1004
0.870	2.2531	2.2530	2.2196	2.2536	2.2535	2.2170	2.2476
0.889	2.4417	2.4420	2.4046	2.4422	2.4442	2.3997	2.4304
0.9	2.5748	2.5754	2.3549	2.5797	2.5776	2.5283	2.5730
0.909	2.7014	2.7021	2.6585	2.7015	2.7039	2.6508	2.7026
0.95	3.6713	3.6750	3.5376	3.6517	3.590	3.5900	3.6637
0.975	5.1925	5.2176	4.6273	5.1274	—	5.0468	5.2017
0.99	7.9804	8.2066	5.9664	7.7196	—	7.9790	8.2451

図 7 二つの同一材料にはさまれた接着層中の中央き裂

図 8 要素分割例 (Hetenyi)

た。Hetenyi の解を用いる場合の 1/4 領域の要素分割例を図 8 に示す。自由境界が異材境界と交差する点 A は著しい応力集中が生じるので、その近傍を等比分割を用いて細かく分割した。また対称軸と異材境界とが交わる点 B においては、前述のように応力の不連続性のため、方程式の不足が生じるので非適合要素を配している。領域分割法を用いると、この問題の Kelvin の解を用いた解析も可能となるが、その際は異材境界を細かく分割しなければならない。

表 2 は、 $E_1=4.5 \times 10^5$ psi, $\nu_1=0.35$ の材料と $E_2=10^7$ psi, $\nu_2=0.3$ の材料の組合せについて、平面ひずみ問題として得た解析結果を、同一材料の組合せの無限板に対する Erdogan らの解⁽¹⁵⁾と比較して示す。無限板の解との比較のため、 a/W は 0.1 とした。同表には、接着層の厚さ h を種々に変えた場合の応力拡大係数を無次元化して表示した。Hetenyi の解を用いて異材境界を分割せずに得られた解は、 h がごく小さくなるまで比較的良好に Erdogan の解と一致した。ただし、この解は図から読取ったものであり、あまり正確ではない。一方、Kelvin の解を用いて領域分割法により求めた解は、 h が大きい場合は Hetenyi の解を用いた場合と一致するが、 h が小さい場合はかなりの差が生じている。これは、 h が小さいとき裂の近傍の異材境界上での応力変化が著しくなるためと考えられる。本解析では異材境界上を 10 要素に等分割したが、Kelvin の解を用いてよい解を得るためには、さらに細かい分割が必要となる。このように Kelvin の解を用いてもこの種の解析は可能であるが、異材境界の要素分割に配慮・工夫が必要となる。また、領域分割法では、異材境界上にも未知節点値を置くことになり、自由度の増加は著しい。この点、Hetenyi の解を用いた本解析法は、効率性・精度の面ですぐれた解法と思われる。

さらに図 9 に示すような異材境界を横切る内部き裂

を、平面応力問題として Hetenyi の解を用いて解析した。表 3 に、二つの材料のせん断弾性係数 G_1/G_2 と両材料中のき裂長の比 a_1/a_2 を種々に変えた場合の応力拡大係数の解を示す。ただし、両材料のポアソン比 ν は 0.3 とした。また $a_2/W=0.1$ (一定)として解析した。応力拡大係数は次式により無次元化して示している。

$$F_{I,B} = K_{I,B} / \sigma_1 \sqrt{\pi a} \quad (\text{材料 1 中のき裂端})$$

$$F_{I,A} = K_{I,A} / \sigma_2 \sqrt{\pi a} \quad (\text{材料 2 中のき裂端})$$

ここで、 $\sigma_2 = \Gamma \sigma_1 (1+x_1)/(1+x_2)$, $2a = a_1 + a_2$ である。表 3 には、無限板に対する石田ら⁽⁸⁾の解析結果も比較のため示している。本解析結果は、石田らの結果とほぼ一致していることがわかる。

図 10 は、片側き裂が異材境界に垂直に近接し、通過する問題の解析例を示す。両材料の ν を 0.3 とし、 G_1/G_2 を各種の値にとり、平面応力問題として解析した。図から、 $\Gamma < 1$ の場合は、き裂が異材境界に近接すると K_I の急速な増加が生じ、また $\Gamma > 1$ の場合には急減することがわかる。これに対応して、異材境界に近接するき裂は、加速・減速・停留・分岐等の複雑な挙動を呈するが⁽¹⁶⁾、このような挙動を破壊力学的に評価するためには、異材境界近傍での K の精度よい解析

表 2 接着層中のき裂 (図 7) の応力拡大係数 (平面ひずみ)

h/w	h/a	F _I		
		Our results		Erdogan
		Kelvin	Hetenyi	
0.02	0.2	0.319	0.348	0.31
0.025	0.25	0.348	0.374	0.37
0.03	0.3	0.376	0.393	0.39
0.04	0.4	0.427	0.430	0.43
0.05	0.5	0.466	0.463	0.46
0.075	0.75	0.546	0.543	0.54
0.10	1.0	0.620	0.616	0.60
0.20	2.0	0.862	0.860	0.78
0.30	3.0	0.986	0.988	0.87
0.40	4.0	1.043	1.045	0.92
0.50	5.0	1.071	1.071	0.94

図 9 異材境界を横切る内部き裂

表 3 異材境界を横切るき裂 (図 9) の応力拡大係数 (平面応力)

a ₁ /a ₂	0.25				0.5				1.0			
	Isida		Our results		Isida		Our results		Isida		Our results	
	F _{I,A}	F _{I,B}	F _{I,A}	F _{I,B}	F _{I,A}	F _{I,B}	F _{I,A}	F _{I,B}	F _{I,A}	F _{I,B}	F _{I,A}	F _{I,B}
0.1	1.249	1.861	1.262	1.887	1.178	1.447	1.194	1.477	1.062	1.153	1.083	1.178
0.2	1.168	1.556	1.186	1.587	1.118	1.295	1.137	1.323	1.032	1.097	1.046	1.113
0.3	1.110	1.382	1.142	1.414	1.082	1.204	1.102	1.225	1.015	1.064	1.026	1.079
0.4	1.086	1.271	1.109	1.297	1.058	1.144	1.077	1.162	1.006	1.043	1.016	1.054
0.5	1.062	1.192	1.082	1.215	1.041	1.102	1.057	1.116	1.000	1.028	1.006	1.036
0.6	1.044	1.134	1.059	1.150	1.028	1.071	1.041	1.081	0.998	1.019	1.002	1.023
0.8	1.018	1.054	1.035	1.056	1.011	1.028	1.017	1.029	0.997	1.006	1.001	1.008
1.0	1.000	1.000	1.001	0.994	1.000	1.000	1.001	1.000	1.000	1.000	1.002	1.002

$$\begin{aligned}
& + 4A\xi^2 \frac{(x+\xi)(y-\eta)}{r_2^4} \Big] \\
U_{22}^{c1} = & K_u \Big[-\frac{Ax_1^2+B}{2} \log r_2 + A\xi \frac{(x+\xi)}{r_2^2} \\
& + Ax_1 \frac{(y-\eta)^2}{r_2^2} \\
& - 2A\xi^2 \frac{(x+\xi)^2 - (y-\eta)^2}{r_2^4} + A\xi \frac{(x+\xi)^3}{r_2^4} \\
& - 3A\xi \frac{(x+\xi)(y-\eta)^2}{r_2^4} \Big] \\
U_{11}^{c2} = & K_u \frac{1}{\Gamma} \Big[\frac{\{x_2(1-B) - (1+A)x_1\}}{2} \log \frac{1}{r_1} \\
& + (A-B) \frac{\xi(x-\xi)}{r_1^2} - B \frac{(x-\xi)^2}{r_1^2} \Big] \\
U_{12}^{c2} = & K_u \frac{1}{\Gamma} \Big[\frac{\{-x_2(1-B) + (1-A)x_1\}}{2} \theta_1 \\
& - B \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^2} + (A-B) \frac{\xi(y-\eta)}{r_1^2} \Big] \\
U_{21}^{c2} = & K_u \frac{1}{\Gamma} \Big[\frac{\{x_2(1-B) - (1-A)x_1\}}{2} \theta_1 \\
& - B \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^2} + (A-B) \frac{\xi(y-\eta)}{r_1^2} \Big] \\
U_{22}^{c2} = & K_u \frac{1}{\Gamma} \Big[\frac{\{x_2(1-B) - (1+A)x_1\}}{2} \log \frac{1}{r_1} \\
& - (A-B) \frac{\xi(x-\xi)}{r_1^2} - B \frac{(y-\eta)^2}{r_1^2} \Big]
\end{aligned}$$

2. 応力の解 (コンプリメンタリ) …式(7)参照

$$\begin{aligned}
T_{ij}^c &= \sigma_{ik}^c n_k \quad n_k : \text{法線ベクトル} \\
\sigma_{11}^{c1} = & -K_\sigma \Big[A(x_1-1) \frac{\xi}{r_2^2} - \frac{Ax_1-B}{2} \frac{(x+\xi)}{r_2^2} \\
& + 12A\xi^2 \frac{(x+\xi)}{r_2^4} - 2A(x_1+5) \xi \frac{(x+\xi)^2}{r_2^4} \\
& + 2Ax_1 \frac{(x+\xi)^3}{r_2^4} \\
& - 16A\xi^2 \frac{(x+\xi)^3}{r_2^6} + 16A\xi \frac{(x+\xi)^4}{r_2^6} \Big] \\
\sigma_{12}^{c1} = & -K_\sigma (y-\eta) \Big[\frac{3Ax_1+B}{2} \frac{1}{r_2^2} - 12A \frac{\xi^2}{r_2^4} \\
& - 2A(x_1-5) \xi \frac{(x+\xi)}{r_2^4} - 2Ax_1 \frac{(y-\eta)^2}{r_2^4} \\
& + 16A\xi^2 \frac{(y-\eta)^2}{r_2^6} \\
& - 16A\xi \frac{(x+\xi)(y-\eta)^2}{r_2^6} \Big] \\
\sigma_{21}^{c1} = & -K_\sigma \Big[A(x_1-1) \frac{\xi}{r_2^2} + \frac{Ax_1-B}{2} \frac{(x+\xi)}{r_2^2} \\
& + 4A\xi^2 \frac{(x+\xi)}{r_2^4} - 2A(x_1-7) \xi \frac{(y-\eta)^2}{r_2^4} \\
& + 2Ax_1 \frac{(x+\xi)(y-\eta)^2}{r_2^4} \\
& - 16A\xi^2 \frac{(x+\xi)(y-\eta)^2}{r_2^6} - 16A\xi \frac{(y-\eta)^4}{r_2^6} \Big] \\
\sigma_{11}^{c2} = & -K_\sigma (y-\eta) \Big[\frac{Ax_1-B}{2} \frac{1}{r_2^2} - 4A \frac{\xi^2}{r_2^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2A(x_1-1) \xi \frac{(x+\xi)}{r_2^2} \\
& + 2Ax_1 \frac{(x+\xi)^2}{r_2^4} + 16A\xi^2 \frac{(x+\xi)^2}{r_2^6} \\
& - 16A\xi \frac{(x+\xi)^3}{r_2^6} \Big] \\
\sigma_{12}^{c2} = & -K_\sigma \Big[A(1-x_1) \frac{\xi}{r_2^2} + \frac{3Ax_1+B}{2} \frac{(x+\xi)}{r_2^2} \\
& + 12A\xi^2 \frac{(x+\xi)}{r_2^4} - 2A(7-x_1) \xi \frac{(x+\xi)^2}{r_2^4} \\
& - 2Ax_1 \frac{(x+\xi)^3}{r_2^4} \\
& - 16A\xi^2 \frac{(x+\xi)^3}{r_2^6} + 16A\xi \frac{(x+\xi)^4}{r_2^6} \Big] \\
\sigma_{22}^{c1} = & -K_\sigma (y-\eta) \Big[\frac{3Ax_1+B}{2} \frac{1}{r_2^2} + 4A \frac{\xi^2}{r_2^4} \\
& - 2A(5-x_1) \xi \frac{(x+\xi)}{r_2^4} - 2Ax_1 \frac{(x+\xi)^2}{r_2^4} \\
& - 16A\xi^2 \frac{(x+\xi)^2}{r_2^6} + 16A\xi \frac{(x+\xi)^3}{r_2^6} \Big] \\
\sigma_{11}^{c2} = & -K_\sigma \frac{1}{r_1} \Big[\{ (B-A)\xi + \frac{B-Ax_1}{2} (x-\xi) \} \frac{1}{r_1} \\
& - 2 \{ (B-A)\xi + B(x-\xi) \} \frac{(x-\xi)^2}{r_1^3} \Big] \\
\sigma_{12}^{c2} = & -K_\sigma \frac{(y-\eta)}{r_1} \Big[\frac{-Ax_1-3B}{2} \frac{1}{r_1} \\
& - 2 \{ (B-A)(x-\xi)\xi - B(y-\eta)^2 \} \frac{1}{r_1^3} \Big] \\
\sigma_{21}^{c2} = & -K_\sigma \frac{1}{r_1} \Big[\{ (B-A)\xi \frac{B-Ax_1}{2} (x-\xi) \} \frac{1}{r_1} \\
& - 2 \{ (B-A)\xi + B(x-\xi) \} \frac{(y-\eta)^2}{r_1^3} \Big] \\
\sigma_{12}^{c2} = & -K_\sigma \frac{(y-\eta)}{r_1} \Big[\frac{Ax_1-1}{2} \frac{1}{r_1} - 2 \{ (B-A)\xi \\
& + B(x-\xi) \} \frac{(x-\xi)}{r_1^3} \Big] \\
\sigma_{22}^{c2} = & -K_\sigma \frac{1}{r_1} \Big[\{ (A-B)\xi - \frac{Ax_1+3B}{2} \\
& \times (x-\xi) \} \frac{1}{r_1} + 2 \{ (B-A)\xi \\
& + B(x-\xi) \} \frac{(x-\xi)^2}{r_1^3} \Big] \\
\sigma_{22}^{c2} = & -K_\sigma \frac{(y-\eta)}{r_1} \Big[\frac{-Ax_1-3B}{2} \frac{1}{r_1} + 2 \{ (B-A)\xi \\
& + B(x-\xi) \} \frac{(x-\xi)}{r_1^3} \Big]
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \\
r_2 &= \sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2} \\
\theta_i &= \arcsin \left(\frac{y-\eta}{r_i} \right) \quad (i=1,2) \\
K_u &= \frac{1+\nu_1}{4\pi E_1(1-\nu_1)}, \quad K_\sigma = \frac{1}{4\pi(1-\nu_1)}
\end{aligned}$$

$$A = \frac{1-\Gamma}{\Gamma x_1 + 1}, B = \frac{x_2 - \Gamma x_1}{\Gamma + x_2}, \Gamma = \frac{G_2}{G_1}$$

$$G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}$$

$$x_i = (3-\nu_i)/(1+\nu_i) \text{ (plane stress),}$$

$$(3-4\nu_i) \text{ (plane strain) } (i=1,2)$$

上記の解は、P 点が材料 1 にある場合 (図 2) の解であり、P 点が材料 2 にある場合の解も別途必要となるが、上記の解の材料定数を入れかえることにより容易に導ける。

文 献

- (1) Brebbia, C., Telles, J. and Wrobel, L., *Boundary Element Techniques*, (1984), 189, Springer-Verlag.
- (2) Telles, J. and Brebbia, C., *Int. J. Solids Struct.*, 17 (1981), 1149.
- (3) 木須・結城・浦, 機論, 52-480, A (昭 61), 1864.
- (4) Dundurs, J. and Hetenyi, M., *J. Appl. Mech.*, 28 (1961),

- 103.
- (5) Hetenyi, M. and Dundurs, J., *J. Appl. Mech.*, 29 (1962), 362.
- (6) Dundurs, J. and Hetenyi, M., *J. Appl. Mech.*, 32 (1965), 671.
- (7) 北川・結城・神原, 機論, 45-397, A (昭 54), 1024.
- (8) 石田・野口, 機論, 48-437, A (昭 58), 36.
- (9) 木須・結城・北川, 機論, 51-463, A (昭 60), 660.
- (10) 結城・松本, 生産研究, 38-8 (昭 61), 54.
- (11) Jaswan, M. and Symm, G., *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*, (1977), Academic Press. [関谷訳, 境界要素法, (昭 58), 66, プレイン図書.]
- (12) Lachat, J. and Watson, J., *Int. Num. Meth. Engng.*, 10 (1976), 991.
- (13) 石田, き裂の弾性解析と応力拡大係数, (昭 51), 145, 培風館.
- (14) 三好, 私信.
- (15) Erdogan, F. and Gupta, G., *Int. J. Solids Struct.*, 7 (1971), 39.
- (16) 山崎・結城・北川, 機論, 52-473, A (昭 61), 469.

討 論

〔質問〕 田中正隆 (信州大学工学部)

き裂の弾性問題の新しい境界要素法を開発されたことに敬意を表する。以下の点について質問したい。

(1) 境界条件の一部を満足する基本解を構成できれば、これを用いた境界要素解析においては要素分割の手数を大幅にカットできるのはまぎれもない事実である。特定の基本解を誘導するための解析的な考察は、離散化の手間を省くための努力と考えることができる。しかしながら、この種の解法では計算精度の向上や計算時間の短縮を行っても、解法の汎用性が損なわれることは否定できない。このような観点から、貴論文の結言(4)項の「汎用性のある解法」という表現に疑問を感じる。著者らのご意見をお聞かせ願いたい。

(2) 貴解法は、直線界面の問題に限定されると考えてよい。区分的に直線の界面からなる問題への応用、および界面が閉じたループを形成し外表面に現れない問題などは、貴解法でどのように取扱えばよいかが教示願いたい。

〔回答〕 有益な討論に感謝する。

(1) 本解析法の特徴は、解析対象・目的に応じて、Kelvin, Mindlin, Hetenyi の基本解を適切に選択し、使い分け、また同一の問題を 3 種の基本解で解析し、チェックする機能もある。Kelvin の解を用いる通常の BEM (領域分割も含む) 自体が汎用性がある解法であるが、この汎用性を維持し、かつ半無限板等の解析に有効な Mindlin の解も使え、さらに異材問題では

Hetenyi の解が使えることは、少なくとも汎用性を損なうものではないと考える。

たしかに、特殊な基本解を用いると、特殊な問題しか解析できなくなる場合も生じうるが、この基本解自体、汎用性があり、かつプログラミング上、特にその点に留意した。ただし、複雑な基本解を用いると、熱弾性、弾塑性への拡張性を損なう恐れがあるが、この点は、基本解の微分に数式処理システムを活用すれば、ある程度可能となるものと思われる。

(2) Hetenyi の解は、無限板中の円形介在物 (円孔も含む) に対する解であり、その半径が無限大の極限として本解析で用いた直線異材界面の解が与えられている。円形介在物・円孔に対する解を基本解として用いれば円境界を要素分割せずに解析できる。また領域分割法を用いれば、円の一部と直線で構成される閉ループまでは解析できるが、任意の閉曲線の解析は困難である。ただし、滑らかな閉曲線界面の問題ならば、Kelvin の解を用いて十分精度よく求められる。

本解析法は、直線界面同志ないし自由縁との交点、界面近傍のき裂などクリティカルな問題に威力を発揮する。一方、新材料は樹脂、セラミック、金属等の異種材料で接合され、その強度評価に際しては、界面端の応力集中や界面上ないし界面近傍のき裂の解析が重要となり、このようなニーズに答えるために開発したものである。

〔質問〕 笠野英秋 (東京工業大学)

非均質弾性体の BEM 解析法として一つの有力な手法を提案されたことに敬意を表す。さて、次の点についてご教示いただきたい。

(1) 図 7 における問題で、Kelvin の解および Hetenyi の解に基づく解析法の違いは前者が各材料にそれぞれ異なる基本解を用いているのに対して、後者はただ一つの基本解を用いていると考えてよろしいか。

(2) 異材境界を対象とする三つの問題、すなわち (i) 図 7 において接着層の両側の材料が異なる場合、(ii) 図 7 においてき裂がちょうど界面上にある場合、(iii) 図 9 においてき裂の一端 A あるいは B が界面上にある場合、式(5)に相当する境界積分方程式を定式化するにあたって Hetenyi の基本解における集中力の負荷点をどの材料中に設定するのが計算効率ならびに精度のうえから最もよいのか。

〔回答〕 (1) たしかにそのような見方もできるが、図 7 の問題を Kelvin の解で解く場合、材料 1 と

2 の領域について、別々に積分方程式を作り、離散化し、界面上の変位の連続と力の釣合い条件を付加して、問題を解く。この場合、界面の条件は離散化の意味でしか満たされない。一方、Hetenyi の解を用いれば、界面の条件が厳密に満たされている。

(2) 境界要素法では、着力点、観測点ともすべての境界上にとる必要があり、この場合も界面を除く全境界(材料 1 と 2 とともに)上に着力点をとる必要がある。なお、ご指摘の(i)の問題では、本基本解は図 2 に示すように二相材料の解なので、三相になるとこのままでは適用できない。ただし、領域分割法を用いれば、多層構造の解析も可能である。(ii)の界面上のき裂問題の解析は、重要な問題であるが、若干の工夫を要し、今後検討していきたい。(iii)の問題は図 10、表 4 と同じケースである。なお、着力点が異材界面上にある場合は、どちらか一方の材料中にあるものとして取扱えばよい。