変厚中空円板の非軸対称非定常熱応力の解析解*

菅 野 良 弘^{*1}, 木 元 順 一^{*2}

An Analytical Solution for Asymmetric Thermal Stresses in a Hollow Circular Plate of Variable Thickness

Yoshihiro SUGANO and Jyunichi KIMOTO

The determination of thermal stresses in plates with variable thickness, which is applicable to the design of commonly used structural elements such as fins, rotating discs and turbine blades, is presented analytically. A hollow circular plate of variable thickness considered here is subjected to asymmetric heating on the inner boundary and has a decreasing thickness from the inner boundary toward the outer boundary with the radial position. Analytical solutions are given for the transient temperature field in the plate of variable thickness insulated on the upper and lower surfaces and the steady-state temperature field in the same plate with a uniform heat transfer coefficient on both surfaces. The associated plane-stress thermoelastic problem is formulated in terms of a stress function, and the Michell's condition derived before and expressed in cylindrical co-ordinates here is used as an assurance of the single-valuedness of rotation in the plate of variable thickness. Numerical calculations are carried out for the distributions of temperature and thermal stress in the hollow circular plate of variable thickness for the various cases of thickness variation and heat transfer coefficient on the upper and lower surfaces.

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Multiply-connected Region, Hollow Circular Plate of Variable Thickness, Asymmetric Heating, Stress Function Method, Analytical Solution

1. 緒 言

変厚板の熱応力問題は、フィン、各種回転板、シリンダヘッドなどの基本的な高温強度設計のほかに、ガスタービンプラントなどの熱疲労割れ⁽¹⁾の発生を抑制する問題においてますます重要視されてきた。しかしながら一般的な温度場のもとでの変厚板の熱応力については未解決の点も多く、軸対称定常温度場のもとでの変厚板の熱応力は異方性、不均質性も含めて解析されているが⁽²⁾、起動・停止時において重要な非定常温度場のもとでの解析や回転と変位の一価性の考察が必要な非軸対称温度場のもとでの熱応力問題の解析解は、報告されていない。著者の一人は、前報⁽³⁾⁽⁴⁾において、 x, y 方向に任意の板厚変化を有する多重連結領域の非定常平面熱応力問題を応力関数法で定式化し、差分法にて数値解析する方法について報告した。そこでは、 x, y 方向に任意の板厚変化をもった多重連結領域内の回転と変位の一価性を保証するための条件式（いわゆる Michell の条件式）が提案された。

本研究では、板厚変化を有する多重連結領域の平面熱応力問題の解析解の一例として、非軸対称非定常温度場のもとにあり、板厚が半径座標のべき乗で表される変厚中空円板の平面熱応力問題を応力関数法で定式化し、その解析解を導出する。また、種々の板厚変化のべき指数、板上下面の熱伝達率の場合について数値計算し、非軸対称温度場のもとで板厚変化や熱伝達率が熱応力分布に及ぼす影響について考察する。

2. 解 析

2.1 温度場 図1のように座標系を設定し、内外半径 r_0, r_e 、内径における板厚 y_0 、半径 r における板厚 $y(r)$ の中空変厚板の温度分布を解析する。初期温度 0 の変厚板は、ある瞬間から内径が $T_0 f(\theta)$ なる任意の非軸対称温度に加熱され、外径と板上下面にお

図1 変厚中空円板の加熱条件と座標系

* 昭和62年3月13日 関西支部第62期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和62年4月17日。

^{*1} 正員、大阪府立大学工学部（〒591 堺市百舌鳥梅町4-804）。

^{*2} 学生員、大阪府立大学大学院。

いて温度 0 の周囲媒体へそれぞれ熱伝達率 h_e, h_o を通して熱放散があるものとする。このとき、この変厚中空円板の熱伝導方程式、初期条件式、境界条件式は、次のように表せる。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{dy}{dr} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{2h_o T}{\lambda_o y} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

$$T=0, t=0 \quad (2)$$

$$T=T_0 f(\theta), r=r_0 \quad (3)$$

$$\lambda_o \frac{\partial T}{\partial r} + h_e T = 0, r=r_e \quad (4)$$

ここで、 κ, λ_o はそれぞれ温度伝導率、熱伝導率である。

次に、板厚変化として、回転円板⁽⁵⁾においてよく使用され、半径座標のべき乗で表現される次式を採用する。

$$y=y_0(r/r_0)^{-m} \quad (5)$$

このとき、熱伝導方程式(1)は、次式となる。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1-m}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{2h_o T}{\lambda_o y_0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^m = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

解析にあたって次の Fourier 変換と Laplace 変換を導入する。

$$\left. \begin{aligned} T^*(r, n, \theta, t) &= \int_{-\pi}^{\pi} T(r, \theta', t) \cos n(\theta - \theta') d\theta' \\ T(r, \theta, t) &= (1/2\pi) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n T^*(r, n, \theta, t) \\ \varepsilon_0 &= 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}(r, n, \theta, p) &= \int_0^{\infty} T^*(r, n, \theta, t) e^{-pt} dt \\ T^*(r, n, \theta, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \tilde{T}(r, n, \theta, p) e^{pt} dp \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(6)を一般的に解くことは非常に困難であるため、板上下面の熱伝達率 h_o の次の二つの場合について温度場の解析を行う。

2・1・1 板上下面が断熱された変厚板の非定常温度場 ($h_o=0$) $h_o=0$ とし、式(6)、(3)、(4)を Fourier 変換と Laplace 変換すれば、

$$\frac{d^2 \tilde{T}}{dr^2} + \frac{1-m}{r} \frac{d\tilde{T}}{dr} - \left(\frac{p}{\kappa} + \frac{n^2}{r^2} \right) \tilde{T} = 0 \quad (9)$$

$$\tilde{T} = T_0 f^*(n, \theta)/p, r=r_0 \quad (10)$$

$$\lambda_o \frac{d\tilde{T}}{dr} + h_e \tilde{T} = 0, r=r_e \quad (11)$$

式(9)～(11)の解を逆変換するにあたり Laplace 逆変換積分式(8)₂を留数定理を用いて評価し、さらに式(7)₂によって Fourier 逆変換すれば、

$$\begin{aligned} T(r, \theta, t) &= (T_0/2\pi) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ r^{\xi_{n1}} r_e^{\xi_{n2}-1} (\lambda_o \xi_{n2} + h_e r_e) - r^{\xi_{n2}} r_e^{\xi_{n1}-1} (\lambda_o \xi_{n1} + h_e r_e) \right\} \\ &\quad / \left\{ r_0^{\xi_{n1}} r_e^{\xi_{n2}-1} (\lambda_o \xi_{n2} + h_e r_e) - r_0^{\xi_{n2}} r_e^{\xi_{n1}-1} (\lambda_o \xi_{n1} + h_e r_e) \right\} - 2(r/r_0)^q \sum_{l=1}^{\infty} [(\lambda_o(q+\mu_n) + h_e r_e) \\ &\quad \times \{J_{\mu_n}(\omega_{nl}r) Y_{\mu_n}(\omega_{nl}r_e) - Y_{\mu_n}(\omega_{nl}r) J_{\mu_n}(\omega_{nl}r_e)\} - r_e \omega_{nl} \lambda_o \{J_{\mu_n}(\omega_{nl}r) Y_{\mu_{n+1}}(\omega_{nl}r_e) \\ &\quad - Y_{\mu_n}(\omega_{nl}r) J_{\mu_{n+1}}(\omega_{nl}r_e)\}] e^{-\kappa \omega_{nl}^2 t} / \omega_{nl} \{r_e^2 \omega_{nl} \lambda_o \{J_{\mu_n}(\omega_{nl}r_0) Y_{\mu_n}(\omega_{nl}r_e) - Y_{\mu_n}(\omega_{nl}r_0) J_{\mu_n}(\omega_{nl}r_e)\} \\ &\quad + r_e \{\lambda_o(q-\mu_n) + h_e r_e\} \{J_{\mu_n}(\omega_{nl}r_0) Y_{\mu_{n+1}}(\omega_{nl}r_e) - Y_{\mu_n}(\omega_{nl}r_0) J_{\mu_{n+1}}(\omega_{nl}r_e)\} \\ &\quad + r_0 \{\lambda_o(q+\mu_n) + h_e r_e\} \{J_{\mu_{n+1}}(\omega_{nl}r_0) Y_{\mu_n}(\omega_{nl}r_e) - Y_{\mu_{n+1}}(\omega_{nl}r_0) J_{\mu_n}(\omega_{nl}r_e)\} \\ &\quad - r_0 r_e \omega_{nl} \lambda_o \{J_{\mu_{n+1}}(\omega_{nl}r_0) Y_{\mu_{n+1}}(\omega_{nl}r_e) - Y_{\mu_{n+1}}(\omega_{nl}r_0) J_{\mu_{n+1}}(\omega_{nl}r_e)\}] \} f^*(n, \theta) \quad (12) \end{aligned}$$

ここで、

$$\xi_{n1}, \xi_{n2} = q \pm \mu_n, q = m/2, \mu_n = \sqrt{m^2/4 + n^2}, n=0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

また、 $J_{\mu_n}(\)$, $Y_{\mu_n}(\)$ は、それぞれ μ_n 階の第 1 種および第 2 種 Bessel 関数であり、 ω_{nl} は、 $n=0, 1, 2, \dots$ に対する次式の第 l 番目の正根である。

$$\begin{aligned} &\{\lambda_o(q+\mu_n) + r_e h_e\} \{J_{\mu_n}(\omega_{nl}r_0) Y_{\mu_n}(\omega_{nl}r_e) - Y_{\mu_n}(\omega_{nl}r_0) J_{\mu_n}(\omega_{nl}r_e)\} - r_e \omega_{nl} \lambda_o \\ &\quad \times \{J_{\mu_n}(\omega_{nl}r_0) Y_{\mu_{n+1}}(\omega_{nl}r_e) - Y_{\mu_n}(\omega_{nl}r_0) J_{\mu_{n+1}}(\omega_{nl}r_e)\} = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

2・1・2 板上下面から熱放散のある変厚板の定常温度場 ($h_o=一定$) 式(6)において $\partial T/\partial t=0$ とおき、式(6)、(3)、(4)を Fourier 変換すれば、

$$\frac{d^2 T^*}{dr^2} + \frac{1-m}{r} \frac{dT^*}{dr} - \frac{n^2}{r^2} T^* - \frac{2h_o T^*}{\lambda_o y_0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^m = 0 \quad (15)$$

$$T^* = T_0 f^*(n, \theta), r=r_0 \quad (16)$$

$$\lambda_0 \frac{dT^*}{dr} + h_e T^* = 0, r = r_e \quad \dots\dots\dots (17)$$

式(15)～(17)の解を Fourier 逆変換すれば,

$$T(r, \theta) = (T_0/2\pi) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (r/r_0)^q \{ [I_{\nu_n}(b_0 r^{q+1}) R_{na}(r_e) - K_{\nu_n}(b_0 r^{q+1}) R_{nb}(r_e)] / [I_{\nu_n}(b_0 r_0^{q+1}) \times R_{na}(r_e) - K_{\nu_n}(b_0 r_0^{q+1}) R_{nb}(r_e)] \} f^*(n, \theta) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで, $I_{\nu_n}(\quad), K_{\nu_n}(\quad)$ は ν_n 階の第 1 種および第 2 種変形 Bessel 関数, $f^*(n, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta') \cos n(\theta - \theta') d\theta'$, また,

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= 2/(m+2)\sqrt{2h_0/\lambda_0 y_0 r_0^m}, \nu_n = \sqrt{m^2 + 4n^2} \\ R_{na}(r_e) &= [\lambda_0 r_e^{-1} \{q + \nu_n(q+1)\} + h_e] K_{\nu_n}(b_0 r_e^{q+1}) - \lambda_0 b_0(q+1) r_e^q K_{\nu_{n+1}}(b_0 r_e^{q+1}) \\ R_{nb}(r_e) &= [\lambda_0 r_e^{-1} \{q + \nu_n(q+1)\} + h_e] I_{\nu_n}(b_0 r_e^{q+1}) + \lambda_0 b_0(q+1) r_e^q I_{\nu_{n+1}}(b_0 r_e^{q+1}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

2・2 応力場 板厚と板厚変化はともに円板の直径に比べ十分小さく, 一定厚の平面応力の仮定が適用できるものとして, 式(5)の板厚変化をもつ中空円板の熱弾性平面応力問題を応力関数法で定式化する。

半径 r で $y(r)$ の板厚をもつ変厚板の釣合い式は,

$$\frac{\partial(r y \sigma_{rr})}{\partial r} - y \sigma_{\theta\theta} + y \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial(r^2 y \sigma_{r\theta})}{\partial r} + r y \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

ひずみの適合条件式と平面応力状態の応力-ひずみ式は, それぞれ次のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(2r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} - r^2 \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} \right) + r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}) + \alpha T, \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}) + \alpha T, \varepsilon_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{2G} \quad \dots\dots\dots (22)$$

等厚板の釣合い式と式(20)との類似から, 釣合い式(20)を恒等的に満足する応力関数 χ を次のように導入する。

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{y} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right), \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{y} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \sigma_{r\theta} = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \quad \dots\dots\dots (23)$$

式(21)のひずみの適合条件式を式(23)の応力関数 χ で表すと, 変厚板の熱弾性平面応力問題の基礎微分方程式は次式のように得られる。

$$\left\{ r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2+\nu) r \frac{\partial}{\partial r} - \nu \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \frac{1}{y_0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^m \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \left\{ \nu r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (1+2\nu) r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \frac{1}{y_0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + 2(1+\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{y_0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^m \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \right\} \right] = -E \alpha r^2 \nabla^2 T \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで, $\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + 1/r \partial/\partial r + 1/r^2 \partial^2/\partial \theta^2$

式(24)の一般解 χ を, その同次微分方程式の一般解 χ_0 と式(24)の特解 χ_p の和として求める。まず, χ_0 の一般形は, 次式で与える。

$$\chi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \chi_{an}(r) \cos n\theta + \chi_{bn}(r) \sin n\theta \} \quad \dots\dots\dots (25)$$

式(25)を式(24)に代入すれば, $\chi_{an}(r)$ について次の Euler 形の微分方程式を得る [$\chi_{bn}(r)$ についても同様]。

$$r^4 \frac{d^4 \chi_{an}}{dr^4} + 2(m+1) r^3 \frac{d^3 \chi_{an}}{dr^3} + (m^2 + m - 2n^2 - \nu m - 1) r^2 \frac{d^2 \chi_{an}}{dr^2} - (\nu m^2 - \nu m + m + 2n^2 m - 2n^2 - 1) r \frac{d \chi_{an}}{dr} + n^2(n^2 + \nu m^2 - \nu m + 3m - 4) \chi_{an} = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

上式の一般解は次のように表される。

$$\chi_{an}(r) = A_n r^{\lambda_{n1}} + B_n r^{\lambda_{n2}} + C_n r^{\lambda_{n3}} + D_n r^{\lambda_{n4}} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \lambda_{n3}, \lambda_{n4} &= -(\gamma_0 \pm \beta_1), -(\gamma_0 \pm \beta_2), \gamma_0 = (m-2)/2, \beta_1^2 + \beta_2^2 = (m-2)^2/2 + m(1+\nu) + 2n^2 \\ \beta_1^2 \beta_2^2 &= [\{ (m-2)^2/2 + m(1+\nu) + 2n^2 \}^2 - m^2(1+\nu)^2 + 4n^2 m(2-2\nu + \nu m) - 16n^2] / 4 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

式(28)において $n=0$ (軸対称) のとき, $\lambda_{01} \sim \lambda_{04} = 0, -(m-2), -(m-2)/2 \pm \sqrt{(m-2)^2 + 4m(1+\nu)}/2$ が得られる。

そして, 式(25)の具体的な関数形は,

$$\chi_0 = A_0 + B_0 r^{\lambda_{02}} + C_0 r^{\lambda_{03}} + D_0 r^{\lambda_{04}} + \theta (A'_0 + B'_0 r^{\lambda_{02}} + C'_0 r^{\lambda_{03}} + D'_0 r^{\lambda_{04}}) + F \{ r \theta \sin \theta + 2(\nu m - \nu + 1) r \log r \cdot$$

$$\begin{aligned} & \times \cos \theta / (m - \nu m - 4) \} + H \{ r \theta \cos \theta - 2(\nu m - \nu + 1) r \log r \cdot \sin \theta / (m - \nu m - 4) \} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{\lambda_{n1}} + B_n r^{\lambda_{n2}} + C_n r^{\lambda_{n3}} + D_n r^{\lambda_{n4}}) \cos n\theta \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n r^{\lambda_{n1}} + B'_n r^{\lambda_{n2}} + C'_n r^{\lambda_{n3}} + D'_n r^{\lambda_{n4}}) \sin n\theta \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

本研究では、以後の解析を少なくとも s 本 ($s \geq 2$) の対称軸をもった問題に限定して行う。このとき、式(29)から応力を多価にしない応力関数を選び、また、式(24)の右辺に式(12)あるいは式(18)の温度関数を代入して特解 χ_p を定数変化法によって求め、これらを加え合わせると式(24)の一般解 χ は、次のように得られる。

$$\begin{aligned} \chi = & A_0 + B_0 r^{\lambda_{02}} + C_0 r^{\lambda_{03}} + D_0 r^{\lambda_{04}} - \frac{I_{01}(r)}{\lambda_{02} \lambda_{03} \lambda_{04}} + \frac{r^{\lambda_{02}} I_{02}(r)}{\lambda_{02} \zeta_{023} \zeta_{024}} - \frac{r^{\lambda_{03}} I_{03}(r)}{\lambda_{03} \zeta_{023} \zeta_{034}} + \frac{r^{\lambda_{04}} I_{04}(r)}{\lambda_{04} \zeta_{024} \zeta_{034}} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{sn} r^{\lambda_{sn1}} + B_{sn} r^{\lambda_{sn2}} + C_{sn} r^{\lambda_{sn3}} + D_{sn} r^{\lambda_{sn4}} + \frac{r^{\lambda_{sn1}} I_{sn1}(r)}{\zeta_{sn12} \zeta_{sn13} \zeta_{sn14}} - \frac{r^{\lambda_{sn2}} I_{sn2}(r)}{\zeta_{sn12} \zeta_{sn23} \zeta_{sn24}} \right. \\ & \left. + \frac{r^{\lambda_{sn3}} I_{sn3}(r)}{\zeta_{sn13} \zeta_{sn23} \zeta_{sn34}} - \frac{r^{\lambda_{sn4}} I_{sn4}(r)}{\zeta_{sn14} \zeta_{sn24} \zeta_{sn34}} \right\} \cos n\theta \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

ここで、 $\zeta_{0ij} = \lambda_{0i} - \lambda_{0j}$, $\zeta_{snij} = \lambda_{sni} - \lambda_{snj}$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$)、また、

$$\left. \begin{aligned} I_{0i}(r) &= \int_{r_0}^r r^{-m+1-\lambda_{0i}} g_0(r) dr, \quad I_{sni}(r) = \int_{r_0}^r r^{-m+1-\lambda_{sni}} g_{sn}(r) dr \\ g_0(r) &= -E a r_0^m y_0 r^2 \nabla_i^2 T_{00}(r) \\ g_{sn}(r) &= -E a r_0^m y_0 r^2 (\nabla_i^2 - (sn)^2 / r^2) T_{sn}(r) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ただし、 $\nabla_i^2 = \partial^2 / \partial r^2 + 1/r \partial / \partial r$, $T_{00}(r)$, $T_{sn}(r)$ は、式(12)あるいは式(18)の温度関数の軸対称項 ($n=0$) および非軸対称項 ($n \geq 1$) の r の関数部のみを示す。

一方、等厚板の応力関数 χ_0 はよく知られている⁽⁶⁾。

式(30)を式(23)に代入すれば、変厚板の熱応力成分は次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & y_0^{-1} (r/r_0)^m \left\{ B_0 \lambda_{02} r^{\lambda_{02}-2} + C_0 \lambda_{03} r^{\lambda_{03}-2} + D_0 \lambda_{04} r^{\lambda_{04}-2} + \frac{r^{\lambda_{02}-2} I_{02}(r)}{\zeta_{023} \zeta_{024}} - \frac{r^{\lambda_{03}-2} I_{03}(r)}{\zeta_{023} \zeta_{034}} \right. \\ & + \frac{r^{\lambda_{04}-2} I_{04}(r)}{\zeta_{024} \zeta_{034}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{sn} \{ \lambda_{sn1} - (sn)^2 \} r^{\lambda_{sn1}-2} + B_{sn} \{ \lambda_{sn2} - (sn)^2 \} r^{\lambda_{sn2}-2} + C_{sn} \{ \lambda_{sn3} - (sn)^2 \} r^{\lambda_{sn3}-2} \right. \\ & + D_{sn} \{ \lambda_{sn4} - (sn)^2 \} r^{\lambda_{sn4}-2} + \frac{\{ \lambda_{sn1} - (sn)^2 \} r^{\lambda_{sn1}-2}}{\zeta_{sn12} \zeta_{sn13} \zeta_{sn14}} I_{sn1}(r) - \frac{\{ \lambda_{sn2} - (sn)^2 \} r^{\lambda_{sn2}-2}}{\zeta_{sn12} \zeta_{sn23} \zeta_{sn24}} I_{sn2}(r) \\ & \left. \left. + \frac{\{ \lambda_{sn3} - (sn)^2 \} r^{\lambda_{sn3}-2}}{\zeta_{sn13} \zeta_{sn23} \zeta_{sn34}} I_{sn3}(r) - \frac{\{ \lambda_{sn4} - (sn)^2 \} r^{\lambda_{sn4}-2}}{\zeta_{sn14} \zeta_{sn24} \zeta_{sn34}} I_{sn4}(r) \right] \cos n\theta \right\} \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & y_0^{-1} (r/r_0)^m \left\{ B_0 \lambda_{02} (\lambda_{02} - 1) r^{\lambda_{02}-2} + C_0 \lambda_{03} (\lambda_{03} - 1) r^{\lambda_{03}-2} + D_0 \lambda_{04} (\lambda_{04} - 1) r^{\lambda_{04}-2} + \frac{(\lambda_{02} - 1) r^{\lambda_{02}-2} I_{02}(r)}{\zeta_{023} \zeta_{024}} \right. \\ & - \frac{(\lambda_{03} - 1) r^{\lambda_{03}-2} I_{03}(r)}{\zeta_{023} \zeta_{034}} + \frac{(\lambda_{04} - 1) r^{\lambda_{04}-2} I_{04}(r)}{\zeta_{024} \zeta_{034}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{sn} \lambda_{sn1} (\lambda_{sn1} - 1) r^{\lambda_{sn1}-2} + B_{sn} \lambda_{sn2} (\lambda_{sn2} - 1) \right. \\ & \times r^{\lambda_{sn2}-2} + C_{sn} \lambda_{sn3} (\lambda_{sn3} - 1) r^{\lambda_{sn3}-2} + D_{sn} \lambda_{sn4} (\lambda_{sn4} - 1) r^{\lambda_{sn4}-2} + \frac{\lambda_{sn1} (\lambda_{sn1} - 1) r^{\lambda_{sn1}-2}}{\zeta_{sn12} \zeta_{sn13} \zeta_{sn14}} I_{sn1}(r) \\ & \left. - \frac{\lambda_{sn2} (\lambda_{sn2} - 1) r^{\lambda_{sn2}-2}}{\zeta_{sn12} \zeta_{sn23} \zeta_{sn24}} I_{sn2}(r) + \frac{\lambda_{sn3} (\lambda_{sn3} - 1) r^{\lambda_{sn3}-2}}{\zeta_{sn13} \zeta_{sn23} \zeta_{sn34}} I_{sn3}(r) - \frac{\lambda_{sn4} (\lambda_{sn4} - 1) r^{\lambda_{sn4}-2}}{\zeta_{sn14} \zeta_{sn24} \zeta_{sn34}} I_{sn4}(r) \right\} \cos n\theta \dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = & y_0^{-1} (r/r_0)^m \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{sn} (\lambda_{sn1} - 1) r^{\lambda_{sn1}-2} + B_{sn} (\lambda_{sn2} - 1) r^{\lambda_{sn2}-2} + C_{sn} (\lambda_{sn3} - 1) r^{\lambda_{sn3}-2} \right. \\ & + D_{sn} (\lambda_{sn4} - 1) r^{\lambda_{sn4}-2} + \frac{(\lambda_{sn1} - 1) r^{\lambda_{sn1}-2}}{\zeta_{sn12} \zeta_{sn13} \zeta_{sn14}} I_{sn1}(r) - \frac{(\lambda_{sn2} - 1) r^{\lambda_{sn2}-2}}{\zeta_{sn12} \zeta_{sn23} \zeta_{sn24}} I_{sn2}(r) \\ & \left. + \frac{(\lambda_{sn3} - 1) r^{\lambda_{sn3}-2}}{\zeta_{sn13} \zeta_{sn23} \zeta_{sn34}} I_{sn3}(r) - \frac{(\lambda_{sn4} - 1) r^{\lambda_{sn4}-2}}{\zeta_{sn14} \zeta_{sn24} \zeta_{sn34}} I_{sn4}(r) \right\} \sin n\theta \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

純熱応力問題に対する力学的境界条件式は、

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0, \quad r = r_0; \quad \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0, \quad r = r_e \dots\dots\dots (35)$$

多重連結領域の平面熱応力問題においては、式(32)～(34)で得られる熱応力成分が一価であっても、回転および変位成分が一価であるとは限らず、それらの一価性を保証する条件式を考察せねばならない⁽⁷⁾。こ

では、 s 本以上 (x, y 軸を含む) の対称軸をもつ問題を考察の対象としているので x, y 方向の変位の一価性 (r, θ 方向の変位でも同等) は恒等的に満足される⁽⁷⁾。

既報⁽³⁾において得られた x, y 方向に任意の板厚変化がある場合の回転の一価性を保証する条件式を、 r 方向にのみ板厚変化がある場合について極座標表示すれば、本問題に対する回転の一価性を保証する条件式

は,

$$\oint_L \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{y} \nabla^2 \chi + E \alpha T \right) + \frac{(1+\nu)}{y^2} \frac{dy}{dr} \right. \\ \left. \times \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) \right\} r d\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここで、 L は、内側境界曲線またはこれを含む任意の一周積分路である。

式(32)、(34)から明白なように非軸対称項の未知係数 $A_{sn}, B_{sn}, C_{sn}, D_{sn}$ は式(35)の4式から完全に決定され、また、軸対称項の未知係数 B_0, C_0, D_0 は式(35)の σ_{rr} に対する二つの境界条件式と式(36)の回転の一価性を保証する条件式から決定される。このように未知係数が決定されると、式(32)～(34)より変厚中空円板の熱応力分布が容易に計算される。 s 本 ($s \geq 2$) の対称軸を有する温度場であれば、2・1節で考察された境界条件に拘束されることなく、また、定常でも非定常でも任意の温度場をもつ式(5)の変厚板について式(32)～(34)は成立する。

3. 数 値 計 算

内側境界に与える非軸対称な温度分布 $f(\theta)$ として、次のような x, y 軸に関して対称なものを考える。

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 - \frac{\theta^2}{\alpha_0^2} (|\theta| \leq \alpha_0), & 0(\alpha_0 < |\theta| < \pi - \alpha_0) \\ 1 - \frac{(|\theta| - \pi)^2}{\alpha_0^2} (\pi - \alpha_0 \leq |\theta| \leq \pi) \end{cases}$$

また、数値計算諸元として次のものを採用した。

$$\rho_e = r_e/r_0 = 2, \quad \alpha_0 = 30^\circ, \quad m_e = h_e r_0 / \lambda_0 = 0.1$$

$$m_0 = h_0 r_0 / \lambda_0 = 0, \quad 1.0, \quad 10.0, \quad \bar{y}_0 = y_0 / r_0 = 0.2$$

$$m = 0, 0.2, 0.4, 1.2, 2.0, \quad \nu = 0.3$$

変厚板の三次元解が報告されていないので三次元解との比較はできないが、ここでは、等厚板において平面応力解の有効な限界の板厚 [円板の外径に対する板厚の比, $y_0/(2r_e)$ が 0.05 以下の場合]⁽⁸⁾、またはこれより薄い板厚を有し、板厚変化のゆるやかな変厚板を平面応力解の有効な場合と仮定して数値計算を行った。

さらに、無次元量として次のものを用いている。

$$\rho = r/r_0, \quad \tau = \kappa t / r_0^2, \quad \bar{T} = T/T_0, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / E \alpha T_0$$

図2に、板上下面が断熱された2・1項の非定常温度分布に及ぼす板厚変化の影響を $\tau = 0.05$ について示した。板上下面が断熱のとき、板厚減少が大きい (m が大きい) ほど熱容量が小さくなり内部の温度上昇は増大し、半径方向の温度こう配はゆるやかとなる。

図3、4は、この非定常温度場による内外境界の円周方向熱応力 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ の θ 方向分布に及ぼす板厚変化の影響を示している。板厚減少が大きいほど、内側境界周辺の温度こう配が小さくなるため加熱域 ($\theta \leq 30^\circ$) での圧縮熱応力は小さくなっている。また、板厚減少が

図2 板上下面が断熱された変厚板の温度分布

図3 内側境界の $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ に及ぼす板厚変化の影響

図4 外側境界の $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ に及ぼす板厚変化の影響

図5 板上下面に熱放散のある変厚板の $\sigma_{\theta\theta}$ に及ぼす板厚変化の影響

大きくなると、加熱される内側境界周辺の熱変形を拘束する外側部分の拘束力が弱まるため変形が容易になって圧縮熱応力が小さくなっていると考えられる。逆に、この拘束力によって、板厚減少が大きいほど、図4の外側境界周辺の $\sigma_{\theta\theta}$ は大きくなっている。さらに、定常時の $\sigma_{\theta\theta}$ の θ 方向の分布に注目すると、 $m=0$ の場合のみ $\sigma_{\theta\theta}$ が軸対称な分布を呈している。これを、熱応力式(32)、(34)と境界条件式(35)に基づいて考察する。板上下面が断熱された($m_0=0$)等厚板の場合、定常時の温度関数は調和関数となり、その軸対称項 $T_{00}(r)$ と非軸対称項 $T_{sn}(r)$ を含む式(31)の関数 $g_0(r)$ と $g_{sn}(r)$ はいずれも零となる。したがって、式(32)、(34)の特解項はすべて零となり、式(35)の境界条件のみから決定される(回転の一価性とは無関係に)非軸対称項の未知係数 $A_{sn} \sim D_{sn}$ がすべて零となるため、熱応力成分は軸対称となる。このことは、 x, y 軸に関して対称な加熱を受けるとき定常状態において、等厚板の温度関数の非軸対称項は熱応力を生じないが、一方、変厚板のそれは熱応力を引き起こすことを意味している。

次に、図5に、板上下面から熱放散($m_0=10$)のある $2 \cdot 1 \cdot 2$ 項の定常温度場のもとでの変厚中空円板の $\sigma_{\theta\theta}$ の θ 方向の分布に及ぼす板厚変化の影響を示した。板上下面から熱放散のある場合は、等厚板でも温度関数が調和関数とならず $g_{sn}(r) \neq 0$ であるため、図中の $\rho=1$ の曲線に見られるように定常状態においても $\sigma_{\theta\theta}$ に顕著な非軸対称性が現れている。この場合の内外境界の $\sigma_{\theta\theta}$ に及ぼす板厚変化の影響は、 $2 \cdot 1 \cdot 1$ 項の温度場の加熱初期の場合と同様である。ただ、ビオ一数が $m_0=10$ と大きいので板厚変化によっても温度こう配は変化せず、熱応力を支配するのは前述の板厚

図6 内側境界の $\sigma_{\theta\theta}$ に及ぼす板上下面のビオ一数と板厚変化の影響

減少によって変化する拘束力である。

最後に、図6に、 $2 \cdot 1 \cdot 2$ 項の定常温度場において板上下面のビオ一数 m_0 と板厚変化 m が内側境界の $\sigma_{\theta\theta}$ の θ 方向の分布に及ぼす影響を示した。

4. 結 言

(1) 板厚変化が r のべき乗で与えられる変厚中空円板が非軸対称加熱される場合の平面熱応力問題の解析解を、応力関数法によって回転の一価性を考慮しつつ導出した。

(2) $2 \cdot 1 \cdot 1$, $2 \cdot 1 \cdot 2$ 項とも加熱域の圧縮の円周方向熱応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の絶対値は、板厚変化による温度こう配の変化と加熱を受ける内側部分の熱変形を拘束する力の変化によって、板厚減少が大きいほど小さくなる。ただ、非加熱域($\theta > \alpha_0$)の引張りの円周方向熱応力は、板厚減少が大きくなるほど大きくなる。

(3) x, y 軸に関して対称な非軸対称定常温度場に対して、板上下面が断熱された等厚板の熱応力は軸対称となるが、変厚板($m \neq 0$)の場合や板上下面から熱放散のある($m_0 \neq 0$)の場合の熱応力は非軸対称となる。

文 献

- (1) 石川・ほか3名, 材料, 34-379 (昭60), 442.
- (2) 例えば, Misra, J. C. and Achari, R. M., *Forsh. Ing. Wes.*, 45-3 (1979), 80.
- (3) Sugano, Y., *J. Appl. Mech.*, 51-4 (1984), 727.
- (4) 菅野・前川, 機論, 51-461, A (昭60), 63.
- (5) 例えば, 強度設計データブック編集委員会編, 強度設計データブック, (昭55), 1025, 裳華房.
- (6) Timoshenko, S. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, (1951), 116, McGraw-Hill.
- (7) 竹内, 熱応力, (昭56), 56, 日新出版.
- (8) 菅野・ほか2名, 機論, 45-390, A (昭54), 161.