半だ円状表面き裂を有する丸棒の曲げ における応力拡大係数の簡便評価式*

村上 敬宜^{*1}, 鶴 秀 登^{*1}

Stress Intensity Factor Equations for a Semi-Elliptical Surface Crack in a Shaft under Bending

Yukitaka MURAKAMI and Hideto TSURU

A simple procedure for the determination of stress intensity factor K for the problems whose solutions cannot be obtained easily by numerical analysis is proposed. The method is based on the concept that if we choose two referential two-dimensional problems and two geometrically similar three-dimensional problems, the ratio of K in the three-dimensional problem is approximately equal to that in the two-dimensional problem. The accuracy of the solutions depends on the choice of referential problems. The applicability of this method is checked by applying it to a semi-elliptical surface crack in a finite-thickness plate and an edge crack in a plate with finite width. Finally, the stress intensity factors for a semi-elliptical surface crack in a round bar under bending are obtained by the proposed method, in which a plate with an edge crack under tension and bending and a shaft containing a semi-elliptical surface crack are chosen as referential problems.

Key Words: Stress Intensity Factor, Semi-elliptical Surface Crack, Shaft, Bending, Simple Procedure, Approximate Method

1. 緒 言

電算機の発達とともに応力解析の手法も進歩し、最近では種々の三次元き裂問題の解も得られるようになってきている。しかしながら現在でもなお、実際には重要でありながら十分な解が与えられていない問題も少なくない。そのような問題の一つに、半だ円状表面き裂を有する丸棒が曲げを受ける問題がある。この問題は回転曲げ疲労試験におけるき裂の進展を検討するのに必要で、長い間実験にたずさわる研究者から解が望まれていた。最近、白鳥ら⁽¹⁾は影響関数法によってこの問題の解を与えているが、比較すべき解がないので精度は不明である。

本研究では、これまでのように大型電算機を用いた数値計算ではなく、すでに得られている類似の問題の解を利用して簡便に未知の問題の解を式の形で得る方法を提案し、それを題記の問題に応用した結果について述べる。

2. 解 析 手 法

応力拡大係数のハンドブック⁽²⁾などからもわかるように二次元き裂問題は数多く解析され、また三次元き裂問題よりは一般に解析が容易である。そして本法は、未知の三次元き裂問題の応力拡大係数の評価に二次元き裂問題の応力拡大係数を利用する方法である。この場合、三次元き裂問題に対応させる二次元き裂問題が評価する問題の結果の精度に直接影響を及ぼすのでその選択には注意を要する。

以下では、具体的例を示しながらその方法について述べる。まず、解析する問題は図1に示すような半だ円状表面き裂をもつ丸棒が遠方で曲げモーメント M' を受けている場合である。き裂形状としては、丸棒の直径 d がき裂寸法に対して十分大きい場合に相当する半無限体に存在する半だ円形表面き裂(深さ b , 幅 $2a$)を想定し、その半だ円形状が丸棒断面の円内に占める領域とする。なお、曲げモーメントによる応力は、だ円状き裂の深さ方向に一次的に分布するものとする。そして本論文では、半だ円状表面き裂のき裂最深点における応力拡大係数 K_{II} の簡便評価法を提案する。

この丸棒の曲げ問題と同じ形状で、遠方一様引張応

* 昭和62年8月21日 第65期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和62年2月4日。

*1 正員、九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

力 σ_0 が作用する場合のき裂最深点の応力拡大係数 $K_{I,3}^B$ はすでに得られており⁽³⁾、その結果をき裂形状比 $\beta(=b/a)$ とき裂深さ比 $\lambda(=b/d)$ を用いて多項式近似すれば次のようになる。

$$K_{I,3}^B = \sigma_0 \sqrt{\pi b} F_{I,3}^B, \lambda = \frac{b}{d}, \beta = \frac{b}{a},$$

$$F_{I,3}^B = (1.122 - 0.230\beta - 0.901\beta^2 + 0.949\beta^3 - 0.280\beta^4)(1.0 + 0.314\lambda - 2.536\lambda^2 + 36.72\lambda^3 - 106.048\lambda^4),$$

$$\lambda \leq 0.25, \beta \leq 1.0 \dots \dots \dots (1)$$

この解を利用した簡便評価を行うために、問題の丸棒に遠方曲げモーメントが作用する場合の応力拡大係数と遠方一様引張応力が作用する場合の応力拡大係数の比 $K_{I,3}^B/K_{I,3}^T$ を考える。この比は図2に示すような二次元き裂問題である縁き裂をもつ帯板の遠方曲げモーメント問題と遠方一様引張問題との応力拡大係数の比に等しいと考える。ただし、このとき両者で $b/d=c/W$ が成り立っているとする。その理由は、比をとることによって境界条件または形状の違いの影響が強く現れなくなることが予想されるからである。

以上の予想を式で表せば次のようになる。

図1 半だ円状表面き裂をもつ丸棒の引張りと曲げ

図2 縁き裂をもつ帯板の引張りと曲げ

$$\frac{K_{I,3}^B}{K_{I,3}^T} \cong \frac{K_{I,2}^B}{K_{I,2}^T} \dots \dots \dots (2)$$

ここで $K_{I,2}^T$ と $K_{I,2}^B$ は、それぞれ図2に示す有限板幅 W の帯板にき裂深さ c の縁き裂が存在し、遠方一様引張りと曲げモーメントが作用する場合の応力拡大係数である。また c/W は $\lambda(=b/d)$ に等しくなるようにとる。

ところで、式(2)の右辺におけるそれぞれの応力拡大係数は $c/W(=\lambda)$ を用いて次のような多項式で表されている。

引張応力 σ_0'' が作用する場合⁽⁴⁾⁽²⁾

$$K_{I,2}^T = \sigma_0'' \sqrt{\pi c} F_{I,2}^T, \lambda = \frac{c}{W}$$

$$F_{I,2}^T = 1.12 - 0.231\lambda + 10.55\lambda^2 - 21.72\lambda^3 + 30.39\lambda^4$$

$$\dots \dots \dots (3)$$

曲げモーメント M'' が作用する場合⁽⁵⁾⁽²⁾

$$K_{I,2}^B = \sigma_0'' \sqrt{\pi c} F_{I,2}^B, \lambda = \frac{c}{W}, \sigma_0'' = \frac{6M''}{tW^2}$$

$$F_{I,2}^B = 1.121 - 1.199\lambda + 4.775\lambda^2 - 1.628\lambda^3 - 7.035\lambda^4 + 13.27\lambda^5 \dots \dots \dots (4)$$

結局、半だ円状表面き裂を有する丸棒が遠方曲げモーメントを受ける場合のき裂最深点における応力拡大係数は次式で求められる。

$$K_{I,3}^B = \sigma_0 \sqrt{\pi b} F_{I,3}^B, \sigma_0 = \frac{32M'}{\pi d^3}$$

$$F_{I,3}^B = F_{I,3}^T \frac{F_{I,2}^B}{F_{I,2}^T} \dots \dots \dots (5)$$

ここで、丸棒の遠方一様引張応力 σ_0 を曲げモーメントが作用する場合の丸棒表面の最大応力 $32M'/\pi d^3$ に等しくとり、また帯板の問題においても同様に、遠方一様引張応力 σ_0'' は曲げモーメントが作用する場合の最大曲げ応力 $6M''/tW^2$ に等しくとるものとする。

図3 半だ円形表面き裂をもつ有限厚さの板の引張りと曲げ

3. 数値結果とその検討

まず2章で述べた簡便評価法の妥当性を示すために、式(2)において4個の量(K_I)がすべて既知の問題によって実際に精度を検討してみる。ただし、右辺の $K_{I,2}^R$ と $K_{I,3}^R$ としては式(3), (4)を用いるが、左辺の $K_{I,2}^L$ と $K_{I,3}^L$ としてはすでに解析されている図3に示す半円状表面き裂をもつ有限厚さの板の引張りと曲げの問題の解を用いる⁽⁶⁾⁽⁷⁾。表1に式(2)の右辺 $R_2 = F_{I,2}^R/F_{I,2}^L$ と左辺 $R_3 = F_{I,3}^R/F_{I,3}^L$ の結果を、き裂深さ比およびき裂形状比を種々に変化させて示した。この結果

が示すように、半円状表面き裂のき裂深さが浅いほど、またき裂形状比 b/a が小さいほど式(2)の近似は精度がよい。き裂深さ比 b/d が0.25以内および $b/a \leq 1.0$ ならば、式(2)の誤差は最大でも10%以下である。また、この結果から式(2)の左辺の値は $b/d \leq 0.25$ において、き裂形状にほとんど依存しないことがわかる。

以上の検討によって、以下に述べる表面き裂をもつ丸棒の曲げの結果の精度は誤差10%以内と推定される。

表2に半円状表面き裂をもつ丸棒の曲げの結果を式(5)による無次元表示 $F_{I,3}^R$ を用いて示した。この表

表1 縁き裂をもつ帯板の引張りと曲げにおける応力拡大係数の比 R_2 および半円状表面き裂をもつ有限厚さの板の引張りと曲げにおけるき裂最深点の応力拡大係数の比 R_3

$$R_2 = \frac{F_{I,2}^R}{F_{I,2}^L}, R_3 = \frac{F_{I,3}^R}{F_{I,3}^L}$$

b/a		0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
b/d	R_2	R_3	R_2/R_3	R_3	R_2/R_3	R_3	R_2/R_3	R_3	R_2/R_3	R_3	R_2/R_3
0.000	1.001	1.000	1.001	1.000	1.001	1.000	1.001	1.000	1.001	1.000	1.001
0.050	0.947	0.938	1.009	0.937	1.011	0.936	1.013	0.934	1.014	0.933	1.016
0.100	0.884	0.878	1.007	0.875	1.011	0.871	1.015	0.868	1.018	0.866	1.021
0.150	0.823	0.820	1.004	0.813	1.012	0.807	1.019	0.803	1.025	0.798	1.031
0.200	0.768	0.762	1.007	0.752	1.021	0.744	1.032	0.737	1.042	0.731	1.050
0.250	0.719	0.706	1.018	0.692	1.040	0.680	1.057	0.671	1.072	0.663	1.085
0.300	0.676	0.652	1.037	0.632	1.069	0.617	1.096	0.605	1.118	0.595	1.136
0.400	0.598	0.547	1.093	0.515	1.160	0.492	1.216	0.473	1.263	0.459	1.301
0.500	0.526	0.448	1.175	0.401	1.311	0.367	1.433	0.342	1.540	0.322	1.631
0.600	0.469	0.354	1.327	0.290	1.619	0.244	1.925	0.210	2.237	0.185	2.533

表2 半円状表面き裂をもつ丸棒が遠方で曲げモーメント M' を受ける場合のき裂最深点における応力拡大係数の無次元表示 $F_{I,3}^R$

$$F_{I,3}^R = \frac{K_{I,3}^R}{\sigma_0 \sqrt{\pi b}}, \sigma_0 = \frac{32M'}{\pi d^3}$$

b/a	0.000	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	1.000
b/d	0.000	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	1.000
0.000	1.123	1.092	1.048	0.996	0.940	0.884	0.829	0.778	0.733	0.694	0.661
0.010	1.116	1.085	1.041	0.990	0.934	0.878	0.824	0.774	0.729	0.690	0.656
0.020	1.108	1.077	1.034	0.982	0.927	0.871	0.818	0.768	0.723	0.684	0.651
0.030	1.098	1.068	1.025	0.974	0.919	0.864	0.811	0.761	0.717	0.678	0.646
0.040	1.088	1.058	1.015	0.965	0.911	0.856	0.803	0.754	0.710	0.672	0.640
0.050	1.077	1.047	1.005	0.955	0.902	0.848	0.795	0.747	0.703	0.666	0.634
0.060	1.066	1.037	0.995	0.946	0.893	0.839	0.787	0.739	0.696	0.659	0.627
0.070	1.055	1.026	0.985	0.936	0.884	0.830	0.779	0.732	0.689	0.652	0.621
0.080	1.045	1.016	0.975	0.927	0.875	0.822	0.771	0.724	0.682	0.645	0.614
0.090	1.034	1.005	0.965	0.917	0.866	0.814	0.763	0.717	0.675	0.639	0.608
0.100	1.024	0.996	0.956	0.908	0.857	0.806	0.756	0.710	0.669	0.633	0.602
0.110	1.014	0.986	0.947	0.900	0.849	0.798	0.749	0.703	0.662	0.627	0.597
0.120	1.005	0.977	0.938	0.891	0.841	0.791	0.742	0.697	0.656	0.621	0.591
0.130	0.996	0.968	0.929	0.883	0.834	0.784	0.735	0.690	0.650	0.615	0.586
0.140	0.987	0.960	0.921	0.876	0.827	0.777	0.729	0.684	0.645	0.610	0.581
0.150	0.979	0.952	0.913	0.868	0.819	0.770	0.723	0.678	0.639	0.605	0.576
0.160	0.970	0.943	0.906	0.861	0.812	0.764	0.716	0.673	0.634	0.600	0.571
0.170	0.962	0.935	0.898	0.853	0.805	0.757	0.710	0.667	0.628	0.594	0.566
0.180	0.953	0.927	0.890	0.846	0.798	0.750	0.704	0.661	0.622	0.589	0.561
0.190	0.944	0.918	0.881	0.838	0.791	0.743	0.697	0.655	0.617	0.584	0.556
0.200	0.935	0.909	0.872	0.829	0.783	0.736	0.690	0.648	0.610	0.578	0.550
0.210	0.925	0.899	0.863	0.820	0.774	0.728	0.683	0.641	0.604	0.571	0.544
0.220	0.915	0.888	0.852	0.810	0.765	0.719	0.674	0.633	0.596	0.564	0.537
0.230	0.901	0.876	0.841	0.799	0.754	0.709	0.665	0.625	0.588	0.557	0.530
0.240	0.887	0.862	0.828	0.787	0.743	0.698	0.655	0.615	0.579	0.548	0.522
0.250	0.871	0.847	0.813	0.773	0.729	0.686	0.643	0.604	0.569	0.538	0.513

表 3 半だ円状表面き裂をもつ丸棒の曲げ問題での影響関数法⁽¹⁾ (上段) と本法 (下段) との $F_{I,3}^B$ の比較

$$F_{I,3}^B = \frac{K_{I,3}^B}{\sigma_0 \sqrt{\pi b}}, \quad \sigma_0 = \frac{32M'}{\pi d^3}$$

$\frac{b/d}{b/a}$	0.05	0.1	0.2
0.2	0.944	0.895	0.845
	1.005	0.956	0.872
0.4	0.867	0.830	0.785
	0.902	0.857	0.783
0.6	0.771	0.744	0.699
	0.795	0.756	0.690
1.0	0.604	0.582	0.528
	0.634	0.602	0.550

示を用いれば、き裂深さが深くなるにつれて $F_{I,3}^B$ は小さくなるが、応力拡大係数 $K_{I,3}^B$ そのものは大きくなっていることに注意する必要がある。

表 3 は影響関数法⁽¹⁾ による解と本法による結果を比較したものである。本法と影響関数法の結果の差は最大でも約 7 % である。

4. 結 言

本論文では、応力拡大係数 K に対する既知の解を利用して、数値計算では解析困難な三次元き裂問題に対する応力拡大係数を推定する簡便な方法を提案した。その方法の基本は、二つの三次元き裂問題の応力拡大係数の比と二つの二次元き裂問題の応力拡大係数の比が等しくなるような問題を選ぶことによって、未

知の三次元問題の応力拡大係数を近似的に決定するのである。したがって、精度を上げるためには問題の選択に十分注意しなければならないが、選択が適切であればきわめて簡単に応力拡大係数の評価式が得られる。

まず、この方法の妥当性を検討するため、片側き裂を有する帯板の引張りと曲げの応力拡大係数 K の比が半だ円形表面き裂を有する有限板厚の板の引張りと曲げの応力拡大係数 K の比に等しいとみなして、半だ円形表面き裂の曲げにおける応力拡大係数 K を決定すれば、この問題における既知の解との比較によって、き裂の板厚に対する深さ比が 0.25 までは、10 % 以下の誤差であることがわかった。

次に、片側き裂を有する帯板の引張りと曲げの応力拡大係数の比が、半だ円状表面き裂を有する丸棒の引張りと曲げの応力拡大係数の比に等しいとみなして、丸棒の曲げにおける応力拡大係数を決定した。

文 献

- (1) 白鳥・ほか 3 名, 機論, 53-488, A (昭 62), 779.
- (2) Murakami, Y., ほか 10 名 ed., Soc. Mater. Sci. Japan, *Stress Intensity Factors Handbook*, (1987), Pergamon Press.
- (3) 西谷・陳, 機論, 50-453, A (昭 59), 1077.
- (4) Brown, W. F. and Srawley, J. E., *ASTM Spec. Tech. Publ.*, 410 (1966), 12.
- (5) 西谷・森, 九大工学集報, 58-5 (昭 60), 751.
- (6) Newman, J. C. Jr. and Raju, I. S., *NASA Tech. Memo.*, 83200 (1981), 1.
- (7) Newman, J. C. Jr. and Raju, I. S., *Eng. Frac. Mech.*, 15-1, 2 (1981), 185.