局所加熱を受ける弾性棒を伝播する分散性波動*

(第 1 報 理論解析)

田中 皓一^{*1}, 榎本 滋郁^{*2}Dispersive Waves along Elastic Rods
Subjected to Local Heating
(1st Report, Analytical investigation)

Koichi TANAKA and Shigeiku ENOMOTO

In the present article, Part 1 in this series of papers, a new one-dimensional wave equation is proposed which is convenient, practically, for studying longitudinal waves in rods having some inhomogeneities in physical properties and/or in geometry. The equation proposed is constructed by taking account not only of the lateral motions due to the Poisson's effect, but also of the distribution of longitudinal displacements across a section of the rod, which are calculated by the axisymmetrical Pochhammer's equation. An appropriate averaging of these effects brings one parameter into the equation, by which the two-dimensional problem is reduced to the one-dimensional one. Even though the present equation is very simple, the dispersive nature is well described over a relatively wide range of ratios of the diameter of the rod to the wavelength.

Key Words : Elasticity, Elastic Waves in Rods, Dispersive Waves, Dispersion Relation, Inhomogeneity

1. 諸 言

一般に連続体媒質中で、波動伝播経路に物性的あるいは幾何学的な非一様性が存在すると波は変形を受ける⁽¹⁾。本研究で対象とする弾性丸棒の場合にも種々のモードの波が伝播するが、縦波に対してポアソン効果に基づく半径方向変位を生じて分散性を持つことはよく知られている⁽²⁾⁽³⁾。各々のモードにおける散乱の様相は当然異なると考えられる。この分散性波動の弾性定数の非一様性による散乱特性は、興味深いとともに基本的に重要な研究課題であると思われる。

ところで、丸棒を伝播する波を表わす厳密な方程式は Pochhammer 方程式がある。しかし、丸棒が非一様性を持つ場合に、この方程式を直接適用して解析解を得るのは困難であるとともに数値解析では多くのコストを必要とするために、実用的にはできるだけ簡略な基

礎式が望ましい。Love は横慣性力の影響を考慮して一次元波動方程式を与え、初等理論の改善を試みたが⁽⁴⁾、(半径/波長)比がじゅうぶん小さいときを除き位相速度、群速度ともに、厳密解と大きく異なり、分散性を考慮するためにはじゅうぶんとはいえない。

そこで、本論文では実用性に観点を置いて、簡単であるとともにじゅうぶんな近似精度を持つ解を与える波動方程式を導く。また、棒に沿って連続的に変化する非一様性がある場合には、非一様部を離散化することによって解析計算を簡略化できる(多段モデル)。そして第 2 報では、ここでの波動方程式および多段モデル化による手法を実験と対比しその有効性を検証する。

2. 近似波動方程式

ここでは、本来 3 次元の波動現象を、Pochhammer 方程式から計算できる棒断面での軸方向変位分布形状とポアソン効果による半径方向変位を効果的に考慮して、一次元の波動方程式として再構成する。

* 昭和 62 年 10 月 3 日 東北支部仙台地方講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 4 月 2 日。

*¹ 正員、名古屋工業大学(〒466 名古屋市昭和区御器所町)。

*² 准員、日本電装(株)(〒448 刈谷市昭和町 1-1)。

図1 座標系

系の座標を図1のようにとる。軸対称の場合を考えるが、軸方向変位 u_x 、と半径方向変位 u_r は、時間 t と場所 (x, r) の関数である。ここで、 u_x は次に示す形に表わされるものと仮定する。

$$u_x = U_x(r)u(x, t) \quad (1)$$

このとき、軸方向の単位長さ当たりの運動エネルギー T_1 は次のように表わされる。

$$T_1 = \frac{1}{2} \pi a^2 \rho \xi_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (2)$$

ここで、 a 、 ρ はそれぞれ丸棒の半径、密度である。また、 ξ_1 は

$$\xi_1 = -\frac{2}{a^2} \int_0^a r U_x^2(r) dr \quad (3)$$

で定義される。断面に一様に軸方向変位が分布するとき $\xi_1 = 1$ である。ポアソン効果に基づく半径方向変位 u_r を、ポアソン比を ν として

$$u_r = -\nu \frac{\partial u}{\partial x} \int_0^r U_x(r) dr \quad (4)$$

によって仮定する。すると半径方向の単位長さ当たりの運動エネルギー T_2 は次のように導かれる。

$$T_2 = \frac{1}{2} \pi a^4 \rho \nu^2 \xi_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 \quad (5)$$

ここで、

$$\xi_2 = -\frac{2}{a^4} \int_0^a r \left[\int_0^r U_x(r) dr \right]^2 dr \quad (6)$$

である。断面に一様に軸方向変位が分布するとき $\xi_2 = 0.5$ となる。また、単位長さ当たりのひずみポテンシャルエネルギー V はヤング率を E とすると、

$$V = \frac{1}{2} \pi a^2 E \xi_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (7)$$

となる。従ってラグランジュ関数 L は以下の式で与えられる。

$$L = \int_0^l (T_1 + T_2 - V) dx \quad (8)$$

ここで、 l は丸棒の長さである。ハミルトンの変分原理より次式が成り立つ。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (9)$$

ここで、 δ は第1変分、 t_1 は初期時刻、 t_2 は終端時刻である。

$$\xi = 2 \xi_2 / \xi_1 \quad (10)$$

とおくと、(9)式より以下の波動方程式(11a)および境界条件(11b)が得られる。

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\nu^2 a^2 \xi}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right) = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (11a)$$

$$\frac{\rho \nu^2 a^2 \xi}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + E \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{または} \quad u = 0 \quad (11b)$$

この波動方程式はLoveが求めた波動方程式⁽⁴⁾

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\nu^2 a^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right) = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (12)$$

の左辺第2項に変位分布に依存する修正係数 ξ を掛けた形になっている。

修正係数 ξ を求めるためには軸方向変位分布 $U_x(r)$ を必要とする。ここでは、丸棒に沿って正弦波が無限に連続して伝播する時の変位分布を、Pochhammer方程式より求めて利用する⁽⁵⁾。

$$U_x(r) = i A k J_0(h' r) + \frac{i C}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r J_1(k' r)] \quad (13)$$

$$h'^2 = \rho \omega^2 / (\lambda + 2\mu) - k^2 \quad (14)$$

$$k'^2 = \rho \omega^2 / \mu - k^2 \quad (15)$$

$$A \left[2\mu \frac{\partial^2}{\partial a^2} J_0(h' a) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \omega^2 \rho J_0(k' a) \right] + 2C\mu k \frac{\partial}{\partial a} J_1(k' a) = 0 \quad (16)$$

$$2Ak \frac{\partial}{\partial a} J_0(h' a) + C \left(2k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \right) J_1(k' a) = 0 \quad (17)$$

上式中で、簡単のため $\left[\frac{\partial}{\partial r} \right]_{r=a}$ の代わりに $\frac{\partial}{\partial a}$ を用いた。ここで、 λ, μ はラメの定数、 ω, k はそれぞれ角周波数および波数である。 h', k' は(14),(15)式により定義される。 A, C は定数であり(16),(17)式の間を持つ。 J_0, J_1 はそれぞれ0次および1次の第1種ベッセル関数である。また、 i は虚数単位である。図2は(13)式を数値計算して求めた結果であるが、図示のように変位分布は、波長を Λ としたとき a/Λ とともに複雑に変化する。 $a/\Lambda \rightarrow 0$ のとき軸方向変位は一様に分布し、 a/Λ の増加とともに表面での変位はしだいに減少し、 $a/\Lambda = 0.4$ 以上では表面部で逆位相になって節点を生じる。 a/Λ が大きくなると軸方向変位は半無限領域に対するレイリ表面波の変位分布に漸近する。一方、図3は(3),(6),(10),(13)式より求めた修正係数 ξ を示す。明らかに(11a)式で導入した修正係数 ξ は a/Λ に依存することになるが、 a/Λ の増加とともに大きくなり $a/\Lambda = 0.42$ で極大値をとり、その後単調に減少することがわかる。 ξ が極大値をとるときに、厳密解での群速度が極小値をとることは興味深い(図6参照)。 $a/\Lambda \rightarrow 0$ 、すなわち、波長が無大のときは、Loveが波動方

図2 軸方向変位の径方向分布

図3 修正係数ξの波長依存性

図4 分散関係、厳密解との比較

程式を求めるにあたって仮定した条件「変位は軸方向に一様に分布する。」を満たしている。そのとき、 $\xi = 1$ となり(11a)式は(12)式と一致する。

図4は、以上の理論から求められる位相速度を厳密解と比較したものである。図中の実線は厳密解を示し(5)、○印は(11a)式を用いて求めたものである。厳密解との極めて良好な一致から見て、波の分散は変位分布と横慣性力を考慮すれば一次元理論でもじゅうぶんに表わされることがわかる。ただし、波長により修正係数ξは異なることに注意しなければならない。現実には伝播する波は様々な波長の波を重ね合わせたものであるから、それぞれの波長に対応するξを数多く用いるか、厳密にPochhammer方程式それ自身を用いなければならない。しかし、実用的にはある限られた範囲の波長の波を問題にすればじゅうぶんである場合も少なくないので、特定のξの値を用いることができる。本研究においては、比較的長い有限の波長の波に対して厳密解を近似するために $a/\Lambda = 0.4$ のときの $\xi (=1.9)$ を(11a)式において用いる。

近似波動方程式(11a)のもつ分散関係式を検討するために、次に示す進行波解

$$u = u_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (18)$$

を仮定し、(11a)式に代入する。位相速度を $C_p (= \omega/k)$ とすると

$$\frac{C_p}{C_0} = [1 + 2\pi^2 \nu^2 \xi \left(\frac{a}{\Lambda}\right)^2]^{-1/2} \quad (19)$$

図5 位相速度 ξ = 1.9

図6 群速度 ξ = 1.9

を得る。ここで、

$$C_0^2 = E/\rho \quad (20)$$

である。また、群速度を $C_g (= \partial \omega / \partial k)$ とすると、

$$\frac{C_g}{C_0} = [1 + 2\pi^2 \nu^2 \xi \left(\frac{a}{\Lambda}\right)^2]^{-1/2} - 2\pi^2 \nu^2 \xi \left(\frac{a}{\Lambda}\right)^2 [1 + 2\pi^2 \nu^2 \xi \left(\frac{a}{\Lambda}\right)^2]^{-3/2} \quad (21)$$

を得る。図5, 6はそれぞれ $\xi = 1.9$, $\nu = 0.29$ とした場合の位相速度, 群速度を示す。

図中の実線は(19)式および(21)式を解いた結果であり、破線はPochhammer方程式を解いた厳密解、一点鎖線はLoveの式を用いて求められたものである。修正係数 ξ を導入することにより位相速度, 群速度とも波長が比較的長い範囲 ($0 < a/\Lambda < 0.4$) では、厳密解をよく近似していてLoveの理論よりかなり改善されている。 $\xi > 0.4$ になると厳密解とだいぶ異なるが、通常では、比較的長い波長だけが対象となるからじゅうぶんに厳密解を近似しているとみてよい。

3. 多段モデルによる非一様棒を伝播する非定常波

3.1 多段モデル化

局所的に加熱や冷却を受けて、温度と弾性定数が非一様に軸に沿って連続的に変化する丸棒を伝播する分散性波動を直接解析するのは困難であるから、ここでは、解析を簡単にするために図7に示すような多段モデルを考える。非一様となった棒を n 個の区間からなる多段モデルとして考え、それぞれの区間では弾性定数が一様であるとする。

温度による丸棒の密度, 長さなどの変化を無視すると、 i 番目の領域での波動方程式は、

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\nu_i^2 a^2 \xi}{2} \frac{\partial^4 u_i}{\partial x^2 \partial t^2} \right) = E_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (22)$$

である。ただし、 E_i , ν_i はそれぞれヤング率, ポアソン比である。初期条件, 境界条件は次のように与えられる。

$$t=0 : u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0 \quad (23)$$

$$x=0 : E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = P(t) \quad (t>0) \quad (24)$$

$$x=l_i : u_i = u_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1) \quad (25)$$

$$E_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = E_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} \quad (1 \leq i \leq n-1) \quad (26)$$

$$x=\infty : |u_n| < \infty \quad (27)$$

図7 多段モデル

境界条件(25), (26)については本来(11b)を用いるべきであるが、特に高い周波数成分をあつかわないとし、かつ初等理論との対比のために簡略化した。

i 番目の領域でのひずみ $\varepsilon_i (= \partial u_i / \partial x)$ は、波動方程式(22)にラプラス変換を用いて、次のように与えられる。

$$\varepsilon_i = \varepsilon^{-1} [-A_i k_i e^{-k_i x} + D_i k_i e^{k_i x}] \quad (28)$$

ただし、

$$k_i = s(c_i^2 + \nu_i^2 a^2 s^2 \xi / 2)^{-1/2} \quad (29)$$

である。ここで、積分定数 A_i , D_i は境界条件(24)~(27)より求められる。丸棒が一様な場合には、(22)~(29)において、すべての領域でのヤング率, ポアソン比を等しく置けばよい。非一様な場合に(28)式をこれ以上計算するのは困難であるから、数値逆ラプラス変換して理論結果とする。その場合の計算結果は実験結果とあわせて第2報に示す。

3.2 入射波形の考察

(28)式から、ひずみ波を計算するためには、(24)式の入射圧力波形 $P(t)$ を具体的に与えなければならない。第2報で述べるように、短い円柱棒を衝突させる場合によく一致するモデルとして、図8のような1/2正弦波を入射波形として考える。1/2正弦波の幅を τ とすると、その形は

$$P(t) = A[H(t) - H(t - \tau)] \sin \frac{\pi t}{\tau} \quad (30)$$

で与えられる。ただし、 $H(t)$ は単位ステップ関数、 A は定数である。鋼製の円柱棒を衝突速度 v で発射して試料(SUS 304)の端面にあてた場合に生じる理論圧力波形の τ を、表1に示す。

表1 入射波の幅 τ

試料 (SUS 304)	円柱棒の長さ d (mm)	衝突速度 v (m/s)	τ (μ s)
$\phi 20 \times 3000$	20	12.7	15.0
	40	8.9	24.0
	60	8.9	32.5
$\phi 40 \times 4000$	40	8.9	21.0
	60	8.9	34.0

図8 入射応力波形

図9 一様棒を伝播するひずみ波(SUS 304, $\phi 20$) 図10 一様棒を伝播するひずみ波(SUS 304, $\phi 40$)

3. 3 非定常波の計算例

(一様な場合の実験結果との対比)

ここでは、本研究で新たに導入した波動方程式の有効性を調べるため、丸棒が一様な場合について実験結果と対比してみる。非一様な場合については第2報で詳しく述べる。

表1に示す緒元で鋼製の円柱棒($\phi 10\text{mm}$)を、試料の端面に当てひずみ波を生じさせる。衝撃端面より0.8m, 1.6mの2点で対称にはられた2対のひずみゲージにより軸方向ひずみの時間変化を測定する。

図9, 10は、ひずみ波の実験結果と理論結果である。図中の(a)は実験値を示し、(b)は理論値を示す。分散性に起因する波が、大きな波に引き続いて伝播していることがわかる。図9は試料(SUS 304, $\phi 20 \times 3000\text{mm}$)の端面に円柱棒($\phi 10 \times 40\text{mm}$)を衝突させた時のひずみ波であり、図10は試料(SUS 304, $\phi 40 \times 4000\text{mm}$)の端面に円柱棒($\phi 10 \times 60\text{mm}$)を衝突させた時のひずみ波である。厳密な理論から予想されるように丸棒の半径が大きくなるほど、また波長が短くなるほど波の分散性は大きくなるが、本研究での近似理論は実験結果と極めて良い一致を示している。したがって、近似波動方程

式(11a)は丸棒を伝播する分散性波動を解析するのに極めて有効であることがわかる。

4. 結 言

修正係数を含む新しく導入した波動方程式は、波長が比較的長い波について位相速度、群速度が厳密解とよく一致しているため、極めて簡潔な式であるにもかかわらず実験値をよく表現できる。第2報では、更に非一様棒の場合について、実験と対比して本方程式および多段モデルの有効性を検証する。

文 献

- (1) Al-Mousawi, M.M., J. Appl. Mech., 39(1986), 853
- (2) Folk, R., 他3名, J. Acoust. Soc. Am., 30(1958), 552
- (3) Fox, G. and Curtis, C.W., J. Acoust. Soc. Am., 30(1958), 559
- (4) Love, A.E.H., A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th edition., (1927), Dover
- (5) Kolsky, H., Stress waves in solids., (1963), Dover