弾性円筒シェルと内部・外部流体の連成固有振動解析*

遠 藤 龍 司*¹, 登 坂 宣 好*²

Free Vibration Analysis of Coupled External Fluid-Elastic Cylindrical Shell-Internal Fluid Systems

Ryuji ENDO and Nobuyoshi TOSAKA

The free vibrations of an infinitely long cylindrical shell under axisymmetrical hydrodynamic pressures due to external and internal fluids are studied theoretically. The basic equations of motion for axisymmetric vibrations of such a shell are given, based on the bending theory. These equations are solved analytically by means of Fourier cosine transformation, and the general frequency equation for the coupled systems is obtained according to a consideration of the dynamic interaction between the shell surface and fluids. Furthermore, seven special cases are derived from the general coupled frequency equation. The general frequency equation is calculated for some kinds of mass density of the internal fluid. Hence, it is shown that the effect of motion of external and internal fluids on the free vibrations of a shell is notable.

Key Words: Elastic Cylindrical Shell, External Fluid, Internal Fluid, Coupled System, Coupled Vibration

1. 序 論

シェルと流体が成す連成系の動的挙動の解明は、さまざまな工学分野において重要な問題となっている。その中でも特に固有振動数の決定は、構造物の耐震および防振設計をするうえで不可欠な要因であろう。

例えば海洋構造物のような連成系に対する固有値問題はシェルと海水との interface を通して、動的相互作用の考慮の基に定式化されており⁽¹⁾、有限要素法⁽²⁾や境界要素法⁽³⁾に代表される近似解析手法によって解析されている。

これに対して、Huang-Chen⁽⁴⁾は無限水域中に存在する完全球殻の軸対称振動に対する連成固有振動方程式を解析的に誘導し、流体の影響について検討している。本論もこの流れに属するものであり、無限海域中の海洋パイプラインをモデル化した⁽⁵⁾、内部と外部それぞれに流体が存在する無限円筒シェルの軸対称連成固有振動問題を取り上げる。定式化された境界値問題に対して、フーリエ変換手法を適用することにより、シェルの曲げ理論を基礎とする連成固有振動方程式を

解析的に誘導する。さらに得られた式を特殊化することにより 7 タイプの固有振動方程式が誘導できる。これらの数値計算例を示し、内部流体、外部流体がシェルの固有振動数に与える影響を検討する。

2. 連成問題の定式化

図 1 に内部、外部両流体により動水圧を受ける無限円筒シェルの座標系を示す。

2.1 シェルの支配方程式⁽⁶⁾ 円筒シェルの軸対称振動を仮定した運動は flügge 式を採用し、次式で与えられる。

$$u'' + \nu w' - \varepsilon w''' + \frac{a^2}{D} p_z = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

$$\nu u' + w + \varepsilon(w'''' - u''' + w) - \frac{a^2}{D} p_r = 0 \quad \cdots \cdots (2)$$

図 1 連成問題の座標系

* 昭和 62 年 10 月 2 日 北陸信越支部信越地方新潟講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 4 月 9 日。

*¹ 正員、信州大学工学部 (〒380 長野市若里 500)。

*² 日本大学生産工学部 (〒275 習志野市泉町 1-2-1)。

ここに, $D = Eh/(1-\nu^2)$, $\varepsilon = (h/a)^2/12$ であり, ν は Poisson 比, E は Young 係数を表し, $' = a(\partial/\partial z)$ である。

式(1), (2)の荷重項 p_z, p_r は動水圧だけを考慮することにより, 次式で与えられる。

$$p_z = -\rho_s h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$p_r = -\rho_s h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_{we} - p_{wi} \quad (4)$$

ここに ρ_s はシェルの質量密度, t は時間変数であり, p_{we}, p_{wi} はそれぞれシェルの外部流体, 内部流体による動水圧を表す。

2.2 流体の支配方程式 シェルの内部, 外部両流体の運動は速度 potential ϕ で記述され Laplace 方程式で与えられる。

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0 \quad (5)$$

また動水圧 p は線形 Bernoulli 式

$$p = -\rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (6)$$

により計算することができる。ここに ρ_f は流体の質量密度である。

2.3 境界条件 円筒シェルは無限の長さを仮定することにより, 無限端における変位境界条件, 変位の対称条件が与えられる。

$$w(r, z, t) \rightarrow 0 \quad \text{as } z \rightarrow \pm\infty \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z}(r, z, t) &= -\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}(r, z, t) \\ &= \frac{\partial^5 w}{\partial t^5}(r, z, t) = 0 \quad \text{at } z=0 \end{aligned} \quad (8)$$

また流体に対しては以下に示す外部流体の遠方条件とともに, 外部, 内部両流体の速度 potential ϕ_e, ϕ_i の対称性が与えられる。

$$\phi_e \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty \quad (9)$$

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial z} = \frac{\partial \phi_i}{\partial z} = 0 \quad \text{as } z=0 \quad (10)$$

さらに interface 境界において, 流体とシェルの運動の連続性から次の条件を満足する。

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial r} = \frac{\partial \phi_i}{\partial r} = -\frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{at } r=a \quad (11)$$

以上により, 海洋パイプラインをモデル化した連成問題が定式化された。

3. 解 析

連成系の運動は調和運動を仮定することにより, 流体の速度 potential, シェルの変位および動水圧は時間と位置の関数に分離した以下の形式をとるものとする。

$$\phi_e(r, z, t) = \Phi_e(r, z) \sin \omega t \quad (12)$$

$$\phi_i(r, z, t) = \Phi_i(r, z) \sin \omega t \quad (13)$$

$$u(z, t) = U(z) \cos \omega t \quad (14)$$

$$w(z, t) = W(z) \cos \omega t \quad (15)$$

$$p_{we}(r, z, t) = P_{we}(r, z) \cos \omega t \quad (16)$$

$$p_{wi}(r, z, t) = P_{wi}(r, z) \cos \omega t \quad (17)$$

ここに ω は連成固有振動数である。

式(14)~(17)を式(1), (2)に適用し, さらに U を消去する。ここで $\varepsilon^2 \equiv 0$ を考慮すると次式を得る。

$$\begin{aligned} W'''''' + (2\nu + \Omega^2) W'''' + \{1 + \xi(1 - \nu^2) - \xi\Omega^2\} W'' + \{\Omega^2(1 + \xi) - \Omega^4\xi\} W \\ = \frac{1 - \nu^2}{Eh} a^2 \xi \{(P_{we}'' - P_{wi}'') + \Omega^2(P_{we} - P_{wi})\} \end{aligned} \quad (18)$$

ここに, Ω^2 は無次元固有振動数パラメータである。

$$\Omega^2 = \frac{1 - \nu^2}{E} \rho_s a^2 \omega^2 \quad (19)$$

また

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon} = 12 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \quad (20)$$

である。

シェルは無限の長さを有し, 無限流体領域に存在することを考慮すると, Φ および W に関して以下で定義されるフーリエ・コサイン変換を用いることにより, 式(18)は解析的に解くことができる。

$$\bar{\Phi}(r, k) = \int_0^\infty \Phi(r, z) \cos(kz) dz \quad (21)$$

$$\bar{W}(r, k) = \int_0^\infty W(z) \cos(kz) dz \quad (22)$$

Laplace 方程式(5)に式(12)もしくは式(13)を適用し, 式(21)によりフーリエ変換を行うと次式となる。

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\Phi}}{dr} - k^2 \bar{\Phi} = 0 \quad (23)$$

式(23)は変形 0 次 Bessel の微分方程式であることから解析解が知られており, 遠方条件式(9)を考慮すると外部, 内部流体に対してそれぞれ次式で与えられる。

$$\bar{\Phi}_e(r, k) = AK_0(kr) \quad (24)$$

$$\bar{\Phi}_i(r, k) = BI_0(kr) \quad (25)$$

ここに K_0 と I_0 は変形 0 次 Bessel 関数であり, A と B は未知定数である。

同様にシェルの半径方向変位 W に関する式(18)をフーリエ変換して次式を得る。

$$\begin{aligned} \left[-k^6 + k^4(2\nu + \Omega^2) - k^2\{1 + \xi(1 - \nu^2) - \xi\Omega^2\} + \{\Omega^2(1 + \xi) - \Omega^4\xi\} \right] \bar{W} \\ = \frac{1 - \nu^2}{Eh} a^2 \xi (\Omega^2 - k^2) (\bar{P}_{we} - \bar{P}_{wi}) \end{aligned} \quad (26)$$

ここで interface 条件式(11)に式(12), (13)および式(15)を適用し, フーリエ変換すると式(24), (25)の未知定数が決定され, 線形 Bernoulli 式により式(26)に対応する動水圧 $\bar{P}_{we}$, $\bar{P}_{wi}$ の表現を以下のように得る。

$$\bar{P}_{we} = -\rho_{fe}\omega^2 \frac{K_0(ka)}{\frac{dK_0}{dr}(ka)} \bar{W} \quad (27)$$

$$\bar{P}_{wi} = -\rho_{fi}\omega^2 \frac{I_0(ka)}{\frac{dI_0}{dr}(ka)} \bar{W} \quad (28)$$

ここに ρ_{fe} と ρ_{fi} はそれぞれ外部流体, 内部流体の質量密度である。

4. 連成固有振動方程式

$\bar{P}_{we}$, $\bar{P}_{wi}$ のシェル半径方向変位成分のフーリエ変換量 $\bar{W}$ を伴う表現が得られたことにより, 連成固有振動方程式を解析的に誘導することができる。式(27), (28)を式(26)に代入し, $\bar{W} \neq 0$ の考慮のもとに Ω^2 について整理すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \Omega^4 \left\{ \xi - \frac{1}{\rho_s h} \xi \left(\rho_{fe} \frac{K_0(ka)}{\frac{dK_0}{dr}(ka)} - \rho_{fi} \frac{I_0(ka)}{\frac{dI_0}{dr}(ka)} \right) \right\} - \Omega^2 \left\{ k^4 + k^2 \xi + 1 + \xi \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho_s h} k^2 \xi \left(\rho_{fi} \frac{I_0(ka)}{\frac{dI_0}{dr}(ka)} - \rho_{fe} \frac{K_0(ka)}{\frac{dK_0}{dr}(ka)} \right) \right\} + k^6 - 2\nu k^4 + k^2 + k^2 \xi (1 - \nu^2) = 0 \quad (29) \end{aligned}$$

式(29)は Ω^2 について解くことにより, 各モード数 k に対する Ω_u^2 (upper branch) と Ω_l^2 (lower branch) を得ることができる。さらに, 式(29)は特殊化することにより以下の場合に対する固有振動方程式を導くことができる。

Case A: 外部流体と円筒シェルの連成系 (曲げ理論)⁽⁵⁾

Case B: 内部流体と円筒シェルの連成系 (曲げ理論)

式(29)において $\rho_{fe} = 0$ とすることにより次式を得る。

$$\begin{aligned} \Omega^4 \left\{ \xi + \frac{\rho_{fi}}{\rho_s h} \xi \frac{I_0(ka)}{\frac{dI_0}{dr}(ka)} \right\} - \Omega^2 \left\{ k^4 + k^2 \xi + 1 + \xi + k^2 \xi \frac{\rho_{fi}}{\rho_s h} \frac{I_0(ka)}{\frac{dI_0}{dr}(ka)} \right\} \\ + k^6 - 2\nu k^4 + k^2 + k^2 \xi (1 - \nu^2) = 0 \quad (30) \end{aligned}$$

Case C: シェルの内部, 外部ともに真空 (曲げ理論)⁽⁵⁾

Case D: 外部, 内部両流体とシェルの連成系 (膜理論)

式(29)に $(h/a)/12$ を乗じ, シェル厚の極限操作 $h \rightarrow 0$ を行うことにより次式を得る。

$$\Omega^4 - \Omega^2 k^2 = 0 \quad (31)$$

Case E: 外部流体とシェルの連成系 (膜理論)⁽⁵⁾

Case D に一致する。

Case F: 内部流体とシェルの連成系 (膜理論)

式(30)に Case D と同様な極限操作を行うと

$$\Omega^4 + \Omega^2 k^2 = 0 \quad (32)$$

となり, 零以外の実数値は存在しない。

Case G: シェルの内部, 外部ともに真空 (膜理論)⁽⁵⁾

5. 計算結果と検討

計算に当たって, シェルの材質は鉄とし, 内部流体には質量密度の異なるガソリン, 水, グリセリンを想定した。また外部流体として水を想定した。計算モデルの諸元を表1に示す。

シェルの曲げ理論にもとづき誘導した式による計算例を表2に, 膜理論を基礎とする計算例を表3に示す。MODEL 2 に対する振動数は各モードにおいて他

の計算モデルの振動数より低いことがわかる。これは外部流体, 内部流体とシェルの弾性変形に伴う動水圧による付加質量効果の影響が大きいためと考えられる。また表2の MODEL 4 と MODEL 5 に対する計算値の比較から, とくに低次モードにおいて内部流体による付加質量効果の影響が大きことがわかる。さらに図2に示したように円筒シェルの固有振動数は低次モードほどシェル厚の変化の影響を受けにくい。これに対して連成系の固有振動数はシェル厚に大きく影響され, 肉厚の増大に伴いシェルの固有振動数に急激に漸近する。また質量密度の大きい流体ほど付加質量効果も大きい。一方, 表3で示したように膜理論にもとづく Ω_u^2 の値はモード数 k の二乗となり, Ω_l^2 についてはすべてのモードにおいて零となることが特徴であ

表 1 計算モデルの諸元

Models	Internal fluids	External fluid	Shell material
MODEL1	Gasoline $\rho_{ri} = 0.66 \times 10^{-6}$ ($\text{kg} \cdot \text{sec}^2 / \text{cm}^4$)	Water $\rho_{re} = 1.02 \times 10^{-6}$ ($\text{kg} \cdot \text{sec}^2 / \text{cm}^4$)	Steel $\rho_s = 8.00 \times 10^{-8}$ ($\text{kg} \cdot \text{sec}^2 / \text{cm}^4$) $\nu = 0.3$
MODEL2	Water		
MODEL3	Glycerine $\rho_{ri} = 1.26 \times 10^{-6}$ ($\text{kg} \cdot \text{sec}^2 / \text{cm}^4$)		
MODEL4	Vacuum		
MODEL5	Water	Vacuum	
MODEL6	Vacuum

図 2 無次元固有振動数パラメータ $\Omega \ell^2$ と半径シェル厚比 h/a の関係

る。

6. 結 語

以上、海洋パイプラインのモデル化と考えられる連成問題の軸対称振動に対する固有振動方程式をフーリエ変換手法により解析的に誘導した。具体的な計算例を通して流体がシェルの固有振動数に与える影響を検討した結果は次のように要約できる。

連成系の固有振動数はシェルのそれに比べて、付加質量効果により 30 % 近く減少する場合も見うけられる。したがって海洋パイプラインをはじめとする連成系を成す構造物の動的設計に当たっては動的相互作用にもとづく十分な検討が必要であろう。

表 2 無次元固有振動数パラメータ Ω^2 の計算例 (曲げ理論, $h/a=0.03$)

Modes	MODEL2		MODEL4	
	Ω_u^2	Ω_ℓ^2	Ω_u^2	Ω_ℓ^2
1	1.120	0.519	1.179	0.606
2	4.085	0.695	4.098	0.781
3	9.083	0.763	9.091	0.829
4	16.084	0.809	16.090	0.863
5	25.085	0.856	25.090	0.902
6	36.086	0.917	36.090	0.958
7	49.087	1.005	49.091	1.044
8	64.088	1.133	64.091	1.171
9	81.090	1.314	81.092	1.355
10	100.091	1.566	100.093	1.609

Modes	MODEL5		MODEL6	
	Ω_u^2	Ω_ℓ^2	Ω_u^2	Ω_ℓ^2
1	1.174	0.600	1.300	0.700
2	4.098	0.778	4.116	0.885
3	9.091	0.828	9.101	0.906
4	16.090	0.862	16.096	0.923
5	25.089	0.901	25.095	0.952
6	36.090	0.958	36.094	1.003
7	49.091	1.044	49.094	1.086
8	64.091	1.171	64.095	1.213
9	81.092	1.354	81.095	1.397
10	100.093	1.608	100.096	1.654

表 3 無次元固有振動数パラメータ Ω^2 の計算例 (膜理論)

Modes	MODEL2		MODEL6	
	Ω_u^2	Ω_ℓ^2	Ω_u^2	Ω_ℓ^2
1	1.000	0.000	1.300	0.700
2	4.000	0.000	4.116	0.884
3	9.000	0.000	9.100	0.900
4	16.000	0.000	16.095	0.905
5	25.000	0.000	25.093	0.907
6	36.000	0.000	36.092	0.908
7	49.000	0.000	49.092	0.908
8	64.000	0.000	64.091	0.909
9	81.000	0.000	81.091	0.909
10	100.000	0.000	100.096	0.909

文 献

- (1) 登坂, 建築論報, 314, (昭57), 176.
- (2) Tosaka, N. and Kakuda, K., *Finite Element Flow Analysis*, (1982), 803, Univ. of Tokyo Press.
- (3) Tosaka, N. and Kakuda, K., *Ocean Space Utilization* '85, 1, (1985), 345, Springer-verlag.
- (4) Huang, T. C. and Chen, F. C., *Developments in Mechanics*, 8, Proc. of the 14th Midwestern Mechanics Conference, (1974), 3.
- (5) Endo, R. and Tosaka, N., *Theoret. Appl. Mech.*, 31, (1981), 303.
- (6) Flügge, W., *Stresses in Shells*, 2nd ed., (1973), 215, Springer-Verlag.