有限要素法と体積力法の組合せによる種々の組合せ応力下
におけるだ円孔縁の塑性域の解析*村上敬宜*¹, 黄震堯*², 内山幸彦*³Elastic Plastic Analysis of An Elliptical Hole in An Infinite Plate
under Various Combined Remote Stress by the Combination of Finite
Element Method and Body Force Method

Yukitaka MURAKAMI, Zhen-Yao HUANG, and Yukihiro UCHIYAMA

A method of elastic-plastic stress analysis based on the combination (FEM+BFM) of finite element method (FEM) and body force method (BFM) is developed. FEM+BFM has the advantages of both method (FEM and BFM) and has many possible applications. The line elements of BFM are located along the interface between the outer elastic domain and the inner elastic-plastic domains which are composed with FEM elements. In the present study, the method is applied to solve the problems of an elliptical hole contained in an infinite plate under various combined remote stress ($\sigma_{x\infty}, \sigma_{y\infty}, \tau_{xy\infty}$). The stress and strain concentration, the extension of plastic zone and the applicability of Neuber's rule under various combined remote stress ($\sigma_{x\infty}, \sigma_{y\infty}, \tau_{xy\infty}$) are investigated in details.

Key Words: Elasticity, Plasticity, Finite Element Method, Body Force Method, Elliptical Hole, Infinite Plate, Stress and Strain Concentration, Plastic Region, Neuber's Rule, Combined Stress

1. 緒 言

本論文は遠方で一様応力 ($\sigma_{x\infty}, \sigma_{y\infty}, \tau_{xy\infty}$) を受ける無限板中にだ円孔 ($x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$) が存在するとき、だ円孔の縁に生ずる降伏域の形状と拡大の挙動を解析し、総合的に考察したものである。この問題の解は閉じ形では得られていない。有限要素法 (FEM) でこの問題を解析すると無限板ではなく有限板中のだ円の問題を扱うことになるので、有限境界の影響の混入を避けることができない。無限板中のだ円孔の問題を明らかにする意味は有限境界の影響の混入のない基本的な条件下における応力とだ円孔の形状の効果を抽象できるところにある。この種の解析結果はだ円孔から破壊が開始する際の破壊点と方向などの問題を明らかにする基礎となるであろう。

この種の問題の解析には、純粋に解析的な手法も FEM も適していない。体積力法 (BFM)⁽¹⁾ や連続分布転位論⁽²⁾ によれば、原理的には弾性域と塑性域を含む問題を解析できるが、理論と方法が複雑になる。

本研究では、両者の長所を生かし、欠点を補う方法として FEM と体積力法 (BFM) を組合せる方法 (FEM+BFM) を用いる。この方法では降伏域 (塑性域) とそれを囲む狭い弾性域を FEM で取扱い、この領域の境界に BFM の直線要素を配置することによって外側の無限板と連結する。この方法によれば、小さい方程式系で注目した塑性域を精度よく解析できる。また、この方法は弾性域に比べて塑性域の小さい有限板の問題を高精度解析することにも応用可能である。

具体的な計算では遠方の応力 ($\sigma_{x\infty}, \sigma_{y\infty}, \tau_{xy\infty}$) の組合せとだ円孔の形状比と傾斜角を変化させ、降伏の開始点と塑性域の拡大挙動を調べる。

2. BFM と FEM の組合せ方

2.1 基本的考え方 図 1(a) のように遠方で ($\sigma_{x\infty}, \sigma_{y\infty}, \tau_{xy\infty}$) なる一様応力を受ける無限板中に応力自由の孔が存在し、その縁に塑性域が生じている問題を例にとりて BFM と FEM の組合せ (以下 BFM+FEM と書く) による解法を説明する。

BFM+FEM による解法では図 1(a) を図 1(b) のように孔のない無限板の問題として取扱う。すなわち、図 1(b) に示すような応力自由となるべき想像上の孔境界と塑性域を含む FEM 領域を取り囲む破線に

* 昭和 62 年 8 月 21 日 第 65 期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 2 月 2 日。

*¹ 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

*² 華東化工学院 (中国)。

*³ 川崎製鉄 (株) (〒712 倉敷市水島川崎通 1)。

沿って集中力 (Green 関数) を分布し、塑性域+弾性域となる FEM 領域と破線で区切られた外部領域とは Eshelby⁽³⁾ の介在物理論の取扱いに従うものとする⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

この問題を式で記述すると本質的には混合境界値問題を表す積分方程式となるが、FEM を採用していること、また仮想の孔と FEM 領域を囲む破線部を直線要素とする解法を採用することによって問題は多元連立一次方程式に置き換えられることになる。

なお、本論文で取扱うだ円孔の問題では Green 関数として応力自由のだ円孔を含む無限板に対するものを採用することによって精度と計算時間の点において利点を期待できる。

本論文で用いる FEM は一般に用いられている定ひずみ三角形要素であり、弾塑性解析は微小変形ひずみ増分理論によっている。

2.2 BFM のための Green 関数 本研究で用いる Green 関数は図 2 に示すような応力自由だ円孔を有する無限板に対するものである。この場合の応力関数は次のようになる⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) = & M \log(\zeta - \zeta_0) - \bar{N} \log\left(\zeta - \frac{R^2}{\bar{\zeta}_0}\right) + \bar{N} \log \zeta \\ & + \bar{M} \frac{\left\{\left(\frac{R^2}{\bar{\zeta}_0} + \frac{\bar{\zeta}_0}{R^2}\right) - \left(\zeta_0 + \frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right)\right\} \frac{R^2}{\bar{\zeta}_0^2}}{\left(1 - \frac{1}{\bar{\zeta}_0^2}\right)\left(\zeta - \frac{R^2}{\bar{\zeta}_0}\right)} \quad \dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(\zeta) = & N \log(\zeta - \zeta_0) - \bar{M} \log\left(\zeta - \frac{R^2}{\bar{\zeta}_0}\right) + \bar{M} \log \zeta \\ & - M \frac{\left(\frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta_0} + \frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right) - \left(\frac{R^2}{\zeta_0} + \frac{\zeta_0}{R^2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\bar{\zeta}_0^2}\right)(\zeta - \zeta_0)} \quad \dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\Psi^I(\zeta) = X(\zeta) - \bar{Z}(R^2/\zeta)\Phi^I(\zeta) \quad \dots\dots (3)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \xi + i\eta, \quad z = x + iy \\ \zeta_0 &= \xi_0 + i\eta_0, \quad z_0 = x_0 + iy_0 \\ z &= Z(\zeta) = \frac{c}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \\ a &= \frac{c}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right), \quad b = \frac{c}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right) \\ c &= \sqrt{a^2 - b^2}, \quad R = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (4)$$

図 1 だ円孔を有する無限板の引張りと BFM+FEM 模型

以上の式を用いると、合力、変位、応力の各成分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} [-P_y - iP_x]_{z_0}^z = & [\bar{\Phi}(\bar{\zeta}) + \{Z(\bar{\zeta})\Phi^I(\zeta) \\ & + \Psi^I(\zeta)\}]_{z_0}^z \quad \dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u - iv = & \frac{1}{2G} \left[\frac{3-\nu}{1+\nu} \bar{\Phi}(\bar{\zeta}) - \{Z(\bar{\zeta})\Phi^I(\zeta) \right. \\ & \left. + \Psi^I(\zeta)\} \right]_{z_0}^z \quad \dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = & 2\text{Re}[\Phi^I(\zeta)] - R_e[Z(\bar{\zeta})\Phi^{II}(\zeta) + \Psi^{II}(\zeta)] \\ \sigma_y = & 2\text{Re}[\Phi^I(\zeta)] + R_e[Z(\bar{\zeta})\Phi^{II}(\zeta) + \Psi^{II}(\zeta)] \\ \tau_{xy} = & I_m[Z(\bar{\zeta})\Phi^{II}(\zeta) + \Psi^{II}(\zeta)] \quad \dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここで、 I は、 z に関する微分

なお、式(6)で表される変位については、適当に定めた基準点との相対変位をとってはじめて物理的に明確な意味をもつ。したがって基準点を設定しなければならないが、それはどこに選んでもよく、実際問題では考えやすい点を選べばよい、また同じ理由により、 x, y 方向について別々の基準点を選んでもよい。

2.3 FEM のための応力-ひずみマトリックス

本論文では平面応力問題のみを取扱う。そして、一定ひずみ三角形要素の応力-ひずみマトリックスとしては通常用いられるものを用いた。弾性応力-ひずみマトリックスを $[D]_e$ 、弾塑性応力-ひずみマトリックスを $[D]_p$ とすれば、それらは次のように与えられる。

$$[D]_e = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu} & \text{対称} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots (8)$$

$$[D]_p = [D]_e - \begin{bmatrix} \frac{s_1^2}{s} & \text{対称} \\ \frac{s_1 s_2}{s} & \frac{s_2^2}{s} \\ \frac{s_1 s_3}{s} & \frac{s_2 s_3}{s} & \frac{s_3^2}{s} \end{bmatrix} \quad \dots\dots (9)$$

ここで、

図 2 応力自由のだ円孔を有する無限板

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\sigma_x + \nu\sigma_y) \\ s_2 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\sigma_y + \nu\sigma_x), s_3 = \frac{E}{1-\nu^2}\tau_{xy} \\ s &= \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H' + s_1\sigma'_x + s_2\sigma'_y + 2s_3\tau_{xy} \\ H' &= \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、

E : ヤング率, ν : ポアソン比

σ'_x, σ'_y : 偏差応力, H' : 加工硬化率

$\bar{\sigma}$: 相当応力, $\bar{\varepsilon}_p$: 相当塑性ひずみ

2.4 BFM+FEMの組合せ法 BFM+FEMの

組合せ法を図1を例にとって説明する。本研究ではGreen関数として図2を利用しているの、孔縁の境界条件は完全に満たされる。問題となるのは、FEM領域とそれを取り囲む境界の取扱いである。この境界に関してEshelbyの介在物理論を適用するのであるが、境界条件としては合力と変位に着目した。本来、介在物理論では合力ではなく、応力の連続性に着目するのが普通であるが、本研究では合力がFEMの節点力と容易に結び付けられるという点を考慮して応力ではなく合力に着目した。

具体的手順は次のようになる。

(1) 図3(a)に示すFEM領域I, IIの系全体の剛性マトリックスを求め $[K_I], [K_{II}]$ とする。

(2) 図1(a)で示される無限板と同じ弾性係数をもつ無限板上に図1(b)の破線で示される境界を仮想する。境界A, BはFEM領域と連結されるべき境界であるので、FEM三角形要素の一辺にBFM直線要素一つを対応させ、節点と対応する点を区間点とする。次に、これらの境界の法線、接線方向に、単位密度の体積力(分布集中心)を区間ごとに分布し、法線、接線方向それぞれの体積力によって境界A, B, C, Dの各区間に生ずる合力と境界A, Bの区間点に生ずる変位を計算する。

体積力密度の法線、接線方向成分は次式で定義され

る。

$$\rho_n = \frac{dF_n}{ds}, \rho_t = \frac{dF_t}{ds} \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 dF_n, dF_t は境界の長さ ds 部分に分布した体積力による合力の法線、接線方向成分である。接線方向は反時計回りを正とする。なお、未知数と境界条件数を合わせるために実際に分布する体積力の密度を境界C, Dでは階段状近似〔図4(a)〕, 境界A, Bでは折れ線近似〔図4(b)〕とする。すなわち、境界C, Dの単位体積力密度は区間内で $\rho_n=1, \rho_t=1$ とする。また境界A, B上での体積力密度は区間点上で1、隣り合う区間点では零となる三角形形状に分布するものを単位体積力密度とする。ただし境界の端点では特別に1区間で1から零まで変化する。

また区間に生ずる合力は各線要素の境界の外側を通り、各区間の始点から終点に至る径路に沿って境界の内側が外側に及ぼす合力を計算する。さらに境界A, Bではこのようにして得られた合力をそれぞれ隣り合う区間で平均し、各区間点に対する節点力に相当する合力成分とする〔図3(b)〕。単位体積力密度の体積力により生じるこれらの各量を以後影響係数として扱うが、境界A, Bの区間点の節点力に相当する成分を F 、区間点の変位を u 、境界C, Dに生じる区間力を P で表すことにする。また上添字では分布する体積力の境界の位置(境界A, Bでは ρ 一定となる1区間、境界C, Dでは三角形形状に分布する1区間)を表し、下添字では対応する境界と区間番号を示すことにする。

なお、これらの係数は、数値積分により計算するが、積分は区間を等分割し、各々の1区間にガウスの積分公式を使用する。

(3) 図1(a)で示される無限板と同じ弾性係数をもつ孔のない無限板に遠方の一様負荷($\sigma_{x\infty}, \sigma_{y\infty}, \tau_{xy\infty}$)を加える。このとき、(2)の議論と同じように直線近

図3 BFM+FEMの組合せ法

図4 体積力密度の分布

似した境界を仮想し、この負荷による区間の合力、節点力に相当する合力成分区間変位を計算し、それぞれ $P^{\infty}(P_x^{\infty}, P_y^{\infty})$, $F^{\infty}(F_x^{\infty}, F_y^{\infty})$, $u^{\infty}(u_x^{\infty}, u_y^{\infty})$ とする。

以上により、未知量となるべき FEM 領域 I, II の節点変位ベクトル $\{d_i\}, \{d_{ii}\}$, 境界 A, B, C, D に実際に分布すべき体積力密度のベクトル $\{\rho_A\}, \{\rho_B\}, \{\rho_C\}, \{\rho_D\}$ を決定するための境界条件は次のようになる。

沿う FEM 節点の変位と BFM の取扱いを受ける境界〔図 3 (b), (c)〕の区間点の変位は等しい。

ここで、FEM 領域の節点数を n_I, n_{II} , 境界 A, B の区間点数を m_A, m_B , 境界 C, D の線要素数を m_C, m_D とすると、以上の関係は図 3

$$2 \times (n_I + n_{II} + m_A + m_B + m_C + m_D) \dots\dots\dots (12)$$

で表される元数の連立一次方程式で表すことができる。それは次のようになる。

$$\begin{array}{c} \text{境界条件と考える境界} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} [K_I] & 0 & [F_A^i] & [F_B^i] & [F_C^i] & [F_D^i] \\ \hline 0 & [K_{II}] & [F_A^i] & [F_B^i] & [F_C^i] & [F_D^i] \\ \hline 0 & 0 & [P_C^i] & [P_D^i] & [P_C^i] & [P_D^i] \\ \hline 0 & 0 & [P_C^i] & [P_D^i] & [P_C^i] & [P_D^i] \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & -[u_A^i] & -[u_B^i] \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & -[u_C^i] & -[u_D^i] \end{array} \right] \begin{array}{c} dd_I \\ dd_{II} \\ d\rho_A \\ d\rho_B \\ d\rho_C \\ d\rho_D \end{array} = \begin{array}{c} -dF_A^{\infty} \\ 0 \\ -dF_B^{\infty} \\ 0 \\ -dP_C^{\infty} \\ -dP_D^{\infty} \\ du_A^{\infty} \\ du_B^{\infty} \end{array} \dots\dots\dots (13)$$

上添字：体積力を分布する境界

下添字：体積力による影響を考える境界

i ：境界 A または B で三角形形状に分布する体積力の

頂点に相当する区間点

j ：境界 C または D で体積力を分布する区間

k ：境界 A または B で節点力に相当する成分を求める区間点

l ：境界 C または D で区間に生ずる合力を求める区間

ここで、 $[F], [P], [u]$ は先に述べた合力や変位に関する影響係数を、体積力を分布する境界、それによる

図 5 傾斜だ円孔を有する無限板の引張り (a) と等価な問題 (b)

図 6 $\rho=1, \alpha=45^\circ, \sigma_y=\sigma_y^{\infty}$ のときの孔縁における塑性域 (a/b 変化)

合力や変位を考える境界ごとにまとめて係数の行列としたものである。マトリックス中の零は零マトリックスを表す。また上式は弾塑性問題に対する増分形で表している。これらを解くことにより未知数が求まり、FEM 領域内の状態を計算できる。もちろん必要な FEM 領域外の応力や変位も計算できる。

図 3 (b), (c) で示す計算は FEM 領域の弾性、塑性にかかわらず弾性計算である。このことはマトリックス中の影響係数および、遠方の一様負荷による影響は一度計算しておけばよいことを示しており、増分計算における計算時間を短縮することができる。

なお、円孔またはだ円孔に関する Green 関数を使用した場合、孔縁自由の条件はすでに満たされており、孔縁の合力に関する行と、孔縁に分布すべき体積力密度の係数の列 (境界 C, D に関係した項) は不要となる。また、それと関連して $\tilde{P}^\infty, \tilde{F}^\infty, \tilde{u}^\infty$ の計算は、応力

自由だ円孔が存在する場合の応力関数から計算する。

3. 解析結果および考察

3.1 だ円孔の形状変化の影響 だ円孔の先端の曲率半径 ρ を一定とし、だ円孔の傾斜角 α とだ円孔の形状を変化させて (図 5), 塑性域の発生場所の移り変わりおよび塑性域の形状の違いを検討する。材料定数は $E=20\,000\text{ kg}\cdot\text{f}/\text{mm}^2, \nu=0.3$, 降伏応力 $\sigma_s=100\text{ kg}\cdot\text{f}/\text{mm}^2$, 加工硬化率 $H'=2\,000\text{ kg}\cdot\text{f}/\text{mm}^2$ とした。

図 6 は $\sigma_{x'}=0, \sigma_{y'}=\sigma_{y'\infty}, \tau_{x'y'}=0$, 傾斜角 $\alpha=45^\circ$ のとき、だ円孔の長軸端近傍の塑性域の進展状況を示したものである。図 6 からわかるようにだ円孔の形状比 a/b の増加に従って、孔縁の塑性域の発生起点が少しずつだ円孔の先端に移動する。塑性域は最初に降伏した点を中心に平等に両側に広がるのではなく、むしろ一方に片寄って主軸端から遠くなる方向へ拡大する傾向

図 7 $\rho=1, a/b=8, \sigma_{y'}=\sigma_{y'\infty}$ [図 5 (a)] のときの孔縁における塑性域拡大状況

図 8 $\rho=1, \alpha=0, a/b=4$ のときの孔縁における塑性域 ($K_t = \sigma_{y\max}/\sigma_{y\infty} = (1+2a/b) - \sigma_{x\infty}/\sigma_{y\infty}$)

図 9 だ円孔縁 ($\rho=1$) における塑性域 (遠方の応力の変化)

図 10 遠方の応力比 $\sigma_{x\infty}/\sigma_{y\infty}=0.5$ のときの孔縁における塑性域 ($\rho=1$, だ円形状比 a/b の変化) 図 11 $\rho=1, \tau_{xy}=\tau_{xy\infty}$ のときの孔縁における塑性域 (a/b 変化)

がある。

3.2 だ円孔の傾斜角 α の影響 だ円孔の先端の曲率半径 ($\rho=b^2/a$) を一定とし、だ円孔の形状比が $a/b=2, 4, 8, 16$ の各場合に、だ円孔の傾斜角 α の変化が塑性域の拡大状況に及ぼす影響を検討する。

図 7 はその一例でだ円孔の形状比 $a/b=8$ で傾斜角 $\alpha=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の各場合を示す。応力状態は遠方で一軸負荷 $\sigma_{y\infty}$ を受ける場合である。図 7 からわかるように、だ円孔の傾斜角 α の増加に伴って、孔縁の応力集中が小さくなり、塑性域の発生場所がだ円孔の長軸端から遠ざかる方向に移動する。塑性域は最初に降伏した点を中心にして、両側に等しく広がるのではなく、主軸端から遠くなる方向へ片寄って拡大する傾向があるのは図 6 と同じである。

3.3 遠方応力 ($\sigma_{x\infty}, \sigma_{y\infty}, \tau_{xy\infty}$) の影響

3.3.1 遠方応力 ($\sigma_{x\infty}, \sigma_{y\infty}$) の影響 ($\alpha=0$, 図 5 (b)) だ円孔の傾斜角 $\alpha=0$ および先端の曲率半径 ρ を一定とし、形状比 $a/b=2, 4, 8, 16$ の各場合に遠方応力 ($\sigma_{x\infty}, \sigma_{y\infty}$) の組合せの影響を検討する。

図 8 はその一例で形状比 $a/b=4$ で、遠方の二軸応力比 $\sigma_{x\infty}/\sigma_{y\infty}=1, 0.5, 0, -1$ の各場合を示す。主軸端の応力集中係数 K_t は、だ円の形状比と遠方応力の比 ($\sigma_{x\infty}/\sigma_{y\infty}$) によって変化するので、降伏が最初に起こる応力と塑性域の大きさは、これらの両者の値に左右される。

図 9 (a), (b) は形状比 $a/b=2, 16$ において、遠方の二軸応力 ($\sigma_{x\infty}, \sigma_{y\infty}$) の変化が塑性域の拡大状況に及ぼす影響を示すものである。図 8, 9 からわかるように a/b が大きいほど、また $\sigma_{x\infty}/\sigma_{y\infty}$ が小さいほど、 K_t が

図 12 だ円孔の近傍の弾性応力分布

大きくなり、降伏が起こりはじめる $\sigma_{y\infty}/\sigma_s$ は小さくなる。しかし、拡大途中の塑性域の形状は $\sigma_{x\infty}/\sigma_{y\infty}$ と a/b にあまり影響を受けない。

図 10 は遠方の二軸応力比を一定 ($\sigma_{x\infty}/\sigma_{y\infty}=0.5$) とし、だ円孔の形状比 $a/b=2, 4, 8, 16$ が塑性域の拡大状況に及ぼす影響を示したものである。だ円形状比の増加に伴って、先端で同程度の塑性域が生じるための遠方の応力は減少する。

3.3.2 遠方でせん断応力を受ける場合 ($\alpha=0$, 図 5 (b)) 図 11 は遠方でせん断応力 $\tau_{xy\infty}$ を受けるとき、長軸が x 軸と一致するだ円孔の塑性域の拡大状況を示すものである。

だ円孔の形状比を変化させても、最初は主軸端とは異なり、だ円孔縁が降伏する。その後、降伏が起こるのはだ円孔の長軸端ではなく、内部に入ったところである。この距離はだ円孔縁から約 $(0.6 \sim 0.8) \rho$ (ρ : だ円孔の先端の曲率半径) であり、だ円孔の形状比 a/b とはあまり関係がない。この現象はだ円孔の先端近傍の

弾性応力分布 (図 12) によって説明することができる。
 応力の増大とともに塑性域はだ円孔縁に沿っても少し
 拡大するが、主としてだ円孔の長軸上に沿って広が
 る。

3.3.3 二軸応力下における Neuber 則の検討

弾性応力集中係数を K_t 、弾塑性応力集中係数を K_σ 、ひ
 ずみ集中係数を K_ϵ とすると、Neuber 則は次式で表
 される。

$$K_t = \sqrt{K_\sigma \cdot K_\epsilon} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} K_\sigma &= \sigma_{y\max}/\sigma_{y\infty} \\ K_\epsilon &= \epsilon_{y\max}/\epsilon_{y\infty} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

Neuber 則はこれまで主として一軸応力場の場合に
 ついて検討されてきたが、二軸応力の影響については
 研究がないようである。

本研究では $\sigma_{x\infty}$ と $\sigma_{y\infty}$ の比を変化させ数値解析に
 よる結果に基づいて、二軸応力下における Neuber 則
 の成否を検討した。

図 13 には遠方で二軸応力を受けるだ円孔を有する
 無限板の応力集中の解析結果を示す。この場合、 $K_t =$

図 13 二軸応力下における Neuber's 則の検討

図 14 孔端近傍の弾性応力分布に及ぼす形状比 a/b と応力比の影響

図 15 塑性域長さに及ぼす形状比 a/b の影響

$(1+2a/b) - \sigma_{x\infty}/\sigma_{y\infty}$ と定義した。だ円孔縁の最大応力 $\sigma_{y\max}$ と最大ひずみ $\epsilon_{y\max}$ は孔縁に最も近い二つの計算点を用いて外そうして求めた。図 14 に示す結果はいずれも $\sigma_{y\infty}$ の増加に伴って $\sqrt{K_t \cdot K_c}$ は K_t より若干小さくなり、ある一定値に落ち着く。これらの結果から、Neuber 則は応力比とだ円孔の形状比に影響されず、誤差が約 10% 以内で成立するとみてよいであろう。

3.3.4 長軸上の弾性応力分布に及ぼすだ円孔の形状比 a/b と遠方の応力比 $\sigma_{x\infty}/\sigma_{y\infty}$ の影響 図 14 は遠方で一様応力 $(\sigma_{x\infty}, \sigma_{y\infty})$ を受ける無限板中にだ円孔が存在するとき、だ円孔の長軸上 ($x \geq a$) における弾性状態の $\sigma_y/\sigma_{y\max}$ の分布を示すものである。

だ円孔長軸端の無次元化応力分布のこう配 x は、だ円の形状比、遠方の応力比によらずほぼ等しく $x \cong 2/\rho$ となる。特に、形状比 a/b が大きくなると、応力こう配だけでなく、長軸端からかなり離れた点の応力分布も応力比にほとんど影響されず、1本の曲線で近似することができる。弾性応力分布のこの性質は一軸引張り ($\sigma_{x\infty}=0$) の場合にはすでに西谷⁽⁴⁾によってその重要性が指摘されている。図 9, 10 の拡大途中の塑性域の形状が a/b と $\sigma_{x\infty}/\sigma_{y\infty}$ にあまり影響されないのは図 14 の性質によるものと考えられる。

3.3.5 塑性域長さに及ぼすだ円形状比の影響 平面応力場のき裂先端の塑性域の大きさは Dugdale モデルによって与えられる。人工き裂あるいはスリットなどは先端半径が零ではなく有限であるため、塑性域の寸法が小さい降伏初期には Dugdale モデルによる予測値とは異なってくることが予想される。図 15 は、無次元塑性域寸法 R/a に及ぼす形状比 a/b の影響を示したものである。Dugdale モデルは $H'=0$ に対す

図 16 塑性域長さに及ぼす二軸応力比の影響

る解であり、本研究のだ円孔の場合は $H'=2000(E/10)$ としているため、 $a/b \rightarrow \infty$ によって両者の解は完全には一致しないが、図 15 の傾向から H' の影響は小さいとみてよいであろう。図 15 から Dugdale モデルによって R/a を予測するときの誤差に及ぼす a/b および σ_x/σ_y の影響を推定することができる。

図 16 は遠方の応力が二軸の場合における同様な解析を示したものである。これらの結果は、例えばねじりを受けるパイプの軸方向と 45° をなすき裂またはスリットの先端の塑性域寸法の評価に利用できるであろう。

4. 結 言

有限要素法と体積力法を組合せる弾塑性解析方法を確立した。それによって、遠方で種々の組合せの一様応力 $(\sigma_{x\infty}, \sigma_{y\infty}, \tau_{xy\infty})$ を受ける無限板中にだ円孔 ($x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$) が存在するとき、だ円孔の縁に生ずる降伏域の形状と拡大挙動を詳細に解析し、その結果を総合的に検討した。得られた結果をまとめると次のようになる。

(1) 有限要素法と体積力法の組合せによる弾塑性解析法は無限板や半無限板などの基礎的な弾塑性問題や塑性域が弾性域に比べて小さい問題に高精度解析に極めて適している。

(2) だ円孔の長軸 ($a > b$) が x 軸に対して傾いており、遠方で y 軸方向に一軸引張り応力 $\sigma_{y\infty}$ を負荷すると長軸端からずれた位置から降伏がはじまり、この降伏域は長軸端から遠くなる方向へ拡大する。

(3) だ円孔の主軸 ($a > b$) が x, y 軸に一致するとき、遠方で $\sigma_{x\infty}, \sigma_{y\infty}$ を負荷すると降伏のはじまりは $K_t = (1+2a/b) - \sigma_{x\infty}/\sigma_{y\infty}$ で定義される応力集中係数の大小によって影響される。しかし、拡大途中の塑性域の

形状は $\sigma_{x\infty}/\sigma_{y\infty}$ にあまり左右されない。

(4) だ円孔の主軸 (a, b) が x, y 軸に一致するとき遠方で $\tau_{xy\infty}$ を負荷すると最初は長軸端から離れただ円孔縁が降伏するが、次に降伏するのは長軸端ではなく、内部に入ったところである。

(5) $\sigma_{x\infty}/\sigma_{y\infty} \neq 0$ のときも Neuber 則は誤差ほぼ 10 % 以下の精度で成立する。

(6) だ円孔縁に生ずる塑性域の大きさとき裂に対する Dugdale model による塑性域を比較し、Dugdale model による近似の誤差を検討した。

文 献

- (1) 渡・西谷, 機論, 51-462, A (昭 60), 571.
- (2) Mura, T., *Micromechanics of defects in Solids*, (1982), Martinus Nijhoff Publishers.
- (3) Esheiby, J. D., *Proc. Roy. Soc., London Ser. A*, 241 (1957), 376.
- (4) 内山・八田・村上, 日本複合材料学会誌, 11-6 (昭 60), 275.
- (5) Murakami, Y. and Uchiyama, Y., *Elasto-Plastic Analysis of stress and Strain Concentration by the Combination of Body Force Method and Finite Element Method*, *Proc. Int. Conf. Comput. Mech.*, (1986), V-129.
- (6) 森口, 2 次元弾性論, (昭 32), 12, 岩波書店.
- (7) 村上, 機論, 43-370 (昭 52), 2022.
- (8) 西谷, 機論, 49-447, A (昭 58), 1353.

討 論

〔質問〕 矢川 元基・葉 高 文

〔東京大学工学部〕

貴論文では、FEM と BFM を組合せて遠方で種々の応力の作用を受ける無限板におけるだ円孔の縁に生ずる降伏域の形状と拡大挙動を総合的に検討されたことに敬意を表すとともに、以下の点についてご教示願いたい。

FEM と BEM の両者の長所を生かした結合解法：FEM+BEM も、貴論文にあるような問題を効率よく解析できると思うが、FEM+BEM に比較して、FEM+BFM の特長はどのような点にあるのか、特に、計算精度と計算時間に関してご教示願いたい。

〔回答〕 体積力法 (BFM) と境界要素法 (BEM)

は原理的には同じ方法であるので、FEM+BFM と FEM+BEM も原理的には同じ取扱い方法をするようになると思う。ただ、具体的に無限板や半無限板などの種々の問題を解くときにはこれまで BFM と BEM を単独に応用して種々の問題を解いた解法すなわち経験がどのように生かされるかで計算精度、計算時間、プログラミングなどの実質的な違いが出てくると思う。この点に関して、体積力法 (BFM) では過去に孔、切欠き、き裂などの種々の応力集中問題を精度良く解いてきた実績があり、FEM と BFM の要素の境界における体積力密度の分布の形式などの決定に有利な面があると思う。