翼形断面のねじりせん断応力*

齋 藤 廣 作^{*1}

The Torsional Shearing Stress of an Aerofoil Section

Hirosaku SAITO

The torsional shearing stress on the surface of an aerofoil section was studied. The analysis was carried out in the polar co-ordinate system. The back edge point of an aerofoil section was located on origin and the chord of the blade was located on the polar axis. The stress function was deduced by adapting conditions to satisfy the Poisson equation and the boundary of the section. By substituting the stress function into the fundamental formula, the torsional shearing stress at any point on the surface of the aerofoil section was found. Also the area and the polar moment of inertia of the aerofoil section were studied by the method of complex mapping function. Consequently, the torsional rigidity of the aerofoil section was deduced. As an example, the shearing stress distributions and the torsional rigidity of the Clark-Y series Propeller were calculated.

Key Words: Shearing Stress Distribution, Torsional Rigidity, Aerofoil Section, Poisson Equation, Complex Mapping Function

1. ま え が き

翼形は、ポンプ、タービンの羽根やプロペラの断面形として広く用いられ、運転中においてはねじりモーメントを受けている。一方、最近翼の材料として金属のほかに各種の樹脂や複合材料が使用される傾向にあり、運転中に発生するねじりせん断応力をあらかじめ解析し、評価しておくことは、設計上ますます重要となってきた。これまでに、ねじりの解法はすでに、いくつか発表されているがその取扱いは容易でなく、実際にあたっては必ずしも好都合とはいえない。本報では解析にあたって、翼の後縁を原点とし、翼の弦線を座標軸とする極座標系を採用し、応力関数、せん断応力の基礎式として極方程式を用いることによって、比較的容易に翼形表面のねじりせん断応力の分布を求める理論近似式を導いた。また、せん断応力を求めるに必要な翼形のねじり剛性は、翼形に適合する写像関数を用い、翼形の断面積と重心に関する断面二次極モーメントを導くことによって決定した。さらに本研究によって導いた理論式を用いて数値計算の一例として

Clark-Y 翼形について解析を行い、理論式の検証を行った。

2. ねじりの基礎式

2・1 応力関数の基礎式 x, y 面上に翼形断面があり、 x, y をその直角座標、 l, α をその極座標とし、 Ψ を応力関数、 G を剛性率、 ω を比ねじれ角とすれば、断面の境界および内部においては、次の偏微分方程式 (Poisson の方程式) が成り立つ。

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial l^2} + \frac{1}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial l} + \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2} = -2G\omega \quad \dots\dots\dots (1)$$

ϕ をねじり関数、 φ をねじり関数に共役な調和関数とすれば⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= G\omega \left\{ \phi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\} \\ &= G\omega \phi - \frac{1}{2} G\omega (x^2 + y^2) \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで

$$\Psi_A = G\omega \phi \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\Psi_B = -\frac{1}{2} G\omega (x^2 + y^2) \quad \dots\dots\dots (4)$$

とする。

* 昭和 62 年 10 月 2 日 北陸信越支部信越地方新潟講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 3 月 30 日。

^{*1} 正員、横浜国立大学工学部 (〒210 横浜市保土谷区常盤台 156)。

$$\frac{\partial^2 \Psi_B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_B}{\partial y^2} = -2G\omega$$

また,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

であるから

$$\frac{\partial^2 \Psi_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_A}{\partial y^2} = 0$$

となる.

すなわち, Ψ_A は領域内で Laplace 方程式を満足し, 境界上 $\Psi=0$ においては $\Psi_A = -\Psi_B$ である調和関数である.

2.2 応力関数の極方程式 式(4)を次式のように書き換える.

$$\Psi_B = -\frac{1}{2}G\omega l^2 \dots\dots\dots (5)$$

式(3)の Ψ_A を境界上においては $-\Psi_B$ で Laplace 方程式を満足する形として次のように設定する.

$$\Psi_A = \frac{G\omega}{2} \left\{ l^2 (p_2 \cos 2\alpha + q_2 \sin 2\alpha) + l^m (p_m \cos m\alpha + q_m \sin m\alpha) \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに, p_2, q_2, p_m, q_m, m は翼形の形状によって定まる未知の定数である. 式(2), (5), (6)より次式を得る.

$$\Psi = -\frac{G\omega}{2} \left\{ l^2 (p_2 \cos 2\alpha + q_2 \sin 2\alpha) + l^m (p_m \cos m\alpha + q_m \sin m\alpha) - l^2 \right\} \dots\dots\dots (7)$$

境界上においては, 上式において $\Psi=0$ とおく.

$$1 = p_2 \cos 2\alpha + q_2 \sin 2\alpha + l^{m-2} (p_m \cos m\alpha + q_m \sin m\alpha) \dots\dots\dots (8)$$

式(8)は, 境界上の曲線をあらわす極方程式である.

2.3 定数 p_2, q_2, p_m, q_m の決定 図1に示すように翼の後縁を原点とし, 翼弦を極座標の原線に一致させたとき, 翼の上面下面の接線が原線となす角を α_1, α_2 とする.

(1) 式(8)において $l=0$ のとき

$$\begin{aligned} 1 &= p_2 \cos 2\alpha_1 + q_2 \sin 2\alpha_1 \\ 1 &= p_2 \cos 2\alpha_2 - q_2 \sin 2\alpha_2 \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

式(8)の両辺を α で微分すると式(10)が求まる.

$$\begin{aligned} 0 &= -2p_2 \sin 2\alpha + 2q_2 \cos 2\alpha \\ &+ (m-2)l^{m-3} \frac{dl}{d\alpha} (p_m \cos m\alpha + q_m \sin m\alpha) \\ &+ ml^{m-2} (-p_m \sin m\alpha + q_m \cos m\alpha) \end{aligned} \dots\dots\dots (10)$$

図 1

(2) 式(10)において前縁, すなわち, $\alpha=0$ のとき, $dl/d\alpha=0$ の条件を入れる.

$$\begin{aligned} 0 &= 2q_2 + mq_m \\ q_m &= -2q_2/m \end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

また, 式(8)において $\alpha=0$ のとき $l=1$ の条件を入れる.

$$\begin{aligned} 1 &= p_2 + p_m \\ p_m &= 1 - p_2 \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

(3) 翼上面の $y_{\max}$ に対応する l と α を $l=l_3, \alpha=\alpha_3$ とおき, 式(8)に式(11), (12)を代入すると式(13)が求まる.

$$\begin{aligned} 1 - p_2 \cos 2\alpha_3 - q_2 \sin 2\alpha_3 \\ = l_3^{m-2} \left\{ (1 - p_2) \cos m\alpha_3 - \frac{2q_2}{m} \sin m\alpha_3 \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

式(9), (11), (12)によって既知となった p_2, q_2, p_m, q_m の値を式(13)に代入し, 左辺=右辺となるよう試行法によって m の値を決定する.

2.4 動径および偏角方向のせん断応力 τ_l, τ_α および合成せん断応力 τ $\tau_l, \tau_\alpha, \tau$ は次式であらわされる.

$$\begin{aligned} \tau_l &= \frac{1}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = \frac{G\omega}{2l} \left\{ l^2 (-2p_2 \sin 2\alpha + 2q_2 \cos 2\alpha) \right. \\ &\quad \left. + l^m (-mp_m \sin m\alpha + mq_m \cos m\alpha) \right\} \\ \tau_l &= \frac{G\omega}{2} \left\{ l (-2p_2 \sin 2\alpha + 2q_2 \cos 2\alpha) \right. \\ &\quad \left. + l^{m-1} (-mp_m \sin m\alpha + mq_m \cos m\alpha) \right\} \\ \tau_\alpha &= -\frac{\partial \Psi}{\partial l} = -\frac{G\omega}{2} \left\{ -2l + 2l(p_2 \cos 2\alpha \right. \\ &\quad \left. + q_2 \sin 2\alpha) + ml^{m-1} (p_m \cos m\alpha \right. \\ &\quad \left. + q_m \sin m\alpha) \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

$$\tau = (\tau_l^2 + \tau_\alpha^2)^{1/2} \dots\dots\dots (15)$$

3. せん断応力分布の計算例

3.1 Clark-Y 翼形寸法 翼弦長 $2R=200$ mm の Clark-Y 翼形曲線の寸法⁽²⁾を表1に, またその曲線図を図2に示す. 曲線図より $\alpha_1=13^\circ, \alpha_2=-2^\circ, \alpha_3=7^\circ$ が求まる. 式(9), (11), (12)より $p_2=1.016, q_2=0.197, p_m=-0.016, q_m=-0.106$. また, 式(13)より $m=3.7$ となる. 式(8)

$$l^{m-2} = \frac{1 - p_2 \cos 2\alpha - q_2 \sin 2\alpha}{p_m \cos m\alpha + q_m \sin m\alpha}$$

より α の各値に対応する l の値が求められる. 翼の後縁を原点として極座標にて各点を plot すればこれらの点は翼形曲線上にのる. 図2中に示す●印の点がそれぞれの α の値に対応する点を示す.

表 1

Direction of length	x.	5	10	15	20	25	30	35	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
Upper surface	y_u	0.5	3.0	4.0	5.6	6.6	7.9	9.2	10.4	12.5	14.7	16.1	18.3	19.1	21.0	21.1	22.6	24.4
Lower surface	y_l	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Direction of length	x_u	140	150	160	165	170	175	180	183	185	188	190	193	195	196	197.5	198	200
Upper surface	y_u	23.4	230	227	22.4	21.4	20.4	19.2	19.1	17.7	15.4	15.8	14.5	13.0	12.5	10.9	10.8	7.0
Lower surface	y_l	0	0	0.1	0.2	0.3	0.7	0.8	1.6	1.7	1.8	1.9	2.5	2.9	3.3	3.9	5.3	7.0

図 2

図 3

3.2 翼形の境界面上のねじりせん断応力分布

図3は横軸に $l/2R (= \rho)$ の値をとり、式(14)、(15)によって計算したせん断応力を $\tau/(1/2)G\omega$ の形にした値を縦軸にとってあらわした曲線を示す。図3中の太線が本研究で求めた値で、細線が生井⁽¹⁾の研究による値である。図3によれば、応力分布の傾向は両者ともにほぼ同じであり、 $\tau_{\max}$ の値も両者の差はきん少である。

4. 翼形曲線

図2および図4に示すように前後縁が x 軸上にあって、翼弦の midpoint が複素平面 z 面 ($z = x + iy$) 上の原

図 4

図 5

点 P にある翼形を考える。また翼弦長の $1/2$ を単位長とする。図2または図4に示す z 面上の翼形曲線は式(16)の写像関数⁽⁴⁾によって図5に示す複素平面 ζ 面 ($\zeta = \xi + i\eta$) 上の単位円に写像される。

$$z = c_{-1}\zeta + c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{c_n}{\zeta^n} + \cdots \quad (16)$$

$$\text{ただし } |\zeta| \geq 1 \quad c_n = A_n + iB_n$$

ここで $\zeta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と $c_n = A_n + iB_n$ の関係を用いれば式(16)は次式によってあらわされる。

$$x = A_{-1}r \cos \theta - B_{-1}r \sin \theta + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{r^n} \cos n\theta + \frac{B_n}{r^n} \sin n\theta \right) \quad \cdots \cdots (17)$$

$$y = B_{-1}r \cos \theta + A_{-1}r \sin \theta + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B_n}{r^n} \cos n\theta - \frac{A_n}{r^n} \sin n\theta \right) \quad \cdots \cdots (18)$$

4・1 係数の決定 式(17), (18)の各係数を守屋の翼形理論によって決定する。まず, 第一次近似として式(17)の代わりに

$$x = r \cos \theta \quad \dots\dots\dots (19)$$

ただし, $r=1$ と設定し, これを式 $y=F(x)$ に代入して, y を次式のように Fourier 級数に展開する。

$$y = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに, $\theta=0$ は前縁, $\theta=\pi$ は後縁に対応する。式(18)と式(20)の係数を比較して, 次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= a_0 \\ B_{-1}r + \frac{B_1}{r} &= a_1, A_{-1}r - \frac{A_1}{r} = b_1 \\ \frac{B_2}{r^2} &= a_2, \frac{A_2}{r^2} = -b_2 \\ \frac{B_n}{r^n} &= a_n, \frac{A_n}{r^n} = -b_n \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

式(17), (18)の共役 Fourier 級数を x^*, y^* とする。

$$\begin{aligned} x^* &= B_{-1}r \cos \theta + A_{-1}r \sin \theta \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{B_n}{r^n} \cos n\theta + \frac{A_n}{r^n} \sin n\theta \right) \\ y^* &= -A_{-1}r \cos \theta + B_{-1}r \sin \theta \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{r^n} \cos n\theta + \frac{B_n}{r^n} \sin n\theta \right) \end{aligned}$$

$$y + x^* = 2B_{-1}r \cos \theta + 2A_{-1}r \sin \theta + B_0 \quad \dots\dots (22)$$

$$x - y^* = 2A_{-1}r \cos \theta - 2B_{-1}r \sin \theta + A_0 \quad (23)$$

ここで, $A_{-1} + iB_{-1} = ke^{i\theta} = k(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと, 次式が求まる。

$$A_{-1} \cos \theta - B_{-1} \sin \theta = k \cos(\beta + \theta) \quad \dots\dots (24)$$

$$B_{-1} \cos \theta + A_{-1} \sin \theta = k \sin(\beta + \theta) \quad \dots\dots (25)$$

したがって, 式(23)は

$$x(\theta) - y^*(\theta) = 2rk \cos(\beta + \theta) + A_0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

また, 式(22)は

$$x(\theta)^* + y(\theta) = 2rk \sin(\beta + \theta) + B_0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

となる。

$$x = r \cos \theta \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \quad \dots\dots\dots (20)$$

この式の共役関数は, 次式となる。

$$x^*(\theta) = r \sin \theta \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$y^*(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta \quad \dots\dots (29)$$

式(27)および式(20), (28)より

$$\left. \begin{aligned} x^*(\theta) + y(\theta) &= 2rk \sin(\beta + \theta) + B_0 \\ &= r \sin \theta + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

式(26)および式(19), (29)より

$$\left. \begin{aligned} x(\theta) - y^*(\theta) &= 2rk \cos(\beta + \theta) + A_0 \\ &= r \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

したがって, 式(30), (31)の第2, 3式より次式を得る。

$$A_0 = 0, B_0 = a_0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

次に, 式(31), (30)の第2, 3式を θ で微分して $\theta=0$ とおき, 式(24), (25)と関連をつける。

$$A_{-1} = k \cos \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2r} \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$-B_{-1} = -k \sin \beta = -\frac{1}{2r} \sum_{n=1}^{\infty} na_n \quad \dots\dots\dots (34)$$

式(33)と式(21)中の $A_{-1}r - A_1/r = b_1$ の両式より

$$\frac{A_1}{r} = \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \right) - b_1 \quad \dots\dots\dots (35)$$

を得る。また, 同様に式(34)と式(21)中の $B_{-1}r + B_1/r = a_1$ の両式より

$$\frac{B_1}{r} = a_1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} na_n \quad \dots\dots\dots (36)$$

が求まる。式(21), (32), (35), (36)で決定される各係数を式(17), (18)に代入すれば, 翼弦の中心 P を原点とする翼形曲線の式が得られる。

5. ねじり剛性

5・1 翼形断面積 A 図4に示すように, z 面上の原点を P とし, 翼形曲線をあらわすために動径を R , 偏角を θ とする極座標を導入する。これに対応する ζ 面上の動径を r , 偏角を θ とすると次の関係が成り立つ。

$$z = Re^{i\theta} = \varphi(\zeta) = \varphi(re^{i\theta}) \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$\log z = \log R + i\theta = \log |z| + i\theta$$

上式の両辺を θ で微分し, 虚数部を採る。

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{d \log z}{d\theta} \right\} = \frac{d\theta}{d\theta}$$

ここで

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{d \log z}{d\theta} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{d \log z}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\theta} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{z'}{z} \frac{d\zeta}{d\theta} \right\}$$

ただし,

$$z' = \frac{dz}{d\zeta} \quad \text{また} \quad \frac{d\zeta}{d\theta} = ire^{i\theta} = i\zeta$$

である。それゆえ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{d\theta} &= \operatorname{Im} \left(\frac{z'}{z} i\zeta \right) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{z'}{z} \zeta \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)} \zeta \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$R^2 = \varphi(\zeta) \bar{\varphi}(\bar{\zeta}) \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$\begin{aligned}
 d\theta &= d \arg z = d \operatorname{Im} \{ \log \varphi(\zeta) \} = \frac{d \operatorname{Im} \{ \log \varphi(\zeta) \}}{d\theta} d\theta = \operatorname{Im} \left\{ \frac{d \log \varphi(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\theta} d\theta \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)} i \zeta d\theta \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\zeta \varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)} \frac{\bar{\varphi}(\bar{\zeta})}{\bar{\varphi}(\bar{\zeta})} d\theta \right\} \\
 &\dots\dots\dots (40)
 \end{aligned}$$

翼形断面積を A とし、下式の第2式に式(39), (40)を、また第3式に式(16)の写像関数を代入する。

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 \frac{d\theta}{d\theta} d\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \zeta \varphi'(\zeta) \bar{\varphi}(\bar{\zeta}) d\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left(c_{-1} \zeta - \sum_{n=1}^{\infty} n' c_n \zeta^{-n} \right) \left(\bar{c}_{-1} \bar{\zeta} + \bar{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n \bar{\zeta}^{-n} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left(c_{-1} r e^{i\theta} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n r^{-n} e^{-in\theta} \right) \left(\bar{c}_{-1} r e^{-i\theta} + \bar{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n r^{-n} e^{in\theta} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \{ |c_{-1}|^2 r^2 - c_1 \bar{c}_{-1} e^{-i2\theta} - 2c_2 \bar{c}_{-1} r^{-1} e^{-i3\theta} + c_{-1} \bar{c}_0 r e^{i\theta} - c_1 \bar{c}_0 r^{-1} e^{-i\theta} - 2c_2 \bar{c}_0 r^{-2} e^{-i2\theta} \\
 &\quad + c_{-1} \bar{c}_1 e^{i2\theta} - c_1 \bar{c}_1 r^{-2} - 2c_2 \bar{c}_1 r^{-3} e^{-i\theta} + c_{-1} \bar{c}_2 r^{-1} e^{i3\theta} - c_1 \bar{c}_2 r^{-3} e^{i\theta} - 2c_2 \bar{c}_2 r^{-4} + \dots \} d\theta
 \end{aligned}$$

上記の積分計算で $e^{-in\theta}$, $e^{+in\theta}$ を含む項の積分値はすべて零となる。結局

$$A = \pi \left\{ r^2 |c_{-1}|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 r^{-2n} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

を得る。ここに $|c_n|^2 = c_n \cdot \bar{c}_n = (A_n + iB_n)(A_n - iB_n)$ とする。

5・2 断面二次極モーメント I_p 図4において、 P 軸まわりの断面二次極モーメント I_p は下式によって求めることができる。

$$I_p = \int_0^{2\pi} \int_0^R R^2 R dR d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} R^2 \frac{d\theta}{d\theta} d\theta \dots\dots (42)$$

上式に式(38), (39)を代入して変形する。

$$\begin{aligned}
 I_p &= \frac{1}{4} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \varphi^2(\zeta) \bar{\varphi}^2(\bar{\zeta}) \frac{\zeta \varphi'(\zeta) \bar{\varphi}(\bar{\zeta})}{\varphi(\zeta) \bar{\varphi}(\bar{\zeta})} d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \varphi(\zeta) \bar{\varphi}(\bar{\zeta}) \cdot \bar{\varphi}(\bar{\zeta}) \zeta \varphi'(\zeta) d\theta \\
 &\dots\dots\dots (43)
 \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
 \varphi(\zeta) &= c_{-1} \zeta + c_0 + c_1 \zeta^{-1} + c_2 \zeta^{-2} + \dots\dots \\
 \bar{\varphi}(\bar{\zeta}) &= \bar{c}_{-1} \bar{\zeta} + \bar{c}_0 + \bar{c}_1 \bar{\zeta}^{-1} + \bar{c}_2 \bar{\zeta}^{-2} + \dots\dots \\
 \varphi'(\zeta) &= c_{-1} - c_1 \zeta^{-2} - 2c_2 \zeta^{-3} - \dots\dots \\
 \zeta \varphi'(\zeta) &= c_{-1} \zeta - c_1 \zeta^{-1} - 2c_2 \zeta^{-2} - \dots\dots
 \end{aligned} \dots\dots\dots (44)$$

式(43)に式(44)を代入する。 $e^{-in\theta}$, $e^{+in\theta}$ を含む項の積分値はすべて零となり、結局次式が求まる。

$$\begin{aligned}
 I_p &= \frac{\pi}{2} \operatorname{Re} [|c_{-1}|^4 r^4 + 2|c_{-1}|^2 |c_0|^2 r^2 - 2|c_{-1}|^2 |c_2|^2 r^{-2} \\
 &\quad - 2c_0 c_1 \bar{c}_{-1} \bar{c}_2 r^{-2} - 2|c_0|^2 |c_1|^2 r^{-2} \\
 &\quad - 2(c_1)^2 \bar{c}_0 \bar{c}_2 r^{-4} \\
 &\quad - 4|c_0|^2 |c_2|^2 r^{-4} - |c_1|^4 r^{-4} - 6|c_1|^2 |c_2|^2 r^{-6} \\
 &\quad - 2c_0 c_2 (\bar{c}_1)^2 r^{-4} - 2|c_2|^4 r^{-8}] \dots\dots\dots (45)
 \end{aligned}$$

5・3 重心 G 点まわりの断面二次極モーメント I_G

図4において翼形断面の重心を G 点とし、 G 点の x 座標、 y 座標を $\bar{x}$, $\bar{y}$ とすれば、これらはそれぞれ次式で求められる。

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \int_0^{2\pi} \frac{y(\theta) \cdot x(\theta)}{A} \frac{dx(\theta)}{d\theta} d\theta \\
 \bar{y} &= \int_0^{2\pi} \frac{y(\theta) x(\theta)}{A} \frac{dy(\theta)}{d\theta} d\theta
 \end{aligned} \dots\dots\dots (46)$$

式(41), (45), (46)によって求まる $A, I_p, \bar{x}, \bar{y}$ を下式に代入すると I_G の値が求まる。

$$I_G = I_p - A(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \dots\dots\dots (47)$$

5・4 ねじり剛性 C ねじりモーメントを M , 単位長さ当たりのねじれ角を ω とすれば、ねじり剛性は $C = M/\omega$ であらわされる。Saint-Venant は種々の単純な連結断面形の柱体のねじり剛性は近似的に次式であらわされることを見いだした⁽⁵⁾。

$$C = \frac{GA^4}{4\pi^2 I_G} \dots\dots\dots (48)$$

したがって、ねじりモーメントは、次式であらわされる。

$$M = \frac{GA^4}{4\pi^2 I_G} \omega \dots\dots\dots (49)$$

6. ねじり剛性の計算例

6・1 Clark-Y 翼形曲線 図2で示される翼形曲線を P 点を原点として Fourier 級数であらわす。

$$y = \varphi(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

2π を 12 等分し、それぞれの角度に対応する $y_0, y_1, \dots, y_{12}$ の値を求め、上式の Fourier 係数を決定すると下記の値となる。

$$a_0 = 0.034, a_1 = 0.0087, a_2 = -0.0073$$

$$a_3 = -0.0067$$

$$b_1 = 0.096, b_2 = 0.031, b_3 = -0.0022$$

ただし、翼弦長さの $1/2$ を単位長さとおく。

上記の値を式(21), (32), (35), (36)の各式に代入して、下記の値を得た。

$$A_{-1} = 0.576, A_0 = 0, A_1 = 0.48, A_2 = -0.031$$

$$A_3 = 0.002, B_{-1} = -0.004, B_0 = 0.034$$

$$B_1=0.013, B_2=-0.007, B_3=-0.007$$

上記の値を式(17), (18)に代入して下記の式を得た.

$$\left. \begin{aligned} x &= 1.056 \cos \theta + 0.017 \sin \theta - 0.031 \cos 2\theta \\ &\quad - 0.07 \sin 2\theta + 0.002 \cos 3\theta - 0.007 \sin 3\theta \\ y &= 0.009 \cos \theta + 0.096 \sin \theta + 0.034 \\ &\quad - 0.007 \cos 2\theta + 0.031 \sin 2\theta - 0.007 \cos 3\theta \\ &\quad - 0.002 \sin 3\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

式(50)において, θ を 0 から 2π まで変化して得られた x, y の値を plot した結果, 図 2 に示す翼形曲線とほぼ一致することを確認した.

6・2 翼形断面積 6・1 節の $A_{-1} \dots A_3, B_{-1} \dots B_3$ の値を $|c_n|^2 = A_n^2 + B_n^2$ の式に代入して下記の値を得た.

$$\begin{aligned} |c_{-1}|^2 &= 3.317.92 \times 10^{-4} & |c_0|^2 &= 1.156 \times 10^{-4} \\ |c_1|^2 &= 2.305.69 \times 10^{-4} & |c_2|^2 &= 10.14 \times 10^{-4} \\ |c_3|^2 &= 0.497 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad \text{また, } r=1 \text{ とする.}$$

これらの値を式(41)に代入して A の値を求めた.

$$A = 3142.113 \times 10^{-4}$$

この値は翼弦の中点 P から前, 後縁までの長さ $R=1$ とした場合であるが, これを一般的に R の長さにとれば

$$A = 3142.113 \times 10^{-4} \times R^2 \dots\dots\dots (51)$$

の形で与えられる.

6・3 断面二次極モーメント τ と面上の単位円を考える. すなわち式(45)において, $r=1$ とおき, c_n や $\bar{c}_n$ の値をこの式に代入して I_p の値を求めた.

$$I_p = 867.5 \times 10^{-4}$$

一般的に翼弦の中点 P から前, 後縁までの長さを 6・2 節同様, R とすれば

$$I_p = 867.5 \times 10^{-4} \times R^4 \dots\dots\dots (52)$$

の形で与えられる. また式(46)によって

$\bar{x} = 0.159R, \bar{y} = 0.034R$ が求まった. これら $I_p, A, \bar{x}, \bar{y}$ の値を式(47)に代入して

$$I_G = 783 \times 10^{-4} \times R^4 \dots\dots\dots (53)$$

の値を得た.

6・4 航空工学便覧記載の諸式との比較 Clark-Y 翼形については, 航空工学便覧に次の諸式が示されている.

$$\left. \begin{aligned} A &= 0.7245bh, I_x = 0.0454bh^3 \\ I_y &= 0.0418b^3h, h = 0.1201b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

ただし, b は翼弦長, h は最大翼厚である. これらの諸式によって計算する. $A = 3480 \times 10^{-4} \times R^2, I_x = 12.6 \times 10^{-4} \times R^4, I_y = 800 \times 10^{-4} \times R^4, I_G = 812.6 \times 10^{-4} \times R^4, A,$

I_G の値は式(51), (53)の値とほぼ近似する.

6・5 ねじり剛性 以上の諸値を式(49)に代入して, 次式が求められた.

$$M = 0.00315GR^4\omega \dots\dots\dots (55)$$

ここで, 翼形断面積と等しい断面積の円柱棒のねじり剛性を求める. 円柱棒の断面の半径を R_1 とする. 式(49)において, $A = \pi R_1^2, I_G = \pi/2 \cdot R_1^4$ を代入し, この場合の M を M_0 とおく.

$$M_0 = \frac{G \cdot \pi R_1^4}{2} \omega = I_G \cdot G\omega$$

あるいは,

$$M_0 = 1.57GR_1^4\omega \dots\dots\dots (56)$$

であらわされる. ここで $\pi R_1^2 = 3142.113 \times 10^{-4} \times R^2$ とおく. これより,

$$R_1 = 0.316R$$

上式を式(56)に代入する.

$$M_0 = 0.01565GR^4\omega \dots\dots\dots (57)$$

式(55), (57)より $M/M_0 = 0.2$ となる.

7. ま と め

本研究によって導いた諸式を Clark-Y 翼形に適用して検証した. その結果ねじりせん断応力 τ の最大値は翼形の上下面とも, 翼弦の長さ方向 $\rho = 0.7$ 付近すなわち図 2 に示す翼厚が最大値 23.4 mm となる位置の近傍に存在することがわかった. また後縁においては, 図 3 に示すように τ は零となる. このことは, これまでの諸文献に述べられているように, 単一閉曲線を外周とする断面がねじりモーメントを受けたとき

(1) 最大せん断応力は最大内接円の接点またはその付近にある⁽⁶⁾.

(2) 断面の凸角点ではせん断応力は零となる⁽⁷⁾. という説と一致している. また, この翼形のねじりに対する剛性は同一断面積をもつ円柱の 0.2 倍であるという結論が得られた. なお, 本研究の追認のため模型翼形によってねじり試験を行う予定である.

文 献

- (1) 鶴戸口, 弾性学, (昭 53), 共立出版.
- (2) 日本航空学会編, 航空工学便覧, (昭 38).
- (3) 生井, 機論, 29-95 (昭 29), 463.
- (4) 守屋, 日本航空学会論文集, 8-78 (昭 16), 576.
- (5) Timoshenko, S. P., *Theory of Elasticity*, 2nd ed., (1934), The Maple Press Co.
- (6) 倉西, 弾性学, (昭 23), 日本機械学会.
- (7) 奥村, 材料力学, (昭 36), コロナ社.