板材の軸対称張出し成形のシェル理論による有限要素解析* (後藤の塑性構成式及び四次異方性降伏関数を用いる場合)

後 藤 学*¹, 澤 茂 樹*²

An Analysis of Axisymmetric Sheet Forming by the Shell Finite Element Method (The Case Where Gotoh's Plastic Constitutive Equation and Fourth-Order Yield Function are Used)

Manabu GOTOH and Shigeki SAWA

An elastic-plastic finite element formulation on the basis of the shell theory is given for the analysis of axisymmetric sheet forming, such as hydraulic bulging, stretching with a rigid punch and so forth. Gotoh's plastic constitutive equation with an approximation and his fourth-order yield function are used, as well as the conventional J_2 -flow theory. Several numerical examples are made with the aid of a newly developed computer program in which isoparametric finite elements are used in order to conserve the continuity of the displacement and the slope across the element boundaries.

Key Words: Plasticity, Shell, FEM, Axisymmetric Problem, Constitutive Equation, Sheet Forming Processes

1. 緒 言

従来, 板材成形の解析は, その簡便さから膜理論によって行われることが多かったが⁽¹⁾⁽²⁾, 薄いという特質を生かしつつ曲げ効果や板厚効果などを考慮できるという理由で, シェル理論によって扱われる例もふえている^{(3)~(5)}。シェル理論による場合, 必然的に弾塑性解析となるので, 成形後のスプリング・バックや残留応力分布の評価も可能となる, という利点をもつ。ここで, 形状を軸対称に限定して考えると, 用いる座標としては, 横内はオイラー座標, 永井や仲町らは埋込み座標を採用している。後者には, テンソル記法による洗練さがあり, 形式性が強いので各種因子の見落としの危険性は少ないが, その種の記法に不慣れな者にはわかり難い。また, 永井の解析は差分法によるものであるが, せん断の効果も導入している点は, 他に一步先んじているといえる。しかし, 以上のいずれも, 等方性板を扱っており, 用いている構成式も古典的な J_2 -流れ理論 (以下 J_2 -F) に限られている場合が多い。

本論文では, 板材成形では重要な異方性を, 著者の

一人 (後藤) が先に提案した四次異方性降伏関数⁽⁶⁾⁽⁷⁾を用いることによって考慮した。さらに, 変形や破断に深く関与すると思われる, 後続降伏曲面の負荷点でのとがりの影響を見るために, やはり著者の一人 (後藤) が提案している一種のとがり硬化塑性構成式^{(8)~(10)}を用いた。四次異方性降伏関数とこの構成式を組合せるには工夫が必要であり, さらに構成式が相当ひずみ増分に関して非線形であるための工夫も必要である。これらの組合せにより, $\bar{\sigma}$ 値を用いて表現される Hill の二次異方性⁽¹¹⁾はもとより, J_2 -F や J_2 -変形理論 (J_2 -D) など特殊ケースとして包含できる。また, 四次異方性は $\bar{\sigma}$ のほか $\bar{X}$ (同一相当ひずみでの, 面内等二軸降伏応力と面内単軸降伏応力の比) を含むので, $\bar{X}$ の影響も調べることができる。

有限要素法の定式化は, オイラー座標表示で, シェル理論に基づき行い, 各節点での変位およびこう配を連続ならしめるアイソパラメトリック要素を用いた。ただし, 永井が行ったようなせん断の考慮は, 比較的薄い板材を前提としたこともあって行わなかった。数値計算例は液圧バルジ成形を主に行い, 球頭ポンチによる剛体張出しについても若干行った。

* 昭和61年5月20日 第17回塑性加工春季講演会において講演, 原稿受付 昭和62年1月8日。

*¹ 正員, 岐阜大学工学部(〒501-11 岐阜市柳戸1-1)。

*² イビデン(株)(〒503 大垣市神田町2-1)。

2. 基礎関係式

2.1 構成式 ここで用いる構成式は、とがり点硬化の効果を導入した後藤による一般的構成式⁽⁹⁾のうち、一次形式の構成式として種々検討したもの⁽⁹⁾を、異方性が考慮できるよう拡大した構成式⁽¹²⁾を基本とし、これに四次異方性降伏関数⁽⁶⁾⁽⁷⁾を用いたものである。すなわち、簡潔には以下のとおりである。

$$de = de^e + de^p \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$de^e = dT/2G \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$de^p = \langle P(\Theta^*) \rangle \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_0} - \frac{1}{H_0} \right) (T^*/\bar{\sigma}^*) \bar{d\sigma}^* + \frac{1}{2H_0} dT^* \right] \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$h_0 = (\bar{d\sigma}^*/\bar{d\varepsilon}^p)/3 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} h_0/H_0 &= a^* = \cos \Theta_0^*/(1 + \cos \Theta_0^*) \\ b^* &= 1 - a^* \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\Theta_0^* = \frac{\pi}{2} - \rho \varepsilon^2; \quad \varepsilon = \int \bar{d\varepsilon}^p \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\langle P \rangle = P(P > 0); = 0(P \leq 0) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$P(\Theta^*) = a^* + b^* \cos \Theta^* \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\cos \Theta^* = \frac{3}{2} \text{tr}(T^* \bar{dT}^*)/\bar{\sigma}^* \bar{d\sigma}^* \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\bar{d\sigma}^* = \sqrt{\frac{3}{2}} \{ \text{tr}(\bar{dT}^*)^2 \}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\bar{dT}^* = dT^* - d\omega T^* + T^* d\omega \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$dT^* = (\partial T^*/\partial \sigma) : d\sigma \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\bar{d\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \{ \text{tr}(de^p)^2 \}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

四次異方性降伏関数 (面内等方性) :

$$\begin{aligned} \phi^{*4} &= \bar{\sigma}^{*4} = \sigma_\phi^4 + \bar{A}_2(\sigma_\phi^2 \sigma_\theta + \sigma_\theta \sigma_\phi^2) \\ &\quad + \bar{A}_3 \sigma_\phi^2 \sigma_\theta^2 + \sigma_\theta^4 \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_2 &= -4\bar{r}/(1+\bar{r}) \\ \bar{A}_3 &= (1/\bar{X})^4 - 2\bar{A}_2 - 2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \phi^*(\partial \phi^*/\partial \sigma) / \|\partial \phi^*/\partial \sigma\| \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial \sigma_\phi} = A_\phi, \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial \sigma_\theta} = A_\theta, \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial \sigma_t} = A_t \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$A_t = -(A_\phi + A_\theta) \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\|\partial \phi^*/\partial \sigma\| = \{ \text{tr}(\partial \phi^*/\partial \sigma)^2 \}^{1/2} = A' \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} T_\phi^*/\bar{\sigma}^* &= A_\phi/A \\ T_\theta^*/\bar{\sigma}^* &= A_\theta/A \\ T_t^* &= -(T_\phi^* + T_\theta^*) \\ A &= \sqrt{3/2} A' \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

以上で、 de =偏差ひずみ増分、 $\bar{d}$ =客観性のある増分、 T =偏差応力、 σ =コーシー応力、 G =せん断弾性係数、 Θ_0^* =後続負荷面の負荷点でのとがり円すいの半

頂角、 h_0 =瞬間硬化率=単軸引張試験の応力-ひずみ曲線から式(4)によって求める、 H_0 =瞬間とがり点硬化率、 ρ =とがり円すいの角のとがり速さを律する材料定数、 $d\omega$ =瞬間剛体回転増分、肩符 e =弾性を表す、肩符 p =塑性を表す、 tr =跡(セキ)記号(例えば $\text{tr } A = A_{ii}$)、 T^* =式(16)で定義される異方偏差応力空間内の応力点、 $\bar{d\sigma}^*$ =同応力測度、 $\bar{d\varepsilon}^p$ =相当塑性ひずみ増分、 $\bar{\sigma}^*$ =相当応力、 σ_ϕ =子午線方向垂直応力、 σ_θ =円周方向垂直応力、 $\bar{r}$ =板材の単軸引張試験により得られる幅ひずみと板厚ひずみの比の面内平均値、 $\bar{X}$ =同一相当ひずみでの面内等二軸引張降伏応力と面内単軸引張降伏応力の比、であり、式(14)以降はおもに軸対称板材成形問題を念頭に記述してある。変形中塑性変形が継続するか否かの判定は次式による：

塑性負荷継続条件

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq \Theta^* \leq \Theta_{\max}^* \\ \Theta_{\max}^* &= \cos^{-1}(-a^*/b^*) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに、 Θ^* は式(9)で定義され、異方偏差応力空間内での T^* と $\bar{dT}^*$ のなす角度を意味する。

最終的な構成式は、次のような形となる。

$$\bar{d\sigma} = D d\varepsilon - \sigma_a \bar{d\varepsilon} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 $d\sigma = (d\sigma_\phi, d\sigma_\theta)^T$ 、 $d\varepsilon = (d\varepsilon_\phi, d\varepsilon_\theta)^T$ =ひずみ増分、 $\sigma_a = CD T^*$ 、 C はある係数、 $\bar{d\varepsilon}$ =相当ひずみ増分、であり、係数行列 D は応力、 G, H_0, h_0 などを含む。上式で、

$$\bar{d\varepsilon} = \sqrt{2/3} \{ \text{tr}(de)^2 \}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (23)$$

であり、したがって式(22)をそのまま有限要素法に組込むと、節点変位増分に関して非線形な剛性方程式となり、一変形段階ごとにニュートン・ラプソン法などによる繰返し計算が必要となる。implicitなオイラー増分法を用いるときは、一段階ごとの繰返し計算が前提となるので⁽¹³⁾、このことはそれほど負担とはならないと思われる。しかし、本論文ではexplicit法(直接増分法)を採用したので、計算時間上このことは不利である。そこで、以下のような式(22)の線形近似を用いることとした。

式(1)~(3)および式(22)を吟味すると、式(22)中の D は弾性係数が塑性部分のとがり効果の影響を受けた形となっている。そこで、通常の弾塑性構成式⁽¹⁴⁾、

$$\left. \begin{aligned} \bar{d\sigma} &= [D^e - D^p] d\varepsilon \\ D^p &= \frac{D^e (\partial \phi^*/\partial \sigma) (\partial \phi^*/\partial \sigma)^T D^e}{H^* + (\partial \phi^*/\partial \sigma)^T D^e (\partial \phi^*/\partial \sigma)} \\ H^* &= \frac{d\bar{\sigma}^*}{d\varepsilon^p} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}^*} \cdot \sigma^T \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial \sigma} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

において、 $D^* = D$ と置く。

こうしてつくられる構成式は、等方性で $H_0 \rightarrow \infty$ のとき、 J_2 - F に帰着する。また、等方性に対しては、 G を $1/G^* = 1/G + \langle P(\Theta^*) \rangle / H_0$ として得られる G^* に、そして縦弾性係数 E とポアソン比 ν を、体積弾性率 K が不変（体積変化は弾性によるものとして）と考えて得られる E^* と ν^* に置き換えることに相当する。以上において、

$$D = \frac{2}{D^*} \times \begin{bmatrix} \frac{2}{G} + \frac{2}{3K} + 3 \frac{\langle P^* \rangle}{H_0} C_{\theta\theta} & \frac{1}{G} - \frac{2}{3K} - 3 \frac{\langle P^* \rangle}{H_0} C_{\theta\phi} \\ \frac{1}{G} - \frac{2}{3K} - 3 \frac{\langle P^* \rangle}{H_0} C_{\theta\phi} & \frac{2}{G} + \frac{2}{3K} + 3 \frac{\langle P^* \rangle}{H_0} C_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$P^* = P(\Theta^*)$$

$$D^* = 1/G^2 + 2 \langle P^* \rangle (C_{\phi\phi} + C_{\theta\theta}) / (GH_0) + 3 \langle P^* \rangle^2 / H_0^2 (C_{\phi\phi} C_{\theta\theta} - C_{\theta\phi} C_{\phi\theta})$$

$$+ (4/3K) [(1/G) + \langle P^* \rangle / H_0] \times \{ (1/2)(C_{\phi\phi} + C_{\theta\theta}) - (1/2)(C_{\theta\phi} + C_{\phi\theta}) \}$$

$$C_{\phi\phi} = A(A_\phi/A)^2 - (3/2A^2) \{ (2A_\phi + A_\theta)(B_1 - 3A_\phi^2) + (2A_\theta + A_\phi)(B_2 - 3A_\phi A_\theta) \} (A_\phi/A) + (B_1 - 3A_\phi^2)/A$$

$$C_{\theta\theta} = A(A_\theta/A)^2 - (3/2A^2) \{ (2A_\theta + A_\phi)(B_2 - 3A_\theta A_\phi) + (2A_\phi + A_\theta)(B_3 - A_\theta^2) \} (A_\theta/A) + (B_2 - 3A_\theta A_\phi)/A$$

$$C_{\theta\phi} = A(A_\phi A_\theta / A^2) - (3/2A^2) \{ (2A_\phi + A_\theta)(B_1 - 3A_\phi^2) + (2A_\theta + A_\phi)(B_2 - 3A_\phi A_\theta) \} (A_\theta/A) + (B_2 - 3A_\theta A_\phi)/A$$

$$C_{\phi\theta} = A(A_\theta/A)^2 - (3/2A^2) \{ (2A_\theta + A_\phi)(B_2 - 3A_\theta A_\phi) + (2A_\phi + A_\theta)(B_3 - A_\theta^2) \} (A_\phi/A) + (B_3 - 3A_\theta^2)/A$$

$$A, A_\phi, A_\theta = (\text{既出})$$

$$B_1 = (6\sigma_\phi^2 + 3\bar{A}_2\sigma_\phi\sigma_\theta + \bar{A}_3\sigma_\theta^2)/2\bar{\sigma}^{*2}, B_2 = \{3\bar{A}_2(\sigma_\phi^2 + \sigma_\theta^2) + 4\bar{A}_3\sigma_\phi\sigma_\theta\}/2\bar{\sigma}^{*2}, B_3 = (6\sigma_\theta^2 + 3\bar{A}_2\sigma_\phi\sigma_\theta + \bar{A}_3\sigma_\phi^2)/2\bar{\sigma}^{*2}$$

$$E^* = 3E / \{ (1-2\nu) + (E/G^*) \}, \nu^* = \{ (E/G^*) - 2(1-2\nu) \} / 2 \{ (1-2\nu) + (E/G^*) \}$$

2.2 軸対称シェル要素 円筒座標 (r, θ, z) を用い、さらに図1に示す角度 ϕ を用いて、キルヒホフの仮定のもとで、板の中央面のひずみ増分 dE は次のように置かれる⁽¹⁴⁾。

$$\delta E = \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_{\phi\phi} \\ \delta \varepsilon_{\theta\theta} \\ \delta \kappa_{\phi\phi} \\ \delta \kappa_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d(\delta u_r)}{dr} + (\delta \phi) \tan \phi \\ \delta u_r / r \\ d(\delta \phi) / dl \\ \kappa_\phi (\delta \phi) \cot \phi \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 $u_r = r$ 方向変位、 $l =$ シェルに沿う局所座標、 $\kappa_\phi = \phi$ 方向曲率、 $\kappa_\theta =$ 円周方向曲率、そして添字 0 は板厚方向座標 $\eta = 0$ (中央面) での値であることを示す。一方、 dE に対応して、 θ 方向単位幅当たりの垂直力増分および曲げモーメント増分からなる次の増分ベクトルが、通常の応力増分に代わって用いられる。

図1 軸対称シェル要素と座標

$$\delta \Sigma = \begin{Bmatrix} \delta N_\phi \\ \delta N_\theta \\ \delta M_\phi \\ \delta M_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \int \sigma_\phi (1 + \kappa_\phi \eta) d\eta \\ \delta \int \sigma_\theta (1 + \kappa_\theta \eta) d\eta \\ \delta \int \sigma_\phi (1 + \kappa_\phi \eta) \eta d\eta \\ \delta \int \sigma_\theta (1 + \kappa_\theta \eta) \eta d\eta \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここに、積分 $\int$ は $\eta = -t/2$ から $t/2$ までとる。 t は考える時点・場所の板厚である。

曲率は $\eta = 0$ においてのみ定義されるが、 $\delta \varepsilon_\phi$ と $\delta \varepsilon_\theta$ は η の一次式であり、

$$\begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_\phi = \delta \varepsilon_{\phi 0} + \eta (\delta \kappa_{\phi 0} - \kappa_\phi \delta \varepsilon_{\phi 0}) \\ \delta \varepsilon_\theta = \delta \varepsilon_{\theta 0} + \eta (\delta \kappa_{\theta 0} - \kappa_\theta \delta \varepsilon_{\theta 0}) \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (28)$$

また、 $d\eta = (\exp \varepsilon_t) d\eta_0$, $\eta_0 =$ 変形前の板厚方向座標、 $\varepsilon_t =$ 板厚ひずみ、そして $\delta \varepsilon_t = (\delta \sigma_\phi + \delta \sigma_\theta) / K - (\delta \varepsilon_\phi + \delta \varepsilon_\theta)$ などの関係がある。これらと、構成式(24)を用いて、 δE と $\delta \Sigma$ を結びつける関係式が次のように求まる。

$$\delta \Sigma = D \delta E \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここに、係数行列 D は (4×4) であり、 $\sigma_\phi, \sigma_\theta, \kappa_\phi, \kappa_\theta$ などの関数の板厚方向の積分を含んでいる。また、一般に対称ではないことに注意する。弾性要素に対しては表現は簡単になる。

もし、構成式として式(22)を用いると、式(29)に代わって、

$$\delta \Sigma = D' \delta E - \delta \mu \quad \dots\dots\dots (30)$$

の形を得る。 $\delta \mu$ は σ_a と $\overline{\delta \varepsilon}$ も含む積分形である。

さて、本論文で採用したシェル有限要素は、各節点で変位のみならずこの配も連続ならしめる 3 次のアイソパラメトリック要素である。すなわち、一要素について、 $-1 \leq \xi \leq 1$ なるパラメータ ξ を用い、

$$\left. \begin{aligned} N'_i &= (1/4)(-\xi_i \xi^3 + 3\xi_i \xi + 2) \\ N''_i &= (1/4)(1 + \xi_i \xi)^2(1 - \xi_i \xi) \times (\pm 1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

を導入する。 $i=1,2$ であり、要素の両端(節点)を指す。 $\xi_1=-1, \xi_2=1$ ととり、複号は $i=1$ に対して+、 $i=2$ に対して-をとる。上式を用いて、1要素の変位増分分布を次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} \delta u_r &= \sum \{N'_i \delta u_{ri} + N''_i (d\delta u_r/d\xi)_i\} \\ \delta u_z &= \sum \{N'_i \delta u_{zi} + N''_i (d\delta u_z/d\xi)_i\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 Σ は $i=1,2$ にわたる和である。

式(32)を式(26)に適用して、結果として δE を節点変位増分ベクトル δ^e で表す次の形の式を得る。

$$\delta E^e = B \delta^e \quad \dots\dots\dots (33)$$

ここに、

$$\delta^e = \{ \delta u_{r1}, \delta u_{z1}, (\delta u_{r,l})_1, (\delta u_{z,l})_1, \delta u_{r2}, \delta u_{z2}, (\delta u_{r,l})_2, (\delta u_{z,l})_2 \}^T$$

であり、 $(,l)$ は l に関する偏微分、添字 1, 2 は節点を表す。肩符 e は一要素に関するものであることを示す。 B は (4×8) の行列であり、 ξ, r などの関数である。

2.3 シェル有限要素法の定式化 一要素に関する仮想仕事の原理、

$$\int \{ \sigma_\theta (1 + \chi_\theta \eta) \delta \varepsilon_\theta + \sigma_\phi (1 + \chi_\phi \eta) \delta \varepsilon_\phi \} dV^e = F^{eT} \delta^e \quad \dots\dots\dots (34)$$

から出発し、これの増分形に対して、前項までの諸式を導入する。 F^e は節点力ベクトル、複雑な計算ののち、次の形の要素剛性方程式を得る。

$$k^{e*} \delta^e = \delta f^{e*} + \delta p^e \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$k^{e*} = k' - (k_v + k_{vi})$$

$$k' = k_I + k_{II} + k_{III} + k_{IV}$$

$$k_I = \int B^T D B r l_\xi d\xi$$

$$k_{II} = \int B^T \Sigma U r l_\xi d\xi$$

$$k_{III} = \int \Sigma^T \beta r l_\xi d\xi$$

$$k_{IV} = \int B^T \Sigma b r l_\xi d\xi$$

$$k_v = (\text{荷重修正行列})$$

$$k_{vi} = (\text{静水圧修正行列})$$

$$\delta f^{e*} = (\text{節点力増分ベクトル})$$

$$\delta p^e = (\text{静水圧増分による節点力増分ベクトル})$$

$\dots\dots\dots (36)$

$$\left. \begin{aligned} r &= \sum \{N'_i r_i + N''_i (dr/d\xi)_i\} \\ z &= \sum \{N'_i z_i + N''_i (dz/d\xi)_i\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (37)$$

以上で、 $\int$ は $\xi=-1$ から 1 までの積分、 Σ は $i=1,2$ にわたる和、 $l_\xi = dl/d\xi = (r_\xi^2 + z_\xi^2)^{1/2}$ 、 $r_\xi = dr/d\xi$ 、 $z_\xi = dz/d\xi$ である。また $k_I \sim k_{IV}$ は初期応力行列に相当する。 δp と k_{vi} は、外力として静水圧 p が作用する場合にのみ存在し、 δp は δp に比例、 k_{vi} は p に比例する。さらに、式(36)において、 U, β, b は以下の意味をもつ。

$$\left. \begin{aligned} \delta u_r(l) &= U_r \delta^e \\ \delta B^T &= \beta \delta^e \\ \delta \varepsilon_\phi(l) &= b \delta^e \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

もし、構成式として式(22)を用いるなら、式(35)の代わりに、次の形の要素剛性方程式を得る。

$$k^{e*} \delta^e - \int_{-1}^1 B^T \delta \mu r l_\xi d\xi = \delta f^{e*} + \delta p^e \quad \dots\dots\dots (39)$$

これは δ^e の成分に関して非線形であり、ニュートンラプソン法などの繰返し法によって解かねばならない。以下では式(35)を用いる。

式(35)から全体剛性方程式ないし全体剛性行列を求める手順は、通常の有限要素法とかわらない。ただし、剛体工具を用いる成形を解析する場合は、工具に接触する節点には工具表面に沿って動くという条件、および摩擦条件を加味する。前の条件は、曲面工具に対しても線形化近似(ピースワイズ・リニアの意味で)する。後の条件に対してはクーロン摩擦則を適用する。こうして、未知節点変位増分ベクトル δ^* に関する全体剛性方程式が、次の形で導かれる。

$$K \delta^* = \delta F \quad \dots\dots\dots (40)$$

ここに、全体剛性行列 K は非対称であり、上式の解を求めるにはスカイライン法を用いた。

以上の諸式を用いて板材成形を数値解析するため、電子計算機用プログラムを新たに作った。使用した計算機は、岐阜大学情報処理センター付設の FACOM M-360 である。

3. 解析例と考察

3.1 円板の液圧バルジ成形の解析 手元にあった市販 AI-ギルド鋼板についておもに解析した。硬化特性は、スウィスト形の次式、

$$\bar{\sigma}^* = C(\bar{\varepsilon} + \varepsilon_0)^n \quad \dots\dots\dots (41)$$

を用いた。この鋼板に対して、 $C=483.5 \text{ MPa}$, $\epsilon_0=0.008125$, $n=0.232$ である。また、縦弾性係数 $E=196.2 \text{ GPa}$, ボアソン比 $\nu=0.29$, 初期降伏応力 $\sigma_0=$

161.9 MPa , $\bar{r}=1.56$, $\bar{X}=1.28$, $\rho=0.922$, 初期板厚 $t_0=0.83 \text{ mm}$ であり、いずれも実測値である。ただし、後続負荷面のとがり角 θ^* は 60° 以上に限定した。さらに、クランプ位置半径 29 mm , ダイプロファイル半径 8 mm , ダイス穴半径 21 mm とした。材料定数の影響をみるため、 n や $\bar{r}$, $\bar{X}$ を適宜かえた計算も行った。ポテンシャル理論 ($\rho=0$) によっても行った。

式(36)などに出てくる積分は、板厚方向については5点シンプソン法を、シェル要素に沿うき方向については3点ガウス法を用いて、数値積分した。これらは精度と計算時間のかね合いを考え、試行によって決めたものである。一段階の液圧増分 $\delta p=0.01962 \text{ MPa}$ ($=0.002 \text{ kgf/mm}^2$) としたが、これも同様である。

図2に変形形状の変遷図を示した。図中▽印はクランプ位置を示しており、またダイス面上では固着としている。いずれも中央面形状を示すが、端部付近を除き球面に近い。各段階の液圧 p は、 1.5692 MPa の1,

図2 液圧バルジ成形時の変形形状の変遷
(Al-キルド鋼板)

(a) 液圧側表面

(b) 外側表面

図3 変形初期における σ_r 分布の変遷
(Al-キルド鋼板; h =頂点部張出し高さ)

図4 変形中期における σ_r と ϵ_r の分布

2, 3, ..., 倍である (80 段階ごとの形状)。

図 3 に変形初期の σ_r 分布の複雑な変化の様子を示した。液圧側では、中心付近ではじめ曲げの影響で圧縮となっており、変形の進行とともに全域で引張りに変わってゆく。一方、外側表面では中心付近で一貫して引張りであるが、クランプ部付近では曲げの影響で圧縮であり、変形後期まで継続する。図 4 に、変形中期における σ_r と ε_t の分布を示した。この図より、張出し高さが 10 mm を越える段階では、クランプ部近傍を除いて、ほとんど膜応力・ひずみ状態となることがわかる。ちなみに、膜理論によれば、頂点での応力 $\sigma_p = \sigma_r = \rho^* p / 2t$, $\rho^* =$ 頂点部曲率半径, であるが、中央面の中心で、図 4 より $\sigma_p = 49.0 \times 9.81$ MPa, $p = 2.0 \times 9.81$ MPa, また他のデータから $\varepsilon_t = -0.23$, $t = t_0 \exp(\varepsilon_t) = 0.66$ と読み、 $\rho^* = 32$ mm と出る。図 2 から読める ρ^* も同値であり、ここでの計算方式の確かさの傍証といえる。

表 1 に、各種条件と計算時間をまとめた。以上の数値例は、この表の No. 2 の条件によるものである。節

点数を 30 から 100 に増すと、計算時間は 4 倍となるが、精度の面で大差はない。また、4 倍精度計算をしても、計算時間が 6.41 倍となり、結果に大差を生じない。この表に示すとおり、初期板厚 $t_0 = 0.3$ mm の場合も計算した。その結果は、 $t_0 = 0.83$ mm に比して、よりいっそうはやく膜理論的挙動となることが確かめられた。そのほか、除荷によるスプリング・バックや残留応力分布も一例求めたが、ここには割愛した。

さて、図 5 (a)~(d) に同一張出し高さでの $n, \bar{\varepsilon}, \bar{r}$ およびとがり点硬化の効果を、板厚ひずみ ε_t の分布を通して示した。図 (a) は、 n が小さいほど中心にひずみが集中しやすいことを示している。図 (b) は、 $\bar{\varepsilon}$ が大きいほどひずみが集中する傾向を抑えることを示している。図 (c) は、 $\bar{r}$ 値の影響が大きいことを示している。図 (d) は、後続負荷面のとがり、ややひずみ集中を促進することを示している。とがりの効果は、さらに変形が進んで破壊が問題になってくると、いっそう顕著となる。

図 6 は、張出し高さと液圧 p の関係を示す。図中

表 1 各種計算条件と計算時間

	C.E.	t_0 mm	No. N.P.	n	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{r}$	Ac	CPU
No. 1	MG	0.83	100	0.232	1.56	1.28	DP	5.61
No. 2	MG	0.83	30	0.232	1.56	1.28	DP	1.36
No. 3	MG	0.83	30	0.232	1.56	1.28	QP	8.75
No. 4	MG	0.83	30	0.1	1.56	1.28	DP	1.33
No. 5	MG	0.83	30	0.232	0.7	1.28	DP	1.34
No. 6	MG	0.83	30	0.232	1.56	1.0	DP	1.35
No. 7	MG	0.3	100	0.232	1.56	1.28	DP	4.80
No. 8	MG	0.3	30	0.232	1.56	1.28	DP	1.31
No. 9	PO	0.83	30	0.232	1.56	1.28	DP	1.36

C.E.=構成式, N.P.=節点, Ac=精度, CPU=時間/ステップ,
PO=ポテンシャル, DP=倍精度, QP=4 倍精度

図 5 各種因子の板厚ひずみ分布に及ぼす影響

図 6 液圧と張出し高さの関係

NOMAL は、表 1 の No. 2 の条件を示している。この図より、 n が小さいと速く液圧は上昇すること、とがりの効果は液圧を速く最大値へ導くこと、 $\bar{F}$ の影響は小さいこと、 $\bar{X}$ が小さいと液圧は低いこと、および板厚はほぼ比例的に液圧を高めること、などがわかる。

3.2 球頭ポンチによる張出しの解析 表 1 の No. 2 の条件で、半径 20 mm の球頭ポンチによる張出しを解析した。ダイス形状は前項に同じ。また、摩擦係数 $\mu=0.1$ とした。

図 7 に変形形状を示した。図中、▼印はポンチと板材の接触開始点を示す。降伏の開始は、液圧バルジではクランプ位置の液圧側から、球頭張出しでは中心の表面からであった。図 8 に、 σ_θ 分布の変遷を示した。ただし、ポンチ側表面で、逆の表面ではかなり違った分布となる。この図に見るように、応力分布の変動が激しく、一段階ごとの増分は十分小さくとらねばならない ($\Delta h \leq 0.01$ mm)。とはいえ、中心部ではじめ圧縮状態で、ポンチにより張出された部分から徐々に引張状態の範囲が広がってゆく様子が読取れる。

4. 結 言

軸対称板材成形の数値解析を、従来以上に多くの情報を得られる形で行えるようにする目的で、シェル理

図 7 球頭ポンチ張出しの変形形状の変遷

図 8 球頭ポンチ張出しにおける σ_θ 分布 (ポンチ側)

論に基づき、後藤のとがり点硬化塑性構成式および四次異方性降伏関数を組込んで、節点で変位およびこう配を連続ならしめるアイソパラメトリック要素を用いた弾塑性有限要素法の定式化を提示した。さらに、プログラムを新たに創り、おもに液圧張出し成形の数値計算例をいくつか示した。変形初期の応力分布の複雑な変化、ひずみ分布に及ぼす $n, \bar{F}, \bar{X}$ などの影響およびとがりの効果、液圧対張出し高さの関係、などについて議論できた。球頭ポンチ張出しの解析例も若干示し、今後の発展への見通しを与えた。

文 献

- (1) 山田, 生産研究, 11-5 (昭 36), 240.
- (2) Woo, D. M., *J. Mech. Eng. Sci.*, 6-2 (1964), 116.
- (3) 横内, 塑性と加工, 14-153 (昭 48), 779.
- (4) 永井, 塑性と加工, 22-248 (昭 56), 912.
- (5) 仲町, Sowerby, R., 機論, 50-453, A (昭 59), 1069.

- (6) 後藤, 塑性と加工, 19-208 (昭53), 377.
- (7) 後藤, 塑性と加工, 19-210 (昭53), 598.
- (8) 後藤, 機論, 47-424, A (昭56), 1389.
- (9) 後藤, 機論, 47-428, A (昭57), 493.
- (10) Gotoh, M., *Eng. Fract. Mech.*, 21-4 (1985), 673.
- (11) Hill, R., *Mathematical Theory of Plasticity*, (1950), 317, Oxford.
- (12) Gotoh, M., *Int. J. Solid Struct.*, 21-11 (1985), 1117.
- (13) 例えば, Cordts, D. and Kollmann, F. G., *Int. J. Num. Meth. Eng.* 23-4 (1986), 533.
- (14) 山田, 粘性・塑性, (昭47), 53, 培風館.

討 論

〔質問〕 仲 町 英 治〔八代工業高等専門学校〕

(1) 板厚変化を考慮した非線形殻体モデルに関する質問.

(a) 大たわみ域までの解の妥当性を他の多くの弾塑性解析結果と比較して示す必要があると考える. 例えば Popov の解(付1)との液圧張出しの場合との比較がある.

(b) ひずみ増分式(28)および増分形の仮想仕事の原理式(34)において板厚変化率 $\delta\eta$ を考慮しないことは増分計算中にひずみの局所化の影響が大きい境界部分およびポンチ接触部で収束解の妥当性に大きく影響すると考えるがどうか.

(c) 図4の応力 σ_p の外表面での値が $R=23\text{ mm}$ 付近で極端に変動しているが, その理由はなにか.

(d) 球頭ポンチの結果を質問者らの板厚方向ひずみの解析結果(付2)と比較していただきたい.

(2) 材料モデルによる相違が大きく現れるのは境界およびポンチ接触部と思われるが, そこでの板厚方向ひずみ分布を比較して示して欲しい. また J_2-F および J_2-D 材料モデルとの相違点はどこにあると考えるか.

(3) 摩擦条件によるひずみ分布の相違を示して欲しい.

〔回答〕 (1)(a)本論文では, 液圧張出しの数値例として, 後々のプレス成形の解析への発展の便宜を考えて, 本文および図2で示した工具形状に対して行っている. すなわち, ダイス肩半径が8 mm と大きい. したがって, 既存の数値例との比較は困難である. その代わり, 本文(2441ページ左欄)に述べたように, 膜理論との簡単な比較を行っている.

(b) η は現時点の板厚方向の座標値であって板厚そのものではない. ご質問の $d\eta$ の意味が不明である. [式(27)中の $d\eta$, および式(28)の直下の $d\eta$ は, 積分変

数としての η に由来するものである].

(c) 本文2440ページ右欄に述べてあるように, ダイス面上は固着しているので, こうなったものと思われる.

(d) ご指摘の文献(付2)と異なり, 本論文では球頭ポンチ張出しの計算例は, ポンチストロークの小さい範囲にとどまっているので, あまり比較の意味がない. しかし, その範囲では似た分布となっており, より顕著な応力分布の変遷のほうを図8として示した.

(2) 上述のように, ひずみ分布に顕著な差違が生ずるほど変形が進んだ段階まで計算していないので, あまり比較の意味がない. ポンチ張出しについては, 新たに作成したプログラムによる計算の可能性をチェックした程度にとどまっている.

後藤の構成式は, J_2-F と違って二軸引張場でのひずみ集中現象が記述でき, その点は J_2-D と同じであるが, 係数 ρ [式(6)]の適切な選択により, その集中現象をよりいっそう現実に近い点と, 弾塑性判別(本文式(21))が明確である点が J_2-D と異なる, と考えている. また, 四次異方性降伏関数の導入により, 従来のように $\bar{\sigma}$ の影響だけでなく, $\bar{\epsilon}$ の影響も見ることができ, 両者を結合するプロセスは必ずしも自明ではなく, かなり複雑となるので, そのあたりの明示を本論文の主眼の一つとした.

(3) 本報では $\mu=0.1$ の場合しか扱っていないが, ご示唆のように μ によりひずみ分布などがかなり変わるので, 今後の展開の一つの方向と考えている.

数値解析技法上からは, 摩擦条件や接触条件の処理など, 明示すべき点は多々あるが, 元の式展開はA4レポート用紙200枚を越える長大なもので, ここにはとても意を尽せない点をご推察願いたい.

(付1) Popov, E. P., ほか2名, *Int. J. Solids Struct.*, 3 (1967).

(付2) 仲町, Sowerby, R., *Proc. 1st ICTP*, 1 (1984), 666.