有限変形を受ける弾性体の応力-ひずみ関係式*

渡 部

修*¹

The Stress-Strain Relations of Elasticity under Finite Deformations

Osamu WATANABE

The conventional rate type constitutive equations of elasticity are critically examined. By introducing finite strains in the dual coordinate system for Green-Lagrange, Almansi-Euler and Stören-Rice strain tensors, the relations among these strains and their rates are clarified. From the viewpoint of rational mechanics, the admissible forms of the general constitutive equations are obtained, and their rate forms are compared with the conventional rate equations. It is concluded that Green-Naghdi stress rate should be used in the rate type constitutive equation, while Jaumann stress rate should be used in the Updated Lagrangian formulations.

Key Words: Elasticity, Finite Deformation, Finite Strain, Constitutive Equation, Rational Mechanics, Principle of Frame Indifference

1. 緒 言

増分法に基づく有限要素法により、構造物の有限変形解析は今日では日常のものとなった。弾性体に対する応力-ひずみ関係式は、亜弾性体(Hypoelasticity)⁽¹⁾⁽²⁾の類形として次のような速度形を仮定している。

$$\dot{T} = 2\mu_0 D + \lambda_0 (\text{tr } D) I$$

ここで、 T は Cauchy の真応力であり、記号「 $\circ$ 」は座標系不依存の原理 (principle of frame indifference) を満足する客観的応力速度を表す。 D はストレッチングテンソル、 I は単位テンソル、 μ_0 と λ_0 は Lamé の定数を表す。通常用いられている応力速度には Jaumann 速度⁽³⁾⁽⁴⁾、Green-Naghdi 速度⁽⁵⁾、Oldroyd 速度⁽⁶⁾、Cotter-Rivlin 速度⁽⁷⁾等がある。後者の二つについては、Sedov⁽⁸⁾が埋込み座標を用いたときの反変および共変応力テンソル成分の速度であることを示した。しかし、応力不変量の停留性の要請⁽⁹⁾を満足する Jaumann 速度が、有限変形解析に広く用いられている。

これに対し、Dienes⁽⁹⁾は大変形解析には Jaumann

速度よりも Green-Naghdi 速度を用いることを提案し、Stören-Rice⁽¹⁰⁾は非回転ひずみに対応する応力速度として Green-Naghdi 速度の有用性を示した。また、1982 年 Nagtegaal と de Jong⁽¹¹⁾は Jaumann 速度を用いると、単純せん断を受ける線形移動硬化形塑性体の応力-ひずみ関係に通常では予測されない「振動」が生ずることを示した。このため、Lee⁽¹²⁾と Dafalias⁽¹³⁾は、後藤が指摘しているように⁽¹⁴⁾、「振動」は塑性の移動硬化則に固有の問題として、背応力のスピンを従来の Jaumann 速度のスピンの W とは異なるものを提案することにより「振動」を回避した。Atluri⁽¹⁵⁾は亜弾性体の構成方程式に Wang の表示定理を用いると、各種の応力速度はその特別な場合として誘導できることを示し、どの速度を用いるかは実験との比較によることを示した。また後藤⁽¹⁴⁾は弾性体においても Jaumann 速度は「振動」を示すことから、線形体の構成方程式を基礎に、客観的応力速度を得るのに必要なスピンは用いる各種ひずみの主軸のそれであることを提案した。

以上のように、弾性体の速度形構成方程式は基礎的な問題であるにもかかわらず、多くの議論があり問題点も十分解明されているとは言いがたい。本論文では有理力学 (rational mechanics)⁽¹⁾⁽²⁾に基づき、弾性体の速度形構成方程式について検討する。有限変形理論

* 昭和 62 年 8 月 20 日 第 65 期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和 61 年 11 月 26 日。

*¹ 正員、筑波大学構造工学系 (〒305 茨城県新治郡桜村天王台 1-1-1)。

で用いられている各種のひずみと応力の関係を有理力学で許容されている形で求め、得られた構成方程式を基礎に速度形のそれを導く。これにより、Jaumann, Green-Naghdi, Oldroyd, Cotter-Rivlin の各種応力速度を用いた構成方程式間の関係を明らかにし、用いるべき応力-ひずみ関係式を提案する。

2. 座標系と変形

ベクトル・テンソルの記法には dyad を用いる⁽²⁾。基底ベクトルを $\mathbf{g}_i$ とすると、2 階のテンソルは $\mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j$ 、ベクトルは $\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i$ となる。また、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^{ij} B^{kl} g_{kj} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_l$ 、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = A^{ij} v^k g_{jk} \mathbf{g}_i$ 、 $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A^{ij} B^{kl} g_{ik} g_{jl}$ 、 $\text{tr } \mathbf{A} = A : \mathbf{I} = A^{ij} g_{ij}$ 、 $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ である。

2.1 空間固定座標系 固体の変形を記述するため、空間固定の三次元曲線座標系を設定する。座標軸を $\xi^i (i=1, 2, 3)$ 、基底ベクトルを $\mathbf{g}_i$ とする主要座標系 (primary coordinate system) と、座標軸を ξ_i 、基底ベクトルを $\mathbf{g}^i$ とする第 2 の座標系 (dual coordinate system) の 2 組を用いる。基底ベクトル $\mathbf{g}_i$ と $\mathbf{g}^i$ は次のように直交する。

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta^j_i \quad (1)$$

ここで δ^j_i は Kronecker デルタである。変形前の固体“b”中の線素 pq (ベクトル $d\mathbf{r}$) は、変形後の固体“B”中の線素 PQ (ベクトル $d\mathbf{R}$) になったと仮定する。 $d\mathbf{r}$ は主要座標系を用いて表すと、

$$d\mathbf{r} = d\xi^i \mathbf{g}_i \quad (2)$$

また、第 2 の座標系を用いて表すと、

$$d\mathbf{r}^* = d\xi_i \mathbf{g}^i \quad (3)$$

$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}^*$ であるが、第 2 の座標系で表示していることを示すため記号「*」を用いることにする。

変形後の座標系は曲線座標系を用いるため、位置により基底ベクトルが変化する。新たな曲線座標系を用い、主要座標系に対し座標軸を $\eta^i (i=1, 2, 3)$ 、基底ベクトルを $\mathbf{G}_i$ とする。第 2 の座標系に対し、座標軸を η_i 、基底ベクトルを $\mathbf{G}^i$ とする。したがって、変形後の $d\mathbf{R}$ は次のように表示できる。

$$d\mathbf{R} = d\eta^i \mathbf{G}_i \quad (4\cdot a)$$

$$d\mathbf{R}^* = d\eta_i \mathbf{G}^i \quad (4\cdot b)$$

このとき、 $d\mathbf{R} = d\mathbf{R}^*$ であり、基底ベクトル $\mathbf{G}_i$ と $\mathbf{G}^i$ は次のように直交する。

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta^j_i \quad (5)$$

2.2 埋込み座標系 変形の物理的意味を明確にするため、埋込み座標系は有用である⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾。埋込み座標系では、変形前の線素 $d\mathbf{r}$ の座標値は変わらずに基底ベクトルが固体の変形とともに変化する。変形前の座標系として、変形前の空間固定座標系に一致するも

のを選ぶ。すなわち

$$d\mathbf{r} = d\xi^i \mathbf{g}_i \quad (6\cdot a)$$

$$d\mathbf{r}^* = d\xi_i \mathbf{g}^i \quad (6\cdot b)$$

空間固定座標系に対する指標は小文字のアルファベットを用いるが、埋込み座標系に対する指標は大文字のそれを用いることにする。式(6)において $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}^*$ 。

変形後の線素 $d\mathbf{R}$ に対して、基底ベクトル $\mathbf{g}_i$ が $\mathbf{G}_i$ に変化したとすると、

$$d\mathbf{R} = d\xi^i \mathbf{G}_i \quad (7)$$

式(2)、(3)、(6·a)、(6·b)において、 $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i$ 、 $\mathbf{g}^i = \mathbf{g}^i$ であるが式(4·a)、(7)においては $\mathbf{G}_i \neq \mathbf{G}_i$ である。次の関係式を満足するベクトル $\mathbf{G}^i$ を導入する。

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta^j_i \quad (8)$$

第 2 の座標系に対する $d\mathbf{R}^*$ については次節で考察する。

2.3 変形に対する関係 変形こう配テンソル $\mathbf{F}$ は主要座標系に対して次のように定義できる⁽¹⁸⁾。

$$d\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}^t \quad (9)$$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^{-t} \quad (10)$$

ここで記号「 t 」と「 -1 」は転置と逆変換を表す。また $\mathbf{F}^{-t} \equiv (\mathbf{F}^{-1})^t$ である。式(2)、(4·a)、(6·a)、(7)を用いると、主要座標系に対して次の関係式が成立する。

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j} \mathbf{G}_i \mathbf{g}^j = \mathbf{G}_i \mathbf{g}^i \quad (11\cdot a)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^i} \mathbf{g}_j \mathbf{G}^i = \mathbf{g}_j \mathbf{G}^j \quad (11\cdot b)$$

$$\mathbf{F}^t = \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j} \mathbf{g}^j \mathbf{G}_i = \mathbf{g}^j \mathbf{G}_i \quad (11\cdot c)$$

$$\mathbf{F}^{-t} = \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^i} \mathbf{G}^i \mathbf{g}_j = \mathbf{G}^i \mathbf{g}_i \quad (11\cdot d)$$

同様に、第 2 の座標系に対して次式が成立する。

$$d\mathbf{R}^* = \mathbf{F}^* \cdot d\mathbf{r}^* = d\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{F}^{*t} \quad (12)$$

$$d\mathbf{r}^* = \mathbf{F}^{*-1} \cdot d\mathbf{R}^* = d\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{F}^{*-t} \quad (13)$$

ここで、空間固定座標系に対して

$$\mathbf{F}^* = \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j} \mathbf{G}^i \mathbf{g}_j \quad (14\cdot a)$$

$$\mathbf{F}^{*-1} = \frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_i} \mathbf{g}^j \mathbf{G}_i \quad (14\cdot b)$$

$$\mathbf{F}^{*t} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j} \mathbf{g}_j \mathbf{G}^i \quad (14\cdot c)$$

$$\mathbf{F}^{*-t} = \frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_i} \mathbf{G}_i \mathbf{g}^j \quad (14\cdot d)$$

空間固定座標系の共変および反変座標成分には⁽¹⁷⁾、

$$d\eta_i = \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^i} d\xi_j \quad (15)$$

なる関係式があることから、式(11·d)と(14·a)を比

較し

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^{-t} \quad \dots\dots\dots (16)$$

であることがわかる。

埋込み座標系での第2の座標軸を用いたとき、変形後の線素を $d\mathbf{R}^* = d\xi_i \mathbf{X}^i$ と置くと、式(6・b), (12)から、

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{X}^i \mathbf{g}_i \quad \dots\dots\dots (17)$$

式(16)に基づき、式(11・d)と(17)を比較すると、

$$\mathbf{X}^i = \mathbf{G}^i \quad \dots\dots\dots (18)$$

であることがわかる。したがって、埋込み座標系の基底ベクトルに対して、次の関係式が成立する。

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_i = \mathbf{G}_i \quad \dots\dots\dots (19\cdot a)$$

$$\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{g}^i = \mathbf{F}^{-t} \cdot \mathbf{g}^i = \mathbf{G}^i \quad \dots\dots\dots (19\cdot b)$$

式(19・b)については、村上・大野により別の方法で導かれている⁽¹⁸⁾。

$\mathbf{F}$ は1対1の非特異テンソルであるから、次のような2とおりの極分解を得る⁽¹⁾⁽²⁾。

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 $\mathbf{U}$ は対称の右ストレッチテンソル、 $\mathbf{V}$ は対称の左ストレッチテンソル、 $\mathbf{R}$ は剛体回転を表す直交テンソルである。

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^t, \mathbf{V} = \mathbf{V}^t, \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^t = \mathbf{I} \quad \dots\dots\dots (21)$$

第2の座標系に対する $\mathbf{F}^*$ も、同様に極分解すると、

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{U}^* = \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{R}^* \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(20)を式(16)に代入し、式(22)と比較すると、

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}, \mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{-1}, \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \quad \dots\dots\dots (23)$$

であることがわかる。

2.4 変形速度 主要座標系を用いて、変形後の点Pにおける変形速度を $\mathbf{v}$ 、点Qにおける変形速度増分を $d\mathbf{v}$ とすると、変形速度こう配テンソル $\mathbf{L}$ を用いて⁽²⁾

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{R} = d\mathbf{R} \cdot \mathbf{L}^t \quad \dots\dots\dots (24)$$

$\mathbf{L}$ は $\mathbf{F}$ を用いると、式(9), (20)から⁽²⁾

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^t \quad \dots\dots (25)$$

ここで記号「 $\dot{}$ 」は物質微分 ($\equiv D/Dt$) を表す。 $\mathbf{L}$ を対称成分のストレッチングテンソル $\mathbf{D}$ と、反対称成分のスピントレンソル $\mathbf{W}$ に分解すると⁽²⁾、

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^t), \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^t) \quad \dots\dots\dots (26)$$

式(25)を式(26)に代入すると⁽²⁾、

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{R}^t \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\mathbf{W} = \Omega + \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{R}^t \quad \dots\dots (28)$$

ここで、

$$\Omega \equiv \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t = -\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^t \quad \dots\dots\dots (29)$$

同様にして、第2の座標系を用いると、次の関係式を得る。

$$\mathbf{L}^* = \dot{\mathbf{F}}^* \cdot \mathbf{F}^{*-1} = -\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t - \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^t \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\mathbf{D}^* = -\frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{R}^t = -\mathbf{D} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\mathbf{W}^* = \Omega - \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R}^t = \mathbf{W} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここで、 $(\mathbf{U}^{-1})^{\cdot} = -\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}$ を用いている。なお、後の式の誘導のため、次式は便利である。

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}, (\mathbf{F}^t)^{\cdot} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{L}^t$$

$$(\mathbf{F}^{-1})^{\cdot} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{L}, (\mathbf{F}^{-t})^{\cdot} = -\mathbf{L}^t \cdot \mathbf{F}^{-t} \quad \dots\dots (33)$$

3. 各種ひずみとその速度

有限変形におけるひずみには、Green-Lagrange ひずみ $\mathbf{E}$ 、Almansi-Euler ひずみ $\mathbf{e}$ 、Hencky の対数ひずみ $\mathbf{E}_H$ および Stören-Rice の非回転ひずみ $\mathbf{E}_R$ がある。順次説明する。

3.1 Green-Lagrange のひずみテンソル $\mathbf{E}$

変形前の線素 $d\mathbf{r}$ に対し、次のように定義される⁽²⁾。

$$|d\mathbf{R}|^2 - |d\mathbf{r}|^2 = 2d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad \dots\dots\dots (34)$$

式(9)を用いると

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \dots\dots\dots (35)$$

ここで、 $\mathbf{C}$ は右 Cauchy-Green 変形テンソルで、

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad \dots\dots\dots (36)$$

の関係が知られている。

第2の座標系についても、同様に次のようにひずみテンソル $\mathbf{E}^*$ を定義することができる。

$$|d\mathbf{R}^*|^2 - |d\mathbf{r}^*|^2 = 2d\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{r}^* \quad \dots\dots\dots (37)$$

式(12), (16)を用いると、

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^* - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{I}) \quad \dots\dots\dots (38)$$

$\mathbf{E}$ と $\mathbf{E}^*$ の成分表示は次のようになる。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_j} - g_{ij} \right) \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j = \frac{1}{2} (G_{ij} - g_{ij}) \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j \quad \dots\dots\dots (39\cdot a)$$

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_j} - g^{ij} \right) \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = \frac{1}{2} (G^{ij} - g^{ij}) \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \quad \dots\dots\dots (39\cdot b)$$

ここで、 $\mathbf{I} = g_{ij} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j = g^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = g_{ij} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j = g^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j$ を用いている。式(35), (38)から $\mathbf{E}$ と $\mathbf{E}^*$ の関係は、

$$-\mathbf{E}^* = \frac{1}{2} \{ \mathbf{I} - (\mathbf{I} + 2\mathbf{E})^{-1} \} \quad \dots\dots\dots (40)$$

となり、 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{E}^*$ が微少のとき $-\mathbf{E}^* = \mathbf{E}$ となる。

E と E^* の速度は式(35), (38)を微分して,

$$\dot{E} = \frac{1}{2} \{ (\dot{F}^t) \cdot F + F^t \cdot \dot{F} \} \quad (41 \cdot a)$$

$$\dot{E}^* = \frac{1}{2} \{ (\dot{F}^{-t}) \cdot F^{-t} + F^{-t} \cdot (\dot{F}^{-t}) \} \quad (41 \cdot b)$$

式(33)を式(41)に代入し, 式(26)を用いると,

$$\dot{E} = F^t \cdot D \cdot F = \frac{1}{2} (\dot{U} \cdot U + U \cdot \dot{U}) \quad (42 \cdot a)$$

$$-\dot{E}^* = F^{-t} \cdot D \cdot F^{-t} \\ = \frac{1}{2} U^{-1} \cdot (\dot{U} \cdot V^{-1} + U^{-1} \cdot \dot{U}) \cdot U^{-1} \quad (42 \cdot b)$$

埋込み座標系に対して, 式(39)から

$$\dot{E} = \frac{1}{2} \dot{G}_{ij} g^i g^j, \quad \dot{E}^* = \frac{1}{2} \dot{G}^{ij} g_i g_j \quad (43)$$

であることから, 式(43)を式(42)に代入し式(19)から

$$D = F^{-1} \cdot \dot{E} \cdot F^{-1} = \frac{1}{2} \dot{G}_{ij} G^i G^j \quad (44 \cdot a)$$

$$D = F \cdot (-\dot{E}^*) \cdot F^t = -\frac{1}{2} \dot{G}^{ij} G_i G_j \quad (44 \cdot b)$$

主要座標系に対する $E, \dot{E}$ の表式は周知である⁽¹⁸⁾.

3.2 Almansi-Euler のひずみテンソル e 変形後の線素 dR に対して定義される⁽²⁾.

$$|dR|^2 - |dr|^2 = 2dR \cdot e \cdot dR \quad (45)$$

式(9)を用いると

$$e = \frac{1}{2} (I - B^{-1}) \quad (46)$$

ここで, B は左 Cauchy-Green 変形テンソルで,

$$B = F \cdot F^t = V^2 \quad (47)$$

の関係が知られている⁽²⁾.

第2の座標系に対しても, 同様に次のようにひずみテンソル e^* を定義することができる.

$$|dR^*|^2 - |dr^*|^2 = 2dR^* \cdot e^* \cdot dR^* \quad (48)$$

式(16), (47)を用いると,

$$e^* = \frac{1}{2} (I - B^{*-1}) = \frac{1}{2} (I - B) \quad (49)$$

e と e^* の成分表示は次のようになる.

$$e = \frac{1}{2} \left(G_{ij} - \frac{\partial \xi_k}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi_k}{\partial \eta^j} \right) G^i G^j = \frac{1}{2} (G_{ij} - g_{ij}) G^i G^j \quad (50 \cdot a)$$

$$e^* = \frac{1}{2} \left(G^{ij} - \frac{\partial \xi_k}{\partial \eta_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial \eta_j} \right) G_i G_j = \frac{1}{2} (G^{ij} - g^{ij}) G_i G_j \quad (50 \cdot b)$$

ここで $I = G_{ij} G^i G^j = G^{ij} G_i G_j = G_{ij} G^i G^j = G^{ij} G_i G_j$ を用いている. 式(46), (49)から, e と e^* の関係は

$$-e^* = \frac{1}{2} \{ -I + (I - 2e)^{-1} \} \quad (51)$$

となり, e と e^* が微小のとき $-e^* = e$ である.

e と e^* の速度は式(46), (49)を微分して,

$$\dot{e} = -\frac{1}{2} \{ (\dot{F}^{-t}) \cdot F^{-1} + F^{-t} \cdot (\dot{F}^{-t}) \} \quad (52 \cdot a)$$

$$\dot{e}^* = -\frac{1}{2} \{ \dot{F} \cdot F^t + F \cdot (\dot{F}^t) \} \quad (52 \cdot b)$$

式(33)を式(52)に代入し, 式(46), (49)を用いると,

$$\dot{e} = D - L^t \cdot e - e \cdot L_1 \\ = \frac{1}{2} V^{-1} \cdot (\dot{V} \cdot V^{-1} + V^{-1} \cdot \dot{V}) \cdot V^{-1} \quad (53 \cdot a)$$

$$-\dot{e}^* = D + L \cdot e^* + e^* \cdot L^t = \frac{1}{2} (\dot{V} \cdot V + V \cdot \dot{V}) \quad (53 \cdot b)$$

以上のことから変形前後の線素の長さを基準とするひずみには, F の2とおりの極分解と二つの座標系により E, E^*, e, e^* の合計4とおりのことがわかる. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} E &= h(U), E^* = h(U^{-1}) \\ e &= -h(V^{-1}), e^* = -h(V) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

ここで, 応答関数 h は次式で与えられる.

$$h(A) = \frac{1}{2} (A^2 - I) \quad (55)$$

$h(A)$ は等方関数であるとき⁽¹⁾⁽²⁾, 任意の回転 Q に対し,

$$Q \cdot h(A) \cdot Q^t = h(Q \cdot A \cdot Q^t) \quad (56)$$

であるから, $A = U, Q = R$ とすると, 式(54), (56)から

$$R \cdot E \cdot R^t = -e^* \quad (57 \cdot a)$$

$$R \cdot (-E^*) \cdot R^t = e \quad (57 \cdot b)$$

式(54)の速度に対しても, 式(42), (53)から

$$\left. \begin{aligned} \dot{E} &= \tilde{h}(U), \dot{E}^* = \tilde{h}(U^{-1}) \\ \dot{e} &= -\tilde{h}(V^{-1}), \dot{e}^* = -\tilde{h}(V) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

ここで, 応答関数 $\tilde{h}$ は次式で与えられる.

$$\tilde{h}(A) = \frac{1}{2} (\dot{A} \cdot A + A \cdot \dot{A}) \quad (59)$$

3.3 Hencky の対数ひずみテンソル E_H 対数ひずみテンソルは次式で与えられている⁽¹⁹⁾.

$$E_H = \frac{1}{2} \ln C = \ln U \quad (60)$$

ここで, $\ln$ は自然対数を表す. 式(54)に基づくと他の座標系と極分解に対し, 式(60)から

$$E_H^* = -\ln U \quad (61 \cdot a)$$

$$e_H = \ln V \quad (61 \cdot b)$$

$$e_H^* = -\ln V \quad (61 \cdot c)$$

対数ひずみは単軸の場合は真ひずみを与えるが, 一般の三次元の固体のひずみには適当でないとされている⁽¹⁹⁾. しかし, 最近 Gurtin-Spear⁽²⁰⁾ は, ストレッチングテンソル D との間に次の関係があることを示した.

$$D = (\ln V)^\circ - \frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Omega}_L \cdot \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-t} \cdot \boldsymbol{\Omega}_L \cdot \mathbf{F}^t) \quad \dots\dots\dots (62 \cdot a)$$

$$D = \mathbf{R} \cdot (\ln U)^\circ \cdot \mathbf{R}^t - \frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Omega}_L \cdot \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-t} \cdot \boldsymbol{\Omega}_L \cdot \mathbf{F}^t) \quad \dots\dots\dots (62 \cdot b)$$

ここで, $(\ln V)^\circ, (\ln U)^\circ, \boldsymbol{\Omega}_L$ は次のように定義される。まず, $\mathbf{V}, \mathbf{U}$ を直交テンソル $\mathbf{R}_E, \mathbf{R}_L$ を用いて, 次のように対角テンソル $\boldsymbol{\Lambda}$ に変換する。

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{R}_L^t \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}_L = \mathbf{R}_E^t \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}_E \quad \dots\dots\dots (63 \cdot a)$$

このとき, $(\ln V)^\circ$ と $(\ln U)^\circ$ は

$$(\ln V)^\circ \equiv (\ln V)' - \boldsymbol{\Omega}_E \cdot (\ln V) + (\ln V) \cdot \boldsymbol{\Omega}_E \quad \dots\dots\dots (63 \cdot b)$$

$$(\ln U)^\circ \equiv (\ln U)' - \boldsymbol{\Omega}_L \cdot (\ln U) + (\ln U) \cdot \boldsymbol{\Omega}_L \quad \dots\dots\dots (63 \cdot c)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_E \equiv \dot{\mathbf{R}}_E \cdot \mathbf{R}_E^t \quad \dots\dots\dots (63 \cdot d)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_L \equiv \dot{\mathbf{R}}_L \cdot \mathbf{R}_L^t \quad \dots\dots\dots (63 \cdot e)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_E - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Omega}_L \cdot \mathbf{R}^t \quad \dots\dots\dots (63 \cdot f)$$

以上のように, 一般に $(\ln V)', (\ln U)'$ と $\mathbf{D}$ との関係は複雑であるが, 左ストレッチテンソル $\mathbf{U}$ の主軸が変化しないとき, すなわち $\dot{\mathbf{R}}_L = 0$ のとき, 次のように簡単化できる。

$$\mathbf{D} = (\ln V)' - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\ln V) + (\ln V) \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad \dots\dots\dots (64 \cdot a)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} \cdot (\ln U)' \cdot \mathbf{R}^t \quad \dots\dots\dots (64 \cdot b)$$

3・4 Stören-Rice の非回転ひずみ $\mathbf{E}_R$ 今までこのひずみと異なり, この場合はまずひずみ速度が次のように与えられている⁽¹⁰⁾。

$$\dot{\mathbf{E}}_R = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \quad \dots\dots\dots (65)$$

全ひずみ $\mathbf{E}_R$ は式(65)を積分して得られる。

$$\mathbf{E}_R \equiv \int_0^t \dot{\mathbf{E}}_R dt = \int_0^t \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}) dt \quad \dots\dots\dots (66)$$

ストレッチングテンソル $\mathbf{D}$ との関係は, 式(27)より

$$\dot{\mathbf{E}}_R = \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R} \quad \dots\dots\dots (67)$$

非回転ひずみの場合にも, 座標系と極分解の違いにより新たなひずみ $\mathbf{E}_R^*, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_R^*$ を定義できる。まず $\mathbf{E}_R^*$ は式(65)において $\mathbf{U}$ を $\mathbf{U}^{-1}$ に置換すると,

$$\dot{\mathbf{E}}_R^* \equiv -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}) = -\dot{\mathbf{E}}_R \quad \dots\dots\dots (68)$$

したがって, $\mathbf{D}$ との関係は, 式(67)から

$$-\dot{\mathbf{E}}_R^* = \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R} \quad \dots\dots\dots (69)$$

全ひずみ $\mathbf{E}_R^*$ は式(68)を積分して,

$$\mathbf{E}_R^* \equiv \int_0^t \dot{\mathbf{E}}_R^* dt = -\mathbf{E}_R \quad \dots\dots\dots (70)$$

一方, $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ 分解に対して, 式(54)に対応して

$$\mathbf{e}_R \equiv \mathbf{R} \cdot (-\mathbf{E}_R^*) \cdot \mathbf{R}^t = \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_R \cdot \mathbf{R}^t \quad \dots\dots\dots (71)$$

$$-\mathbf{e}_R^* \equiv \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_R \cdot \mathbf{R}^t = \mathbf{e}_R \quad \dots\dots\dots (72)$$

速度形は式(71), (72)を微分し, 式(58)を用いると,

$$\dot{\mathbf{e}}_R = \mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_R - \mathbf{e}_R \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{V}}) \quad \dots\dots\dots (73)$$

$$-\dot{\mathbf{e}}_R^* = \mathbf{D} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_R^* + \mathbf{e}_R^* \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{V}}) \quad \dots\dots\dots (74)$$

式(73), (74)の誘導のとき, 式(67), (69)を用いている。

埋込み座標系での表示を得るため, 次のような基底ベクトルを導入する。

$$\hat{\mathbf{G}}_I \equiv \mathbf{U} \cdot \mathbf{g}_I \quad \dots\dots\dots (75)$$

このとき, 他の基底ベクトルと次の関係がある。

$$\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{G}}_I = \mathbf{G}_I, \quad \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{g}^I = \hat{\mathbf{G}}^I, \quad \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{G}}^I = \mathbf{G}^I \quad \dots\dots\dots (76)$$

式(42), (65), (68)から

$$\dot{\mathbf{E}}_R = \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{U}^{-1} \quad \dots\dots\dots (77 \cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_R^* = \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{U} \quad \dots\dots\dots (77 \cdot b)$$

式(75), (76)から $\mathbf{U} = \hat{\mathbf{G}}_I \mathbf{g}^I, \mathbf{U}^{-1} = \hat{\mathbf{G}}^I \mathbf{g}_I$ を式(77)に代入して次式を得る。

$$\dot{\mathbf{E}}_R = \frac{1}{2} \dot{\hat{\mathbf{G}}}_I \hat{\mathbf{G}}^I \hat{\mathbf{G}}^I \quad \dots\dots\dots (78 \cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_R^* = \frac{1}{2} \dot{\hat{\mathbf{G}}}^I \hat{\mathbf{G}}_I \hat{\mathbf{G}}_I \quad \dots\dots\dots (78 \cdot b)$$

このことから, $\dot{\mathbf{E}}_R$ と $\dot{\mathbf{E}}_R^*$ は共変および反変計量テンソル成分の変化率を $\hat{\mathbf{G}}^I$ および $\hat{\mathbf{G}}_I$ 座標系から測定したものであることがわかる。

Stören-Rice⁽¹⁰⁾が指摘しているように, $\mathbf{U}$ の主軸が変化しないとき, すなわち $\dot{\mathbf{R}}_L = 0$ のとき, Hencky の対数ひずみは非回転ひずみに一致する。

4. 応力-ひずみ関係式

4・1 応力とその速度 Cauchy の真応力 $\mathbf{T}$ は変形後の面素に対して定義されるもので, 面素の法線ベクトルを $\mathbf{n}$, 面素に働く合応力ベクトルを $\mathbf{t}$ とすると⁽²⁾, 次式が成立する。

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad \dots\dots\dots (79)$$

応力 $\mathbf{T}$ は, 座標系により次のように表示できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T^{ij} \mathbf{G}_i \mathbf{G}_j = T_{ij} \mathbf{G}^i \mathbf{G}^j \\ &= T^{ij} \mathbf{G}_i \mathbf{G}_j = T_{ij} \mathbf{G}^i \mathbf{G}^j \quad \dots\dots\dots (80) \end{aligned}$$

有理力学では⁽¹⁾⁽²⁾, 弾性体とは応力 $\mathbf{T}$ が変形こう配テンソル $\mathbf{F}$ の現在の値だけで決定される物体を意味する。すなわち, f を応答関数として, 次式が成立する。

$$\mathbf{T} = f(\mathbf{F}) \quad \dots\dots\dots (81)$$

座標系不依存の原理から, 任意の回転 $\mathbf{Q}$ に対し, $\mathbf{F}$ は $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}$, $\mathbf{T}$ は $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^t$ の変換を受けることから, 式(81)は次のように変形できる⁽¹⁾⁽²⁾。

$$T = R \cdot f(U) \cdot R^t \quad \dots\dots\dots (82)$$

式(82)は変形して,

$$T = R \cdot U \cdot U^{-1} \cdot f(U) \cdot U^{-1} \cdot U \cdot R^t = F \cdot U^{-1} \cdot f(U) \cdot U^{-1} \cdot F^t \quad \dots\dots\dots (83 \cdot a)$$

$$= R \cdot U^{-1} \cdot U \cdot f(U) \cdot U \cdot U^{-1} \cdot R^t = F^{-t} \cdot U \cdot f(U) \cdot U \cdot F^{-1} \quad \dots\dots\dots (83 \cdot b)$$

式(82), (83)を書き直すと,

$$\hat{T} \equiv R^t \cdot T \cdot R = f(U) \quad \dots\dots\dots (84 \cdot a)$$

$$\tilde{T} \equiv F^{-1} \cdot T \cdot F^{-t} = \tilde{f}(U) \quad \dots\dots\dots (84 \cdot b)$$

$$\bar{T} \equiv F^t \cdot T \cdot F = \bar{f}(U) \quad \dots\dots\dots (84 \cdot c)$$

ここで

$$\tilde{f}(U) \equiv U^{-1} \cdot f(U) \cdot U^{-1} \quad \dots\dots\dots (85 \cdot a)$$

$$\bar{f}(U) \equiv U \cdot f(U) \cdot U \quad \dots\dots\dots (85 \cdot b)$$

$\hat{T}$ と $\bar{T}$ は埋込み応力と呼ばれ⁽¹⁾, $\hat{T}$ は回転応力と呼ぶ。 $\hat{T}$, $\tilde{T}$, $\bar{T}$ は, 式(19), (75), (76)から

$$\hat{T} = T_{ij} \hat{G}^i \hat{G}^j = T^{ij} \hat{G}_i \hat{G}_j \quad \dots\dots\dots (86 \cdot a)$$

$$\tilde{T} = T^{ij} g_i g_j \quad \dots\dots\dots (86 \cdot b)$$

$$\bar{T} = T_{ij} g^i g^j \quad \dots\dots\dots (86 \cdot c)$$

このことから, $\hat{T}$ は $F = R \cdot U$ 分解において変形はするが剛体回転以前の座標系で, $\hat{T}$ と $\bar{T}$ は変形前の座標で計量していることがわかる。式(84)から次式を得る。

$$R \cdot \dot{\hat{T}} \cdot R^t = \dot{\hat{T}}_c \equiv \dot{\hat{T}} - \Omega \cdot \hat{T} + \hat{T} \cdot \Omega \quad \dots\dots (87 \cdot a)$$

$$F \cdot \dot{\tilde{T}} \cdot F^t = \dot{\tilde{T}}_c \equiv \dot{\tilde{T}} - L \cdot \tilde{T} - \tilde{T} \cdot L^t \quad \dots\dots (87 \cdot b)$$

$$F^{-t} \cdot \dot{\bar{T}} \cdot F^{-1} = \dot{\bar{T}}_c \equiv \dot{\bar{T}} + L^t \cdot \bar{T} + \bar{T} \cdot L \quad \dots\dots\dots (87 \cdot c)$$

ここで, $\dot{\hat{T}}_c$ は Green-Naghdi 速度, $\dot{\tilde{T}}_c$ は Oldroyd 速度, $\dot{\bar{T}}_c$ は Cotter-Rivlin 速度である。

埋込み座標系では, $\dot{\hat{T}}_c$ と $\dot{\bar{T}}_c$ は式(86), (87), (19)から

$$\dot{\hat{T}}_c = \dot{T}^{ij} G_i G_j \quad \dots\dots\dots (88 \cdot a)$$

$$\dot{\bar{T}}_c = \dot{T}_{ij} G^i G^j \quad \dots\dots\dots (88 \cdot b)$$

$\dot{\hat{T}}_c$ の場合, 多少複雑になる。まず,

$$\Omega = \Omega^{ij} G_i G_j = \Omega_{ij} G^i G^j \quad \dots\dots\dots (89)$$

$$L = L^{ij} G_i G_j = L_{ij} G^i G^j \quad \dots\dots\dots (90)$$

と置く。 G_i と G^i の速度は次式で与えられるから⁽¹⁴⁾,

$$\dot{G}_i = L \cdot G_i \quad \dots\dots\dots (91 \cdot a)$$

$$\dot{G}^i = -L^t \cdot G^i \quad \dots\dots\dots (91 \cdot b)$$

$\dot{\hat{T}}_c$ を次の2とおりに定義すると

$$\dot{\hat{T}}_c \equiv \dot{\hat{T}}_c^{ij} G_i G_j \quad \dots\dots\dots (92 \cdot a)$$

$$\equiv \dot{T}_{c ij} G^i G^j \quad \dots\dots\dots (92 \cdot b)$$

$\dot{\hat{T}}_c^{ij}$ と $\dot{T}_{c ij}$ は式(87 \cdot a)から

$$\dot{\hat{T}}_c^{ij} = \dot{T}^{ij} + T^{mj} (L^i_m - \Omega^i_m) + T^{in} (L^j_n - \Omega^j_n) \quad \dots\dots\dots (93 \cdot a)$$

$$\dot{T}_{c ij} = \dot{T}_{ij} - T_{mj} (L^m_i - \Omega^m_i) - T_{in} (L^j_n - \Omega^j_n) \quad \dots\dots\dots (93 \cdot b)$$

4.2 等方弾性体 等方弾性体においては, 式(82)の応答関数 $f(U)$ は Q を任意の回転として次の関係式を満足する必要がある⁽¹⁾⁽²⁾。

$$Q \cdot f(U) \cdot Q^t = f(Q \cdot U \cdot Q^t) \quad \dots\dots\dots (94)$$

式(94)において, $Q = R$ とおくと, $R \cdot U \cdot R^t = V$ から

$$T = f(V) \quad \dots\dots\dots (95)$$

式(95)において, V はひずみ尺度を表す。 $F = V \cdot R$ 分解において, 剛体回転後のこれに対応するひずみテンソルには, 3章で考察したように, e すなわち B^{-1} , e^* すなわち B , e_R , e_R^* がある。したがって, 等方弾性体の構成方程式は次のように置くことができる。巾乗展開し, Cayley-Hamilton の定理を用いると,

$$T = f_1(e) = a_0 I + a_1 e + a_2 e^2 \quad \dots\dots\dots (96 \cdot a)$$

$$T = f_2(e^*) = b_0 I + b_1 e^* + b_2 e^{*2} \quad \dots\dots\dots (96 \cdot b)$$

$$T = f_3(e_R) = c_0 I + c_1 e_R + c_2 e_R^2 \quad \dots\dots\dots (96 \cdot c)$$

$$T = f_4(e_R^*) = d_0 I + d_1 e_R^* + d_2 e_R^{*2} \quad \dots\dots\dots (96 \cdot d)$$

式(96)の係数 a, b, c, d は各ひずみの不変量の関数である。特に, 微少ひずみ理論に仮定されているように, 応力 T はひずみの一次の関数とすると, 式(96)は,

$$T = 2\mu_0 e + \lambda_0 (\text{tr } e) I \quad \dots\dots\dots (97 \cdot a)$$

$$T = 2\mu_0 (-e^*) + \lambda_0 \{\text{tr}(-e^*)\} I \quad \dots\dots\dots (97 \cdot b)$$

$$T = 2\mu_0 e_R + \lambda_0 (\text{tr } e_R) I \quad \dots\dots\dots (97 \cdot c)$$

$$T = 2\mu_0 (-e_R^*) + \lambda_0 \{\text{tr}(-e_R^*)\} I \quad \dots\dots\dots (97 \cdot d)$$

と仮定できる。ここで, λ_0 と μ_0 は Lamé の定数であり, 式(97)において異なる値をとる可能性がある。

$\text{tr}(X, Y, Z) = \text{tr}(Y, Z, X) = \text{tr}(Z, X, Y)$ であるので⁽²⁾, 式(55), (71), (72)から

$$\left. \begin{aligned} \text{tr } e &= \text{tr}(-E^*), \text{tr}(-e^*) = \text{tr } E \\ \text{tr } e_R &= \text{tr}(-E_R^*), \text{tr}(-e_R^*) = \text{tr } E_R \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (98)$$

であることから, 式(97)の左から R^t , 右から R を掛けると, 式(97)は次のように変形することができる。

$$\hat{T} = R^t \cdot T \cdot R = 2\mu_0 (-E^*) + \lambda_0 \{\text{tr}(-E^*)\} I \quad \dots\dots\dots (99 \cdot a)$$

$$\hat{T} = R^t \cdot T \cdot R = 2\mu_0 E + \lambda_0 (\text{tr } E) I \quad \dots\dots\dots (99 \cdot b)$$

$$\hat{T} = R^t \cdot T \cdot R = 2\mu_0 (-E_R^*) + \lambda_0 \{\text{tr}(-E_R^*)\} I \quad \dots\dots\dots (99 \cdot c)$$

$$\hat{T} = R^t \cdot T \cdot R = 2\mu_0 E_R + \lambda_0 (\text{tr } E_R) I \quad \dots\dots\dots (99 \cdot d)$$

式(97)と式(99)は等価である。式(97)は $F = V \cdot R$ 分解で剛体回転した後のひずみで応力 T が表現されることを示し, 式(99)は $F = R \cdot U$ 分解で剛体変形前の応力 $\hat{T}$ が変形前のひずみで表現されることを示す。

以下, 式(97)の各構成方程式について検討する。

4.3 $T = 2\mu_0 e + \lambda_0 (\text{tr } e) I$ の場合 両辺の物質微分をとると,

$$\dot{T} = 2\mu_0 \dot{e} + \lambda_0 (\text{tr } \dot{e}) I \quad (100)$$

式(53・a)を式(100)に代入すると

$$\dot{T} = 2\mu_0 (D - L^t \cdot e - e \cdot L) + \lambda_0 (\text{tr } \dot{e}) I \quad (101)$$

式(97・a)を e について解くと⁽²⁾,

$$e = -\frac{\lambda_0 (\text{tr } T) I}{2\mu_0 (3\lambda_0 + 2\mu_0)} + \frac{T}{2\mu_0} \quad (102)$$

式(102)を式(100)に代入し、整理すると、

$$\dot{T}_c = 2\mu_0 D + \frac{2\mu_0}{3\lambda_0 + 2\mu_0} (\text{tr } T) D + \lambda_0 (\text{tr } \dot{e}) I \quad (103)$$

式(103)の右辺の第2項は第1項に比べて小さいとし、

$\dot{e} \cong D$ とすると

$$\dot{T}_c = 2\mu_0 D + \lambda_0 (\text{tr } D) I \quad (104)$$

式(104)の埋込み座標での表示は、式(88・b), (44・a)から次のようになる。

$$\dot{T}_{IJ} = \mu_0 \dot{G}_{IJ} + \frac{\lambda_0}{2} (\dot{G}_{KL} G^{KL}) G_{IJ} \quad (105)$$

4・4 $T = 2\mu_0 (-e^*) + \lambda_0 \{\text{tr}(-e^*)\} I$ の場合 同様に、両辺の物質微分をとると、

$$\dot{T} = 2\mu_0 (-\dot{e}^*) + \lambda_0 \{\text{tr}(-\dot{e}^*)\} I \quad (106)$$

式(53・b)を式(106)に代入すると

$$\dot{T} = 2\mu_0 (D + L \cdot e^* + e^* \cdot L^t) + \lambda_0 \{\text{tr}(-\dot{e}^*)\} I \quad (107)$$

式(97・b)を式(107)に代入し、整理すると、

$$\dot{T}_o = 2\mu_0 D - \frac{2\mu_0}{3\lambda_0 + 2\mu_0} (\text{tr } T) D + \lambda_0 \{\text{tr}(-\dot{e}^*)\} I \quad (108)$$

式(108)の右辺の第2項は第1項に比べて小さいとし、

$-\dot{e}^* \cong D$ とすると

$$\dot{T}_o = 2\mu_0 D + \lambda_0 (\text{tr } D) I \quad (109)$$

式(109)の埋込み座標での表示は、式(88・a), (44・b)から次のようになる。

$$\dot{T}^{IJ} = -\mu_0 \dot{G}^{IJ} - \frac{\lambda_0}{2} (\dot{G}^{KL} G_{KL}) G^{IJ} \quad (110)$$

4・5 $T = 2\mu_0 e_R + \lambda_0 (\text{tr } e_R) I$ の場合 両辺の物質微分をとり、式(73)を代入すると、

$$\dot{T} = 2\mu_0 (D + \Omega \cdot e_R - e_R \cdot \Omega) + \lambda_0 (\text{tr } D) I \quad (111)$$

式(97・c)を e_R について解き、式(111)に代入すると、

$$\dot{T}_c = 2\mu_0 D + \lambda_0 (\text{tr } D) I \quad (112)$$

式(112)の埋込み座標での表示は、式(93・b), (44・a)から次のようになる。

$$\dot{T}_{GI} = \mu_0 \dot{G}_{GI} + \frac{\lambda_0}{2} (\dot{G}_{KL} G^{KL}) G_{GI} \quad (113)$$

なお、式(112)を e_R を用いて表示すると、

$$\dot{T} - \Omega \cdot T + T \cdot \Omega = 2\mu_0 (\dot{e}_R - \Omega \cdot e_R + e_R \cdot \Omega) + \lambda_0 (\text{tr } \dot{e}_R) I \quad (114)$$

式(114)は、応力 T とひずみ e_R が Ω を共通のスピンとして客観速度を得ていることを示している。このことは後藤⁽¹⁵⁾の指摘と同様であるが、ひずみ e_R の主軸のスピンを用いてない点で異なる。

4・6 $T = 2\mu_0 (-e_R^*) + \lambda_0 \{\text{tr}(-e_R^*)\} I$ の場合 両辺の物質微分をとり、式(74)を代入すると、

$$\dot{T} = 2\mu_0 (D - \Omega \cdot e_R^* + e_R^* \cdot \Omega) + \lambda_0 (\text{tr } D) I \quad (115)$$

式(97・d)を $-e_R^*$ について解き、式(115)に代入すると、

$$\dot{T}_c = 2\mu_0 D + \lambda_0 (\text{tr } D) I \quad (116)$$

式(116)の埋込み座標での表示は、式(93・a), (44・b)から次のようになる。

$$\dot{T}_c^{IJ} = -\mu_0 \dot{G}^{IJ} - \frac{\lambda_0}{2} (\dot{G}^{KL} G_{KL}) G^{IJ} \quad (117)$$

式(116)を $-e_R^*$ を用いて表すと、次式を得る。

$$T - \Omega \cdot T + T \cdot \Omega = 2\mu_0 (-\dot{e}_R^* + \Omega \cdot e_R^* - e_R^* \cdot \Omega) + \lambda_0 \{\text{tr}(-\dot{e}_R^*)\} I \quad (118)$$

5. 構成方程式の検討

4章で得られた構成方程式とその速度形は、座標系不依存の原理を満足する。この原理以外に、構成方程式が満足することが必要な事項として、(i) 応力 T が弾性エネルギーのひずみの完全微分の形で表示されること⁽²⁾、(ii) 客観応力速度が零のとき応力不変量が停留することである⁽³⁾。ここではこのことについて考察するとともに、Jaumann速度 $\dot{T}_J$ について検討する。

5・1 弾性エネルギーの存在 固体内の単位体積中で応力 T のなす仕事率 $\dot{W}_0$ は次式で与えられる⁽²⁾。

$$\dot{W}_0 = T : D \quad (119)$$

D と関連づけられるひずみ速度を式(119)に代入する。対称テンソルの e_R と e_R^* は、式(71), (72)から

$$\dot{W}_0 = T : (\dot{e}_R - \Omega \cdot e_R + e_R \cdot \Omega) = T : \dot{e}_R \quad (120)$$

$$\dot{W}_0 = T : (-\dot{e}_R^* + \Omega \cdot e_R^* + e_R^* \cdot \Omega) = T : (-\dot{e}_R^*) \quad (121)$$

E_R と E_R^* については、式(67), (69)から

$$\dot{W}_0 = T : (R \cdot \dot{E}_R \cdot R^t) = (R^t \cdot T \cdot R) : \dot{E}_R = \hat{T} : \dot{E}_R \quad (122)$$

$$\dot{W}_0 = T : \{R \cdot (-\dot{E}_R^*) \cdot R^t\} = (R^t \cdot T \cdot R) : (-\dot{E}_R^*) = \hat{T} : (-\dot{E}_R^*) \quad (123)$$

また、 E と E^* については、式(42)から

$$\dot{W}_0 = T : (F^{-t} \cdot \dot{E} \cdot F^{-1}) = (F^{-1} \cdot T \cdot F^{-t}) : \dot{E} = \bar{T} : \dot{E} \quad (124)$$

$$\dot{W}_0 = T : \{F \cdot (-\dot{E}^*) \cdot F^t\}$$

$$=(F^t \cdot T \cdot F) : (-\dot{E}^*) = \bar{T} : (-\dot{E}^*) \quad (125)$$

したがって、 W_0 を弾性ポテンシャルとすると、

$$T = \frac{\partial W_0}{\partial e_R} \quad (126 \cdot a)$$

$$T = \frac{\partial W_0}{\partial (-e_R^*)} \quad (126 \cdot b)$$

$$\hat{T} = \frac{\partial W_0}{\partial E_R} \quad (127 \cdot a)$$

$$\hat{T} = \frac{\partial W_0}{\partial (-E_R^*)} \quad (127 \cdot b)$$

$$\hat{T} = \frac{\partial W_0}{\partial E} \quad (128 \cdot a)$$

$$\bar{T} = \frac{\partial W_0}{\partial (-E^*)} \quad (128 \cdot b)$$

が成立する。式(126・a)、(126・b)は式(97・c)、(97・d)に、式(127・a)、(127・b)は式(99・c)、(99・d)に対応する。すなわち、 $\dot{T}_c$ は弾性エネルギーを持つが、 $\dot{T}_o$ と $\dot{T}_c$ は持たないことがわかる。式(128・a)、(128・b)に対応するものが、4章にないので、次にこれを検討する。

5・1・1 $\bar{T} = 2\mu_0 E + \lambda_0 (\text{tr } E) I$ の場合 両辺の物質微分をとり、式(87・b)、(42・a)を代入すると、

$$F^{-1} \cdot \dot{T}_o \cdot F^{-t} = 2\mu_0 F^t \cdot D \cdot F + \lambda_0 \{ \text{tr}(F^t \cdot D \cdot F) \} I \quad (129)$$

式(47)を用いて式(129)を変形すると、

$$\dot{T}_o = 2\mu_0 B \cdot D \cdot B + \lambda_0 \{ \text{tr}(B \cdot D) \} B \quad (130)$$

式(130)は式(108)と異なる

5・1・2 $\bar{T} = 2\mu_0 (-E^*) + \lambda_0 \{ \text{tr}(-E^*) \} I$ の場合 両辺の物質微分をとり、式(87・c)、(42・b)を代入すると、

$$F^t \cdot \dot{T}_c \cdot F = 2\mu_0 F^{-1} \cdot D \cdot F^{-t} + \lambda_0 \{ \text{tr}(F^{-1} \cdot D \cdot F^{-t}) \} I \quad (131)$$

式(47)を用いて式(131)を変形すると、

$$\dot{T}_c = 2\mu_0 B^{-1} \cdot D \cdot B^{-t} + \lambda_0 \{ \text{tr}(D \cdot B) \} B^{-1} \quad (132)$$

式(132)は式(104)と異なる。

5・2 応力不変量の停留性 応力の不変量 I, II, III は式(79)から導くことができ、混合テンソルを用いると次のように簡潔に表現できる⁽²⁾。

$$I = T^i_i = T^j_j \quad (133 \cdot a)$$

$$II = T^i_j T^j_i = T^j_i T^i_j \quad (133 \cdot b)$$

$$III = T^i_j T^j_k T^k_i = T^j_i T^j_k T^k_i \quad (133 \cdot c)$$

客観応力速度 $\dot{T} = 0$ のとき、応力不変量の導関数は、後藤⁽²¹⁾によって証明されているが、客観応力速度が Jaumann 速度や Green-Naghdi 速度のように反対称テンソルのスピンの W, Ω を持つとき停留する。このことから、 $\dot{T}_c$ はこの要請を満足するが、 $\dot{T}_o$ と $\dot{T}_c$ はこの条件を満足しないことがわかる。

5・3 Jaumann 速度 空間固定座標系で

$$\dot{T}_j = \dot{T} - W \cdot T + T \cdot W \quad (134)$$

と定義され、埋込み座標系では次式で与えられる⁽¹⁴⁾。

$$\dot{T}_j = \left(\frac{\hat{d}}{dt} T^{\prime\prime} \right) G_i G_j = \left(\frac{\hat{d}}{dt} T_{ij} \right) G^i G^j \quad (135)$$

ここで、 $\hat{d}/dt$ は回転する座標系から観測したときの変化率を表わす。 $\dot{T}_j$ は応力不変量の停留性の要請を満足する客観応力速度であるが、4章の構成方程式の速度形として $\dot{T}_j$ は現れていない。ただし、空間座標系において、式(87・b)、(87・c)、(26)を用いると、 $\dot{T}_j$ は次のように与えられる。

$$\dot{T}_j = \frac{1}{2} (\dot{T}_o + \dot{T}_c) \quad (136)$$

しかし、 $\dot{T}_j$ に対応するひずみを、式(136)の類推から $\frac{1}{2}(e - e^*)$ としても、 $\dot{T}_j$ を含む速度形構成方程式を得ることはできない。

以上のように、 $\dot{T}_j$ は客観応力速度として用いることができないように思われるが、座標系を変形することに更新するいわゆる Updated Lagrangian 流の定式化を用いるならば、

$$R = I, U = I, V = I \quad (137)$$

と置くことができるので、式(28)から

$$W = \Omega = \dot{R} \quad (138)$$

となるため、 $\dot{T}_c$ と $\dot{T}_j$ は一致する。すなわち、

$$\dot{T}_j = 2\mu_0 D + \lambda_0 (\text{tr } D) I \quad (139)$$

が、更新する座標系で用いるべき方程式となる。

6. 結 論

有限変形を受ける弾性体のひずみを、従来知られている主要座標系だけでなく、基底ベクトルが直交する第2の座標系においても求めた。これにより、Green-Lagrange ひずみテンソルと Almansi-Euler ひずみテンソルの相互関係を明らかにした。また Stören-Rice の非回転ひずみについて、座標系と極分解に対応させたひずみとその速度形を導いた。有理力学で許容される構成方程式とその速度形から、従来知られている速度形構成方程式との対応を次のように明らかにした。

(1) 主要座標系での Almansi-Euler ひずみと Cauchy 応力に対応させると、Cotter-Rivlin 応力速度 $\dot{T}_o$ を用いた次の方程式を得る。

$$\dot{T}_o = 2\mu_0 D + \lambda_0 (\text{tr } D) I$$

(2) 第2の座標系での Almansi-Euler ひずみと Cauchy 応力に対応させると、Oldroyd 応力速度を用いた次の方程式を得る。

$$\dot{T}_o = 2\mu_0 D + \lambda_0 (\text{tr } D) I$$

(3) 主要座標系および第2の座標系の Stören-Rice のひずみと Cauchy 応力を対応させると, Green-Naghdi 応力速度 $\dot{T}_c$ を用いた次の方程式を得る.

$$\dot{T}_c = 2\mu_0 D + \lambda_0 (\text{tr } D) I$$

(4) 弾性エネルギーの存在と応力不変量の停留性の要請を考慮すると, Green-Naghdi 応力速度を用いた方程式が妥当である.

(5) 更新する座標系を用いる Updated Lagrangian 流の定式化を用いるならば, Jaumann 応力速度 $\dot{T}_J$ を用いた次の方程式が妥当である.

$$\dot{T}_J = 2\mu_0 D + \lambda_0 (\text{tr } D) I$$

文 献

- (1) Truesdell, C. and Noll, W., (Flügge, W. 編), *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, *Encyclopedia of Physics*, Vol. III/3, (1965), Springer-Verlag.
- (2) Malvern, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, (1969), Prentice-Hall, Inc.
- (3) Prager, W., *Q. Appl. Math.*, 18-4 (1961), 403.
- (4) Noll, W., *J. Rational Mech. Anal.*, 4 (1955), 3.
- (5) Oldroyd, J. G., *Proc. R. Soc. London*, Ser. A, 200 (1950), 523.
- (6) Cotter, B. A. and Rivlin, R. S., *Q. Appl. Math.*, 13 (1955), 177.
- (7) Green, A. E. and Naghdi, P. M., *Arch. Rational Mech. Anal.*, 18 (1965), 251.
- (8) Sedov, L. I., *PMM*, 30-3 (1960), 579.
- (9) Dienes, J. K., *Acta Mech.*, 32 (1979), 217.
- (10) Stören, S. and Rice, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, 23 (1975), 421.
- (11) Nagtegaal, J. C. and de Jong, J. E., (Lee, E. H. and Mallett, R. L. 編) *Plasticity of Metals at Finite Strain: Theory, Experiment and Computation*, (1982), 65.
- (12) Lee, E. H., ほか2名, *J. Appl. Mech.*, 50-3 (1983), 554.
- (13) Dafalias, Y. F., *J. Appl. Mech.*, 52-4 (1985), 865.
- (14) Atluri, S. N., *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 46-2 (1984), 137.
- (15) 後藤, 機論, 52-476, A (昭61), 1134.
- (16) Atluri, S. N., *Comp. & Struct.*, 18-1 (1984), 93.
- (17) Green, A. E. and Zerna, W., *Theoretical Elasticity*, 2nd edition, (1968), 9, Oxford Press.
- (18) 村上・大野, 機論, 43-368 (昭52), 1220.
- (19) Truesdell, C. and Toupin, R. A., *The Classical Field Theories*, *Encyclopedia of Physics*, Vol. III/1, (1960), 226, Springer-Verlag.
- (20) Gurtin, M. E. and Spear, K., *Int. J. Solids Struct.*, 19-5 (1983), 437.
- (21) 後藤, 塑性と加工, 27-300 (昭61), 25.

討 論

〔質問〕 倉 茂 道 夫〔東北大学工学部〕

興味深く拝見した。以下の点、質問者の理解が及ばないので、ご説明いただきたい。

(1) 5・3 節の Jaumann 速度の項の結論として「 $\dot{T}_J$ を含む速度形構成式を得ることができないので、 $\dot{T}_J$ は客観応力速度として用いることはできない」と理解してよろしいか。しかし、等方性の場合には文献(1)の408ページに $\dot{T}_J = f_B(B) : (D \cdot B + B \cdot D)$ のように、その関係は求められているように思うが、いかがか。

(2) 107 ページ左欄11行め「すなわち、 $\dot{T}_c$ は弾性エネルギーを持つが、 $\dot{T}_c$ と $\dot{T}_c$ は持たないことがわかる」の意味がわからない。

〔回答〕 (1) ご指摘の構成方程式は式(95)に基づく。その導出過程はおよそ次のようなものと考えられる。式(95)において $V^2 = B$ より B を用いると

$$T = f(V) = h(B) \quad \text{..... (i)}$$

となる。応答関数 h は等方関数であるから

$$T = R \cdot h(C) \cdot R^t \quad \text{..... (ii)}$$

となる。式(83・a), (84・b)の変形を行い、体積変化の影響を省略すると、

$$\tilde{T} = \tilde{h}(C) \quad \text{..... (iii)}$$

となる。式(iii)の物質微分をとり、式(87・b)を用いると

$$\dot{T}_c = F \tilde{h} \cdot (\dot{C}) \cdot F^t \quad \text{..... (iv)}$$

となる。 $\dot{C} = 2F^t \cdot D \cdot F$ の関係から、式(iv)は

$$\begin{aligned} \dot{T}_c &= F \cdot F^t \cdot F^{-t} \tilde{h}(\dot{C}) F^{-1} \cdot F \cdot F^t \\ &= B \cdot \tilde{h}_1(D) \cdot B \quad \text{..... (v)} \end{aligned}$$

と変形できる。 $\dot{T}_c$ は $\dot{T}_J$ を用いると

$$\dot{T}_c = \dot{T}_J - D \cdot T - T \cdot D \quad \text{..... (vi)}$$

であることから、式(i)を式(vi)に代入しまとめると $f_B(B)$ を4階のテンソルとして、ご指摘の次式を得る。

$$\dot{T}_J = f_B(B) : (D \cdot B + B \cdot D) \quad \text{..... (vii)}$$

すなわち、式(i)に基づく式(vii)に変形できることを示している。

これに関連し、式(i)を B について巾乗展開した式、すなわち式(96・a)と等価な次式を考える。

$$T = a_0 I + a_1 B + a_2 B^2 \quad \text{..... (viii)}$$

式(viii)に式(84)と同一の変換を行うと、

$$\tilde{T} = a_0 C^{-1} + a_1 I + a_2 C \quad \text{..... (ix・a)}$$

$$\bar{T} = a_0 C + a_1 C^2 + a_2 C^3 \quad \text{..... (ix・b)}$$

$$\hat{T} = a_0 I + a_1 C + a_2 C^2 \quad \text{..... (ix・c)}$$

となる。ここで式(viii), (ix)の係数 a_0, a_1, a_2 は同一で

ある。微小変形理論で仮定しているように、応力をひずみの1次式で近似することを考える。式(97・a)は式(viii)で係数 $a_2=0$ としている。同様に式(99・a)は式(ix・c)において $a_2=0$ としている。これに対し、式(ix・a)中の $a_0=0$ とした次式と

$$\bar{T}=2\mu_0 E + \lambda_0(\text{tr } E)I \cdots \cdots \cdots (x)$$

$a_2=0$ とした次式は

$$\bar{T}=2\mu_0(-E^*) + \lambda_0\{\text{tr}(-E^*)\}I \cdots \cdots \cdots (xi)$$

式(97・a)とともにいずれも式(vii)の形に帰着できるが、式(97・a)と式(xi)はほぼ同等となるのに比べ、式(x)とは大きく異なる。すなわち式(viii)に基づくとは言え、ひずみの1次式で構成方程式を求めるときには、その挙動は大きく異なることに留意する必要がある。

(2) 単位体積当たりの弾性ひずみエネルギーは、構成方程式が与えられればどの場合にも求めることができる。例えば式(97・a)のように e を用いると、弾性ひずみエネルギー $W_0(e)$ は次のようになる。

$$W_0(e) = \int_0^e T : de = \frac{1}{2} T : e \\ = \frac{1}{2} \{2\mu_0(e : e) + \lambda_0(\text{tr } e)^2\} \cdots \cdots \cdots (xii)$$

$W_0(e)$ の物質微分をとると、すなわち単位体積当たりの内部仕事率は次のようになる。

$$\dot{W}_0(e) = 2\mu_0(e : \dot{e}) + \lambda_0(\text{tr } e)(\text{tr } \dot{e}) \cdots \cdots \cdots (xiii)$$

式(97・a)を式(xiii)に代入すると

$$\dot{W}_0(e) = T : \dot{e} \cdots \cdots \cdots (xiv)$$

と表示できる。しかるに、真なる単位体積当たりの仕事率 $\dot{W}_0$ は式(119)のように与えられているので、これと比較することにより、仮定した構成方程式の妥当性を検討することができる。 $\dot{e}$ については、式(53・a)を式(xiv)に代入すると

$$\dot{W}_0(e) = T : (D - D \cdot e - e \cdot D) \cdots \cdots \cdots (xv)$$

となり、対称成分の $(D \cdot e)$ の項が残り、真なる $\dot{W}_0$ と異なる。ここで、式(xv)における応力 T は仮定した構成方程式から計算するものであるが、式(119)の $\dot{W}_0$ における応力と同一のものと比較する。この意味において、 $\dot{W}_0(e)$ は $\dot{W}_0$ と異なるので弾性ひずみエネルギーがないとした。すなわち式(97・a)の速度形は $\dot{T}_e$ なので、これは弾性ひずみエネルギーがないとした。式(97・b)も同様である。

なお、式(122)～(125)に示すように、 $\dot{W}_0$ とエネルギー的に共役な応力とひずみ速度の組合せは4とおりのあるが、回答(1)に示すように、 $\bar{T}$ と E の関係を式(x)のように仮定すると、その挙動は T と e_R 、 T と e_F の場合に比べて大きく異なる。また $\bar{T}$ と (E^*) の場合も同様のことが言える。

以上、貴重な指摘を得ることにより、考察を深めることができたことに対し、謝意を表す。

〔質問〕 大野 信 忠〔豊橋技術科学大学〕

次の点についてご教示いただければ幸いである。

(1) 2章で第2の座標系に関する直接表示には*印を付しておられるが、この*印は所詮便宜的なもののはずである。事実著者自身、式(3)と(4)の説明部分で $dr=dr^*$ 、 $dR=dR^*$ と明示されている。それにもかかわらず、 $dR=F \cdot dr$ 、 $dR^*=F^* \cdot dr^*$ として定義される F と F^* に対して $F=F^*$ ではなく式(16)、すなわち $F^*=F^{-1}$ が導かれている。この点についてももう少し詳しくご説明いただきたい。

式(16)は、式(15)に基づいて誘導されている。単なる座標変換ではなく、変形前から変形後への写像に対しても式(15)を適用されることの妥当性をご説明いただければ幸いである。

(2) 貴論文では主に線形弾性変形を扱っておられる。このとき多くの場合(特に金属の場合)、物質要素の回転は大きくても変形(ゆがみ)自体は微小であるから、貴論文で議論されているどの応力速度を用いても、解析結果には大きく影響しないように思う。

〔回答〕 (1) 著者の理解が十分でなかったため、混乱が生じたことをお詫びする。Sedov⁽⁸⁾が埋込み座標式を用いてOldroyd速度とCotter-Rivlin速度の違いを説明したように、対応するひずみについても第1, 2の座標系の違いにより2とおりの定義のあることが予想される。著者は空間固定座標系も埋込み座標系もその表示の形式が異なるだけで、第1, 2の座標系の扱いは同じようにできるものと考えていた。空間固定座標系では、変形前後の第1座標系での微小線素を dr, dR 、第2座標系でのそれらを dr^*, dR^* とすると、 $dr=dr^*$ および $dR=dR^*$ と置くことができるので、 $dR=F \cdot dr$ 、 $dR^*=F^* \cdot dr^*$ で定義される変形こう配テンソル F, F^* はご指摘のように $F=F^*$ となる。

これに対し埋込み座標系では、事情が異なる。変形前の微小線素は空間固定座標系と同様に次のように表示できる。

$$dr=dr^* \cdots \cdots \cdots (xvi)$$

ここで

$$dr=d\xi^i g_i \cdots \cdots \cdots (xvii \cdot a)$$

$$dr^*=d\xi_i g^i \cdots \cdots \cdots (xvii \cdot b)$$

また、変形後の微小線素 dR は、座標軸 $d\xi^i$ が不変で共変基底ベクトルが g_i から G_i に変化したとして

$$dR=d\xi^i G_i \cdots \cdots \cdots (xviii)$$

と表示する。同様に dr^* の座標軸 $d\xi_i$ が不変で反変基底ベクトルが g^i から G^i に変化したとして次のベク

トルを導入する。

$$dR^* \equiv d\xi_i G^i \dots\dots\dots (xix)$$

このとき式(xviii)の G_i と式(xix)の G^i は直交する。空間固定座標系では $dR = dR^*$ であるが、埋込み座標系では

$$dR \neq dR^* \dots\dots\dots (xx)$$

となる。 dR, dR^* の表示形は両方の座標系で似ているが、等号の成立・不成立で基本的な相違がある。このことは式(xvi), (xvii)から

$$d\xi^i = g^{ij} d\xi_j \dots\dots\dots (xxi)$$

となり、式(xxi)を式(xviii)に代入すると

$$dR = G_i g^{ij} d\xi_j \dots\dots\dots (xxii)$$

となることから、式(xix)と比較し $dR \neq dR^*$ がわかる。第1の座標系で、式(xvii・a)の dr と式(xviii)の dR について変形こう配テンソル F を次のように定義するなら、

$$dR = F \cdot dr \dots\dots\dots (xxiii)$$

同様に、第2の座標系で、式(xvii・b)の dr^* と式(xix)の dR について F^* を次のように定義できる。

$$dR^* = F^* \cdot dr^* \dots\dots\dots (xxiv)$$

すなわち、式(xxiv)は次のようになる。

$$F^* \cdot g^i = G^i \dots\dots\dots (xxv)$$

一方、式(11・d)から

$$F^{-i} \cdot g^i = G^i \dots\dots\dots (xxvi)$$

が得られるので、式(xxv), (xxvi)を比較し次式を得る。

$$F^* = F^{-i} \dots\dots\dots (xxvii)$$

以上の考察から、本文の訂正は次のとおりである。

(a) 式(15)はご指摘のように、座標変換の式で、写像変換には用いることはできない。

(b) 式(17), (18)は不要である。

(c) 空間固定の第2の座標系における Green-Lagrange および Almansi-Euler のひずみは $F = F^*$ であるため、本来定義できないものである。しかし、埋込み座標系で得られた定義の式(38), (49)を空間固定座標系で表示することはできる。式(14・a)の F^* でなく、式(11・d)の F^{-i} を用いると次のようになる。

$$E^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^k} \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^l} G^{kl} - g^{ij} \right) g_i g_j \dots\dots\dots (xxviii)$$

$$e^* = \frac{1}{2} \left(G^{ij} - \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^k} \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^l} g^{kl} \right) G_i G_j \dots\dots\dots (xxix)$$

なお E, e について著者の不注意による誤りがあったので、次のように訂正する。

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial \eta^l}{\partial \xi^j} G_{kl} - g_{ij} \right) g^i g^j \dots\dots\dots (xxx)$$

$$e = \frac{1}{2} \left(G_{ij} - \frac{\partial \xi^k}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^l}{\partial \eta^j} g_{kl} \right) G^i G^j \dots\dots\dots (xxxi)$$

ともすれば見落しがちな箇所について、基礎的で重要な指摘を得たことに対し、謝意を表す。

(2) 本論文は実際的な応用を直接目指したのではなく、弾性体の構成方程式に係る基礎的な研究であることをご理解願いたい。また、ここにおける考察は大ひずみを伴う弾塑性体の構成方程式の研究に役立つもので、これについては次の機会に報告したい。