薄肉曲りばりの弾塑性大変形解析*

加 鳥 裕 明*¹, 西 村 融*²

Elastic-Plastic Large Deformation Analysis of Curved Beam with Thin Walled Cross Section

Hiroaki KATORI and Toru NISHIMURA

It is well known that when a curved beam is subject to bending, the shape of its cross section is flattened and collapse occurs as the rigidity is reduced. It is important for design determine their nonlinear behavior. This paper describes the elastic-plastic large deformation analysis of a curved beam with a thin walled cross section by the finite element method. The analytical formulation is developed by extending the kinematic work hardening model preposed by Ziegler. Several representative cases are computed.

Key Words: Structural Analysis, Elastic-Plastic Large Deformation, Thin Walled Curved Beam, FEM, Bauschinger Effect

1. ま え が き

曲管は、配管系における重要な構成要素であるばかりでなく、一般の構造要素としても広く利用されており、その挙動を知することは安全設計上非常に重要である。断面形状も円形にとどまらず種々の形状のものが使われており、それらの挙動についても検討が要求されている。曲管や薄肉曲りばりが曲げモーメントを受けると、その断面形状が変化することにより同一断面形状の直線ばりと比べて剛性が低下し高い応力値が生じ屈服に至ることはよく知られている⁽¹⁾⁽²⁾。このような非線形挙動に対する研究⁽³⁾⁽⁴⁾は、近年有限要素法を用いた手法により解析されているが、ほとんど円管を対象としたもので、まだ十分であるとはいえない。また、弾塑性問題の解析における増分形式の応力-ひずみ関係式は Prandtl-Reuss の関係式を数値計算に適用しやすい形で示し、広く利用されている⁽⁵⁾。しかし、等方硬化則に基づくものであって、塑性の重要な特性

であるバウシング効果を表現することができない。Prager⁽⁶⁾や Ziegler⁽⁷⁾らは、バウシング効果を表現できる移動硬化則を提案している。

そこで、本報は曲げを受ける薄肉曲りばりについて、幾何学的非線形性と材料非線形性の両者を考慮した有限要素法による解析法を示す。解析に用いた材料の構成式は、文献(8)で提案された有限増分塑性理論を用いた。任意の断面形状を有する薄肉曲りばりをはじめ、対称断面でも主軸と斜交する軸回りの弾塑性大変形問題などは、ここで初めて明らかにすることができたといえよう。

2. 理 論

2・1 仮想仕事の原理による基礎式 外荷重 R のもとで内力 S 、応力 σ を生じて平衡している時、仮想変位 $\bar{r}$ による仮想仕事の原理は

$$\bar{r}^T R = \sum_e \bar{\epsilon}^T S = \sum_e \int \bar{\epsilon}^T \sigma dV \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 r は節点変位で微小仮想変位を $\bar{r}$ と書いている。 R は $\bar{r}$ に対応する荷重であり、 $\bar{\epsilon}$ は $\bar{r}$ に応じて生じる仮想変形であり、 $\bar{\epsilon}$ は $\bar{r}$ による物体内の仮想ひずみである。 $\sum_e$ は全要素に関する総和を表す。次に荷重を増加して $R' = R + \dot{R}$ とする時、変位増分 $\dot{r}$

* 昭和 62 年 3 月 9 日 中国四国支部第 25 期総会講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 6 月 2 日。

*¹ 正員、名城大学附属高等学校 (〒453 名古屋市市中区新富町 1-3-16)。

*² 正員、名城大学理工学部 (〒468 名古屋市白区塩釜口 1-501)。

を生じて再び平衡状態にあり、内力 $S' = S + \dot{S}$, 応力 $\sigma' = \sigma + \dot{\sigma}$ となるとすると、仮想仕事の原理は

$$\bar{r}^T R' = \sum_e \int \bar{\epsilon}^T \sigma' dV = \sum_e \int (\bar{\epsilon} + \dot{\bar{\epsilon}})^T (\sigma + \dot{\sigma}) dV \quad \dots\dots\dots (2)$$

ひずみの一要素 $\epsilon_k = \epsilon_k(r_c)$ に注目しテラ展開を考えると

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_k &= \left(\frac{\partial \epsilon_k}{\partial r_i} \right)_{r=0} \bar{r}_i, \quad \bar{\epsilon} = C \bar{r} \\ \dot{\bar{\epsilon}}_k &= \bar{\epsilon}_k + \dot{\bar{\epsilon}}_k = \left(\frac{\partial \epsilon_k}{\partial r_i} \right)_{r=i} \bar{r}_i \\ &= \left\{ \left(\frac{\partial \epsilon_k}{\partial r_i} \right)_{r=0} + \left(\frac{\partial^2 \epsilon_k}{\partial r_i \partial r_j} \right)_{r=0} \dot{r}_j \right\} \bar{r}_i \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここで、 $\partial^2 \epsilon_k / \partial r_i \partial r_j$ を i 行 j 列要素とする行列を B_k と書くと上式より

$$\dot{\bar{\epsilon}}_k = \left(\frac{\partial^2 \epsilon_k}{\partial r_i \partial r_j} \right)_{r=0} \dot{r}_j \bar{r}_i = \bar{r}^T B_k \dot{r} \quad \dots\dots\dots (4)$$

また、ひずみ増分を弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分の和とし、応力増分に通常のフック則を仮定すると、

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p, \quad \dot{\sigma} = H \dot{\epsilon}^e = H(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \quad \dots\dots (5)$$

式(2)の右边を展開し、高次の微小項を無視すると

$$\bar{r}^T R' \approx \sum_e \int (\bar{\epsilon}^T \sigma + \dot{\bar{\epsilon}}^T \sigma + \bar{\epsilon}^T \dot{\sigma}) dV \quad \dots\dots\dots (6)$$

上式に式(3)~(5)を代入し整理すれば、

$$\begin{aligned} \bar{r}^T R' &= \bar{r}^T \left[\sum_e \int C^T \sigma dV + \sum_e \int C^T H C dV \dot{r} \right. \\ &\quad \left. + \sum_e \int \sigma_k B_k dV \dot{r} - \sum_e \int C^T H \dot{\epsilon}^p dV \right] \end{aligned}$$

上式において $\bar{r}$ は任意であることから

$$(K_E + K_G) \dot{r} = \dot{R} + Q + P \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、

$$K_E = \sum_e \int C^T H C dV \quad (\text{弾性剛性行列})$$

$$K_G = \sum_e \int \sigma_k B_k dV \quad (\text{幾何剛性行列})$$

$$Q = R - \sum_e \int C^T \sigma dV \quad (\text{残差荷重})$$

$$P = \sum_e \int C^T H \dot{\epsilon}^p dV \quad (\text{塑性による仮想的荷重})$$

式(7)からわかるように、前報の有限曲げ解析⁽⁹⁾に塑性による仮想的荷重 P を加えればよいことになる。

計算手順は、図1に示すように増分段階の初めに塑性による仮想的荷重 P を仮定し式(7)から節点変位を計算する。次に各要素について $\dot{S}, \dot{\sigma}$ を求め、さらに各要素内の観測点について $\sigma' = \sigma + \dot{\sigma}$ を計算し降伏判定を行う。もし塑性領域に入っていたら $\dot{\epsilon}^p$ を計算し、さらに P を求める。一般にこの P は始めに仮定した値とは一致しないので、 P が十分収束するまで上記の手順を繰返し計算する。その後次段に進む。この操作を所望段階まで続けられよい。次段に進んだ時、連立方程式の係数行列を3角化しておけば、繰返し計算に時間はほとんど必要ない。

本論文では、面内曲げ問題を対象としており、長手方向に変形が変化する面外曲げ問題への直接の適用には問題が残る。

2.2 移動硬化理論とアルゴリズム

Prager および Ziegler の移動硬化則は、簡単な方法でバウシニング効果を表現できる提案と考えられている。その移動硬化則に従えば降伏曲面は降伏曲面中心を α として、

$$f(\sigma - \alpha / \sigma_0) = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

降伏曲面中心の移動量 $\dot{\alpha}$ の表示法は、Ziegler に従って次のようにする。

$$\dot{\alpha} = \mu(\sigma - \alpha) \quad \mu > 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

図1 フローチャート

図2 Ziegler の硬化モデル

すなわち、図2に示すように降伏曲面中心 α と降伏曲面上の応力 σ を結ぶ方向に移動させるものとする。塑性ひずみ増分は、流れ則によって与えられ降伏条件 f を塑性ポテンシャルとすることにより

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \lambda \quad \lambda \geq 0 \quad (10)$$

また、ひずみ増分 $\dot{\epsilon}$ および応力増分 $\dot{\sigma}$ は、前節の式(5)で与えられている。これを再記すると

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \\ \dot{\sigma} &= H \dot{\epsilon}^e = H(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p), \quad H: \text{弾性行列} \end{aligned} \quad (5)$$

硬化則としては、応力増分 $\dot{\sigma}$ の降伏曲面に垂直な方向成分を $\dot{\sigma}^N$ とし、硬化係数を C とすれば

$$\dot{\sigma}^N = C \dot{\epsilon}^p \quad (11)$$

ここでは、図3に示すような線形移動硬化モデルを考え塑性変形中 C は一定であると仮定する。また、ベクトル $\dot{\sigma} - \dot{\sigma}^N$ は降伏曲面の応力点 σ での接平面上になければならないから $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ と直交するので

$$(\dot{\sigma} - \dot{\sigma}^N) \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0 \quad (12)$$

上述の関係式を用いて塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}^p$ 、降伏曲面中心の移動量 $\dot{\alpha}$ などを求める。今、弾性領域内のある応力点 σ^* から塑性域の点 σ' まで変化する場合を考える。その時、図4に示すように σ^* から降伏曲面上

の応力点 σ までは弾性変形し、 σ から σ' まではZieglerの移動硬化則に従って曲面を移動させながら塑性変形を行うとする。したがって

$$\dot{\alpha} = \sigma' - \sigma = \mu(\sigma - \alpha) \quad (13)$$

上式を次のように変形する。

$$\sigma' = \sigma + \dot{\alpha} = \sigma + \mu(\sigma - \alpha) \quad (14)$$

一方、 σ^* から $\dot{\epsilon}$ だけ弾性変形した場合の応力を σ'' とし、それから塑性変形分を減じた量を σ''' とする。すなわち

$$\sigma''' = \sigma'' - H \dot{\epsilon}^p, \quad \sigma'' = \sigma^* + H \dot{\epsilon} \quad (15)$$

式(14)、(15)で与えられる σ' と σ''' が同一平面上にあるという条件によって $\sigma' = \sigma'''$ となるまで反復計算を行い σ' 、 $\dot{\epsilon}^p$ 、 $\dot{\alpha}$ を求める。

式(10)~(13)より

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= \dot{\sigma}^N \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} C \dot{\epsilon}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma} C \frac{\partial f}{\partial \sigma} \lambda \\ &= \dot{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \mu(\sigma - \alpha) \frac{\partial f}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (16)$$

よって

$$\mu = \frac{\dot{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma}}{(\sigma - \alpha) \frac{\partial f}{\partial \sigma}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} C \frac{\partial f}{\partial \sigma} \lambda}{(\sigma - \alpha) \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \quad (17)$$

また、式(5)、(10)、(16)より

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} H \dot{\epsilon} - \frac{\partial f}{\partial \sigma} H \frac{\partial f}{\partial \sigma} \lambda = \frac{\partial f}{\partial \sigma} C \frac{\partial f}{\partial \sigma} \lambda$$

図3 線形硬化モデル

図4 移動硬化論

図5 Zieglerの硬化モデルの解法アルゴリズム

図 6 硬化係数の影響

さらに式(15)を用いて

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}(\sigma'' - \sigma^*)}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} H \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} C \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \dots (18)$$

よって、 σ^* , $\dot{\epsilon}$ が与えられれば、式(15)より σ'' を求め σ を仮定して式(18), (17)より λ, μ を求め σ' を求める。次に σ' を通る f 上の σ を求め、仮定した σ と比較して収束するまで繰返す(図5)。 σ を仮定する場合、 σ'' と α を結ぶ線上で取る。また、式(18)からわかるように硬化係数が、小さくなっても λ が発散することなく安定な値が求まる。

3. 数 値 計 算

これまで述べてきた手法を用いて、曲げを受ける薄肉曲りばりの弾塑性大変形問題の解析を行った。計算に使用した材料定数は、ヤング率 $E=68.6$ GPa, ポア

図 7 円管の断面変形図 ($1/R_0=0.01$) 図 8 円管の長手・円周方向の応力分布 ($1/R_0=0.01$)

ソシ比 $\nu=0.3$, 降伏応力 $\sigma_0=245$ MPa とした。

3・1 円管 半径 $a=10$ mm, 板厚 $t=1$ mm の円形断面の曲管を対象とし, 対称性より下半分を 30 要素に分割して解析した。降伏判定は, 各要素を板厚方

図 9 塑性域の進展状況 ($1/R_0=0.01$)

図 10 円管の屈服モーメントの初曲率に対する変化

図 11 正方形管の曲げモーメントと曲率 ($1/R_0=0.01$)

図 12 正方形管の断面変形図 ($1/R_0=0.01$)

向に 10 層に分割し各層の中央点で行い、塑性ひずみは各層内で一定とすることにした。図 6 は、初曲率 $1/R_0=0.01$ の曲りばりにおいて硬化係数を変化させた時の曲げモーメントと曲率の関係を示したものであり、それぞれ $E\epsilon a t^2$ と a^2/t で無次元化している。 $C/E=0$ は $C/E=0.05$ に対して最大曲げモーメント値が約 24 % 減少している。図中には、 $C/E=0.05$ の場合の幾何剛性行列 $K_G=0$ として計算した結果も示してあるが、最大曲げモーメント値で約 1 % 弾塑性解析のほうが大きくなっている。図 7 と図 8 は、硬化係数 $C/E=0.05$ の場合の断面の変形状態と長手・円周方向の応力分布を示したものであり、応力分布図は同一断面形の直線ばりに生ずる最大応力で無次元化した応力係数の形で示してある。最大応力は B 点の近傍で生じ、塑性化につれて応力係数は増加していき、この傾向は円周方向で特に顕著である。図 9 は、塑性域の進展の様子を示す。内外表面より進んできた塑性域が、垂直軸と約 45° の近傍で合流し周方向に広がっていく。図 10 は、最大曲げモーメントと初曲率の関係を示した。負の初曲率を持つ曲りばりは、正の初曲率を持つ曲りばりより大きな曲げモーメントで屈服に至る。

3.2 正方形管 一辺の長さ $2a=20$ mm、板厚 $t=1$ mm の正方形管について計算した。要素数は 40 とした。図 11 に、初曲率 $1/R_0=0.01$ の場合の曲げモーメントと曲率の関係を EIt/a^2 と a^2/t で無次元化した量で示す。図 12 と図 13 に、断面の変形状態と応力分布図を示す。長手方向応力は、膜力が支配的で変形が進むにつれて曲げの効果が入ってくる。図 14 と図 15 には、断面形を 30° 回転させた曲りばりが初曲率 $1/R_0=$

0.01 を持つ場合の曲げモーメントと曲率の関係および断面の変形状態を示す。

4. 結 論

本論文では、任意断面形を有する薄肉曲りばりが曲げを受ける場合の弾塑性大変形問題を有限要素法を用いて解析する方法を提案した。塑性変形に対しては、有限増分理論を用いて解析を行った。その結果、任意

図 14 正方形管の非対称曲げ ($1/R_0=0.01$)

図 13 正方形管の長手・円周方向の応力分布 ($1/R_0=0.01$)

図 15 正方形管の非対称曲げにおける断面変形図 ($1/R_0=0.01$)

の断面形状を有する薄肉曲りばりの弾塑性大変形問題を, 少ない計算労力で実用上十分な精度で解析を行うことが可能となった。また, 対称断面でも主軸と斜交する軸回りの解析については, ここで初めて明らかにすることができた。

文 献

(1) Gross, N., *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 1B (1952), 480.

- (2) 鶴戸口・ほか3名, 機講論, No.760-12 (昭51-4), 178.
- (3) 渡部・大坪・石渡, 機論, 45-397, A (昭54), 1078.
- (4) Marcal, P. V., *J. Strain Analy.*, 2-1 (1967), 84.
- (5) 山田, 「塑性・粘弾性」(コンピュータ構造工学講座), (昭47), 75, 培風館.
- (6) Prager, W., *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 169 (1955), 41.
- (7) Ziegler, H., *Q. Appl. Math.*, 17 (1959), 55.
- (8) 西村・滝, 第17回構造強度に関する講演会, (昭50-7), 165.
- (9) 加島・西村・村瀬, 機論, 51-461, A (昭60), 123.