混合モードにおける平板貫通き裂の進展下限界*
(平面曲げ・繰返しねじり)北岡 征一郎*¹, 江上 登*²The Propagation Threshold of a Through Crack
in a Plate under the Mixed Mode
(Plane Bending and Cyclic Torsion)

Seiichiro KITAOKA and Noboru EGAMI

In order to examine the threshold condition for the propagation of a through crack under the mixed mode, plane bending and cyclic torsion tests, and various combinations of them are carried out under the condition of the stress ratio $R = -1$ by using annealed center cracked specimens made of carbon steel. Taking account of the frictional stress acting on the crack surface under cyclic torsion, and adopting the strain energy density criterion, the threshold stress of crack propagation under the combination of plane bending and cyclic torsion can be deduced from the test results of plane bending and cyclic torsion.

Key Words: Fatigue, Center Cracked Specimen, Strain Energy Density Criterion, Mixed Mode, Crack Propagation Threshold, Plane Bending, Cyclic Torsion

1. 緒 言

機械・構造物の構成要素に発生した疲労き裂は、単一のモードよりもむしろ混合モード状態におかれる場合が多い。従来、このような混合モード下における疲労き裂の進展挙動を検討するにあたっては、主として斜め貫通き裂を有する中央き裂試験片を使用し、引張り・圧縮試験が実施されてきた⁽¹⁾。しかるに、実在の構成要素では、き裂を有する板構造部に曲げとねじりが同時に作用する混合モード状態も頻繁に生ずる⁽²⁾。したがって、このような負荷状態におかれる表面あるいは貫通き裂に対し、その進展挙動を調査することは実用上重要な課題になると考えられ、静的破壊条件の検討に対しては、若干の実験が行われている⁽³⁾が、疲労き裂に対する系統的な実験・検討はほとんどなされていない現状にある。

ところで、平板が曲げやねじりを受ける場合には、板内には応力こう配が生じ、これは板厚に支配される。また、両振り以外では、き裂の進展は板の両面で同

一とはならず、き裂の断面形状は応力比の影響を受けることになる。したがって、き裂を有する平板が、曲げ、ねじりの作用を同時に受ける場合には、これらの点を考慮して検討を加える必要がある。

以上の観点から、本報では平板曲げと繰返しねじりが同時に作用する平板貫通き裂の進展下限界条件に検討を加えることを目的とし、まず板厚を一定にとり両振り（応力比 $=-1$ ）の場合を取扱った。

2. 実験方法

2.1 試験片および試験機 本実験に使用した試験片素材は、SK-5、板厚 6 mm のみがき特殊帯板で、その機械的性質を表 1 に、化学成分を表 2 に示す。

試験片の作製に当たっては、まず研削加工により板厚を 2 mm とし、所定の切欠を作製した。切欠部近傍に対しては # 600 の紙やすりで研磨を施した後、電解研磨により鏡面仕上を行った。さらに、加工硬化層除去のため、800°C、1h の真空焼なましを施した。

図 1(a) には、本材料のき裂進展の下限界条件に対する適用基準の調査に使用した斜め貫通き裂を有する片振り引張用試験片を示した。この試験片は、あらかじめ切欠を有する平板に片振り引張りによる予き裂を発生させた後、図示のように β が 30°, 60°, 90° とな

* 昭和 62 年 10 月 31 日 山梨地方講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 4 月 24 日。

*¹ 正員、名古屋大学工学部 (〒464 名古屋市千種区不老町)。

*² 正員、名城大学理工学部 (〒468 名古屋市天白区塩釜口)。

るように切り出して作製したものである。図1(b)には曲げ・ねじり用試験片の形状・寸法を示した。

片振り引張りには、電気油圧式サーボ疲労試験機(60 Hz)を、曲げ・ねじり試験には98 N・m共振形疲労試験機(33 Hz)を使用した。

2.2 実験方法 図1(b)の試験片に対し、平面曲げ試験により試験片の長手方向に直交する長さ1~10 mm オークの貫通形予き裂を作製した。図1(a)およびこのき裂試験片に、640°C、1 hの真空焼なましを施し、前者に対しては $R=0$ で片振り引張りを、後者に対しては $R=-1$ において試験機のトルク棒と試験片の長手方向のなす角度 ϕ を $\phi=0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の5種類に選び、ねじり、曲げおよびこれら

表1 素材の機械的性質

Yield point	MPa	345
Tensile strength	MPa	712
Breaking strength	MPa	658
Elongation	%	20
Reduction of area	%	33
Young's modulus	GPa	214
Modulus of rigidity	GPa	82
Poisson's ratio	ν	0.3

1GPa=102kgf/mm²

1MPa=0.102kgf/mm²

表2 素材の化学成分

	wt. %				
	C	Si	Mn	P	S
SK5	0.86	0.21	0.36	0.007	0.006

図1 試験片の形状寸法(板厚2 mm)

の組合せ試験を実施して、き裂進展の下限界応力を調査した。なお、き裂進展の判定は、試験前と繰返し数 $N=1 \times 10^6$ 回におけるき裂近傍のレプリカを1000倍に拡大して行い、き裂先端部に3 μ m以上の進展があった場合、これを進展ありとみなした。

3. 実験結果および考察

3.1 モードI・IIの混合モード下におけるき裂進展の下限界条件 曲げ・ねじり組合せ負荷に対するき裂進展の下限界条件を検討するに先立ち、まず本材料のモードI, II混合モード下におけるき裂進展の下限界条件に適用可能な基準を検討した。

図1(a)の試験片を用い、き裂進展の下限界応力を求めた。モードI, IIの応力拡大係数の算定は文献⁽⁴⁾により、従来混合モードにおけるき裂進展の下限界条件に対して提案されている種々の基準⁽⁵⁾⁻⁽⁷⁾を用いて検討した(図2)。図には、モードIに対する下限界応力拡大係数幅 ΔK_{Ith} に基づいて求めた計算値を併記したが、本材料の混合モード下におけるき裂進展の下限界条件には、ひずみエネルギー密度基準(S_{min} 基準)⁽⁵⁾の適用が妥当といえる。

3.2 曲げ・ねじり組合せ負荷を受ける貫通き裂への S_{min} 基準の適用の要約と予き裂先端におけるき裂進展開始位置 貫通き裂を有する平板が、曲げを受ける場合にはモードI⁽⁸⁾、ねじりを受ける場合にはモードII, IIIの組合せとなるから⁽⁹⁾、これらが同時に作

図2 混合モードにおけるき裂進展の下限界条件

用すれば、モード I, II, IIIの組合せとなる。しかしながら、後述のように予き裂からのき裂進展開始の時点では、き裂の進展にはモード I, IIの寄与が支配的であると考えることができる。

曲げ・ねじり試験において、試験片に作用するモーメント T_0 の状況および採用したデカルト座標系を図3に示す。座標系の原点は板厚を二等分するき裂先端にあり、 x および y 軸はそれぞれ板の表面に平行で、かつ短辺および長辺方向に、 z 軸は板表面に垂直な方向にある。また、後述の θ は x - y 平面内の x 軸からの角度を表す。

T_0 によって試験片に作用する曲げおよびねじりモーメントを M, T , 単位幅あたりの各モーメントを M^*, T^* , 板幅を b とすれば、図3を参照して

$$M = T_0 \sin \phi, T = T_0 \cos \phi, M^* = M/b, T^* = T/b \quad \dots\dots\dots (1)$$

き裂べりの境界条件を満足するのに Reissner の板曲げ理論⁽¹⁰⁾を用いて、き裂先端近傍のモーメントとせん断力は、モーメント拡大係数 K_I, K_{II} およびせん断力拡大係数 K_{III} によって表示できる⁽¹¹⁾。また、 K_I, K_{II}, K_{III} とモーメント I, II, IIIに対する応力拡大係数 k_I, k_{II}, k_{III} との間には次式の関係が成立することが知られている⁽¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} k_I &= (12z/h^3)K_I, k_{II} = (12z/h^3)K_{II} \\ k_{III} &= (3/2h)[1 - (2z/h)^2]K_{III} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

さらに、 K_I, K_{II}, K_{III} は次式で表示できる⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \Phi M^* \sqrt{a}, K_{II} = \Psi T^* \sqrt{a} \\ K_{III} &= -\sqrt{10} \Omega T^* \sqrt{a} / [(1+\nu)h] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

a, h はそれぞれき裂の半長および板厚、 Φ, Ψ, Ω は a, h に依存する補正係数⁽⁸⁾⁽⁹⁾である。式(2), (3)より、

$$\left. \begin{aligned} k_I &= (12z/h^3) \Phi M^* \sqrt{a}, k_{II} = (12z/h^3) \Psi T^* \sqrt{a} \\ k_{III} &= -(3/2h)[1 - (2z/h)^2] \sqrt{10} \Omega T^* \sqrt{a} / [(1+\nu)h] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

すなわち、式(4)から明らかなように、曲げモーメント M^* の作用によりモード I 変形が、ねじりモーメント T^* の作用によりモード II およびモード III 変形が生じる。さらに、応力拡大係数の板厚方向の変化をみると、 k_I, k_{II} が板表面で最大となるのに対し、 k_{III} は板厚の中心で最大、板表面では零となることがわかる。

モード I, II, IIIの組合せに対するひずみエネルギー密度係数幅 ΔS は応力拡大係数幅 $\Delta k_I, \Delta k_{II}, \Delta k_{III}$ を用いて次式のように表示できる⁽⁵⁾。

$$\Delta S = a_{11} \Delta k_I^2 + 2a_{12} \Delta k_I \Delta k_{II} + a_{22} \Delta k_{II}^2 + a_{33} \Delta k_{III}^2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、本問題に対する $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{33}$ は以下のよう
に与えられている⁽¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= (1 + \cos \theta)[3 - \nu - (1 + \nu) \cos \theta] / 8E, a_{12} = \sin \theta[(1 + \nu) \cos \theta - (1 - \nu)] / 4E \\ a_{22} &= [4(1 - \cos \theta) + (1 + \nu)(3 \cos \theta - 1)(1 + \cos \theta)] / 8E, a_{33} = (1 + \nu) / 2E \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

モーメントの変動幅を ΔT_0 とすれば、式(1), (4), (5), (6)より

$$\Delta S = \frac{2a}{E} \left[\frac{3\Phi\Delta T_0}{bh^2} \right]^2 \left\{ \left(\frac{z}{h} \right)^2 F(\theta, \phi) + \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] G(\phi) \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} F(\theta, \phi) &= b_{11} \sin^2 \phi + 2b_{12} \lambda \sin \phi \cos \phi + b_{22} \lambda^2 \cos^2 \phi, G(\phi) = 5\gamma^2 \cos^2 \phi / [8(1 + \nu)] \\ b_{ij} &= 8Ea_{ij} (i, j = 1, 2), \lambda = \Psi/\Phi, \gamma = \Omega/\Phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

本問題では、応力拡大係数が板厚方向に変化する。したがって、き裂進展の下限界条件を検討するにあたっては、予き裂先端のいかなる z の位置からき裂の進展がまず始まるかを把握する必要がある。 $S_{\min}$ 基準では、き裂の進展は $\Delta S_{\min}$ が材料に固有な一定値 S_c になったとき始まる。また、 ϕ, z を特定すれば、式(7)の大カッコ内の最小値は、 $F(\theta, \phi)$ が最小値 $F(\theta, \phi)_{\min}$ をとるときに得られることは自明であり、 $F(\theta, \phi)$ が最小値をとる角度 θ は

$$\partial F / \partial \theta = 0, \partial^2 F / \partial^2 \theta > 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

によって与えられる。すなわち、板厚方向の任意の z の位置においてき裂の進展を生じさせるために、試験片に加えなければならない ΔT_0 と z の関係は、上述の考察に基づき式(7)を用いれば

$$\Delta T_0 = \frac{b\sqrt{h/a}(Eh^3\Delta S_{\min})^{1/2}}{3\sqrt{2}\Phi\{(z/h)^2F(\theta, \phi)_{\min} + [1 - (2z/h)^2]G(\phi)\}^{1/2}} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\Delta S_{\min}$ は材料に固有な一定値 S_c となり、 $F(\theta, \phi)_{\min}$ および $G(\phi)$ は補正係数 Φ, Ψ, Ω の値に数値解を代入することにより得られ、 z に依存しない。この結果、 ΔT_0 は ϕ の値のいかにかわらず、 $z = \pm h/2$ (試験片表面)において最小値をとることが証明されている⁽¹¹⁾。すなわち、予き裂からのき裂の進展は ϕ の値のいかにかわら

ず、まず試験片表面において生じ、この面内で ΔS が最小値をとる角度 θ の方向に進むといえる。したがって、この場合には式(4)から明らかなように $k_{II}=0$ となるから、モードIIIの寄与は無視できる。

以上の観点から、次節以降では、試験片表面におけるき裂進展を調査し、その進展の下限界条件について検討する。

3.3 曲げ・ねじり組合せ負荷に対するき裂進展の下限界応力 図4に、 $R=-1$ において得られたき裂進展の下限界公称応力振幅とき裂長さ $2a$ の関係を示す。ここに、 $\Delta\sigma$, $\Delta\tau$ はそれぞれ ΔM^* , ΔT^* によって矩形断面に生ずる最大曲げおよびせん断応力振幅であり、平面曲げ ($\phi=90^\circ$) に対しては $\Delta\sigma$, 他の試験に対しては $\Delta\tau$ で表示し、次式により定義した。

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= \Delta M^* / (h^2/6) \\ \Delta\tau &= \Delta T^* / (\xi h^2)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、本実験に採用した試験片形状に対しては $\xi=0.327$ であり、板の両端のわずかな領域(板幅の約5%)を除けば $\Delta\tau$ は一定値をとる⁽¹²⁾から、これを公称応力振幅とするのは妥当であると考えられる。

図において、 $\phi=0^\circ, 90^\circ$ の場合には、補正係数 ϕ, ψ に対して数値解⁽⁸⁾⁽⁹⁾を用い、それぞれの $2a=1.5\text{ mm}$ のき裂進展の下限界応力を基準にして $\Delta S_{\min}$ が一定となる計算値を併記したが、この値は $\phi=90^\circ$ では試験結果とほぼ一致するのに対し、 $\phi=0^\circ$ では実験値よりも低くなる。

図5には、 $\phi=30^\circ$ においてき裂進展の下限界応力振幅よりわずかに高い応力下における予き裂前縁からのき裂進展開始状況の一例を示した。予き裂の作製は平面曲げによったが、切欠からのき裂の進展がまず試験片表面において生ずるため、試験片断面においてき裂の前縁は曲率をもち、予き裂の長さは試験片表面において最大となる。また、この予き裂からのき裂の進展量は図にみられるように、 $\phi=30^\circ$ においても試験片表面において最大となる。これは、前述のように、まず試験片表面における予き裂先端において進展が開始することを示唆しているものと考えられる。

図3 試験片に作用するモーメントと座標系

3.3.1 き裂進展の下限界応力の推定 前述のように、き裂進展開始の時点では $k_{II}=0$ と考えることができる。そこで、式(3)の補正係数 ψ, ϕ に数値解⁽⁸⁾⁽⁹⁾を用い、本実験に採用した ϕ に対し $z=\pm h/2$ において式(7)を最小とする角度 θ を式(9)の数値計算により求めた。ついで、この値を用い、 $\phi=90^\circ$ の試験結果に基づいて他の ϕ における下限界応力振幅を $\Delta S_{\min}$ =一定の条件により求め、結果を図6に示した。計算値はいずれの角度 ϕ に対しても実験値より低くなり、両者の差は ϕ が小さくなるほど著しい。すなわち、平板貫通き裂が曲げ・ねじりを同時に受ける場合には、その進展下限界条件に $S_{\min}$ 基準を適用することは困難となる。しかるに、使用材料の斜め貫通き裂に対するモードI, II混合モード試験結果には $S_{\min}$ 基準の

図4 き裂進展の下限界応力曲線

適用が妥当であることが確認されているから、このような結果がもたらされた原因を考察してみた。

斜め貫通き裂の $R=0$ における試験では、予き裂は常に開口し、き裂面には摩擦力はほとんど作用しないものと考えられる。これに対し、丸棒表面に発生した微小き裂が曲げ・ねじり混合モードを受けるとき、モードII変位に対してはき裂面摩擦力を考慮することが必要である⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。また、矩形断面の平板では、断面寸法が一樣な丸棒とは異なりねじりによって断面のWarpingが生ずる⁽¹²⁾。また、図7に示すように予き裂は、折れ曲がりを伴って発生しているから、平板がねじり変形を受けるとき、これらはいずれもき裂面に摩擦力を働かせる要因になる。さらに、き裂の前縁は図5に示すように曲率を有するから、実際の補正係数 ϕ, ψ は数値解とは若干異なることになり、これらが実験値と計算値の相違をもたらすものと考えられる。しかしながら、図6にみられるように ϕ の減少に伴い両者の差が次第に増加するのは、式(1), (4), (7)から明らかなように ϕ の減少につれてき裂進展に寄

与する Δk_{II} の Δk_I に対する割合が相対的に増加するが、き裂面摩擦力のためこの Δk_{II} 成分が減少し、き裂進展の障害となる摩擦力の影響の度合いが次第に大きくなることが主たる要因になっているものと考えられる。

3.3.2 き裂面摩擦力を考慮したき裂進展の下限界応力の推定 本項では、予き裂前縁の曲率とき裂面摩擦力を次のような考察に基づいて考慮し、 $\phi=0^\circ, 90^\circ$ の結果を利用して他の ϕ に対するき裂進展の下限界応力の推定を行った。

対象とした予き裂では、き裂前縁が曲率を有するから、このき裂に対する補正係数は数値解とは若干異なることになる。また、ねじり変形によって生ずるき裂面摩擦力は、き裂の有効変位、ひいては先端部近傍に生ずる応力を減少させ、これは摩擦力を考慮していない数値解によって与えられる補正係数 ψ を減少させることになる。試験片表面で、引張り・せん断と圧縮・せん断が交互に作用する曲げ・ねじりとせん断のみの繰返しである繰返しねじりでは摩擦力も厳密には異なるものと思われるが⁽¹⁴⁾、ここでは繰返しねじりを受ける場合のき裂面摩擦力による補正係数の低下が他の場合にも適用できるものとしてみた。

き裂前縁の曲率と摩擦力を考慮すれば、進展下限界条件の検討には S_{min} 基準が適用できるものと考えられる。 a_{11}, a_{22} の最小値をそれぞれ a_{11min}, a_{22min} とおけば、式(5), (7)より $\phi=90^\circ, 0^\circ$ について

$$a_{11min} \Delta k_I^2 = a_{22min} \Delta k_{II}^2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし、ここで k_I, k_{II} の補正係数は数値解とは異なる ϕ^*, ψ^* となる。これらの値は未知であるが、 $\phi=90^\circ, 0^\circ$ に対するき裂進展の下限界応力振幅をそれぞれ $\Delta\sigma_{th}, \Delta\tau_{th}$ とすれば、式(2), (3), (6), (11), (12)より

$$\left(\frac{\psi^*}{\phi^*}\right)^2 = \lambda^2 = \frac{a_{11min}(\Delta\sigma_{th})^2}{a_{22min}(6\xi\Delta\tau_{th})^2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。したがって、図4の $\phi=90^\circ, 0^\circ$ のき裂進展の下限界応力振幅 $\Delta\sigma_{th}, \Delta\tau_{th}$ を用い、式(13)により任意のき裂長さについてき裂面形状と摩擦力を考慮し

図5 き裂進展開始の状況 ($\phi=30^\circ$)

図6 き裂進展の下限界応力の実験値と $\phi=90^\circ$ を利用した計算値

図7 予き裂の発生状況

図8 $\phi=0^\circ, 90^\circ$ の実験値を利用した
き裂進展の下限界応力の計算値

た λ を計算することができる。

他の ϕ , すなわち曲げ・ねじりが同時に作用する場合のき裂進展の下限界応力振幅を $\Delta\tau_{th}^*$ とし, この場合の ΔS_{min} と $\phi=90^\circ$ の ΔS_{min} を等しくおけば, 式(1), (6), (7), (11)より

$$(\xi\Delta\tau_{th}^*)^2 F(\theta, \phi)_{min} / \cos^2 \phi = (\Delta\sigma_{th})^2 (1-\nu) / 9 \quad (14)$$

が成立する。式(13)による λ の値を用い, ϕ を指定して式(9)により $F(\theta, \phi)_{min}$ を満足する θ を決定すれば, 式(8)により任意のき裂長さに対して $F(\theta, \phi)_{min}$ を計算できる。したがって, 式(14)により種々の ϕ に対する混合モード下の $\Delta\tau_{th}^*$ を求めることが可能となる。

図8には実験結果および式(14)により得られたき裂進展の下限界応力曲線をそれぞれ実線および破線で示した。図示のごとく, き裂断面形状およびき裂面摩擦力を考慮した $\phi=0^\circ, 90^\circ$ の試験結果に基づく式(13)を利用すれば, S_{min} 基準によって曲げ, ねじりを同時に受けるき裂進展の下限界応力をよい精度で推定できる。

4. 結 言

炭素工具鋼製平板に, 平面曲げにより貫通き裂を作

成し, これを対象として, 平面曲げ, 繰返しねじりおよびこれらを組合せた混合モード試験を実施して, 混合モード下のき裂進展の下限界条件に検討を加えた。得られた結果を要約すれば, 以下ようになる。

(1) 使用材料の片振り引張りにおけるモード I, II 混合モード下のき裂進展下限界条件としては, ひずみエネルギー密度基準 (S_{min} 基準) の適用が妥当である。

(2) モード I の試験結果とモード I, II に対する応力拡大係数の数値解を用い, S_{min} 基準について推定したねじりおよび曲げ・ねじり組合せ負荷に対するき裂進展の下限界応力は, いずれも実験値より低くなる。

(3) これは, 平板がねじり変形を受ける際にき裂面に作用する摩擦力により, モード II の有効変位が減少することによるところが大きい。

(4) き裂断面形状およびねじりに対する摩擦力を考慮するため, S_{min} 基準と曲げおよびねじりに対する試験結果を用いて, モード I, II の応力拡大係数の補正係数間の関係を導いた。この関係とモード I のき裂進展の下限界応力曲線を利用し, S_{min} 基準を適用すれば, 曲げ・ねじり組合せ負荷を受けるき裂進展の下限界応力を精度よく推定できる。

文 献

- (1) 例えば, Patel, A. B. and Pandey, R. K., *Fatigue Eng. Mater. Struct.*, 4-1 (1981), 65.
- (2) Au, N. M. and Liu, S. R., *Mixed Mode Crack Propagation*, (1981), 55, Sijthoff and Noordhoff.
- (3) Rubayi, N. A. and Ved. R., *Int. J. Fract.*, 12 (1976), 435.
- (4) Krenk, S., *Int. J. Solids Struct.*, 11 (1975), 693.
- (5) Sih, G. C., *Mechanics of Fracture*, 1 (1973), XX I, Noordhoff International Publishing Leyden.
- (6) Erdogan, F. and Sih, G. C., *J. Basic Eng.*, 85 (1963), 519.
- (7) 渡辺・塩見, 機講論, No. 810-7 (昭 56-7), 47.
- (8) Hartranft, R. J. and Sih, G. C. *Int. J. Eng. Sci.*, 8 (1970), 711.
- (9) Wang, N. M., *Int. J. Fract. Mech.*, 6-4 (1970), 367.
- (10) Reissner, E., *Q. Appl. Math.*, 5-1 (1947), 55.
- (11) Sih, G. C., *Mechanics of Fracture*, 3 (1976), XVII, Noordhoff International Publishing Leyden.
- (12) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, (1970) 310, McGraw-Hill.
- (13) 北岡・ほか 2 名, 機論, 51-467, A (昭 60), 1764.
- (14) 北岡・ほか 2 名, 機論, 52-480, A (昭 61), 1733.