軸方向磁場内における円柱状空か縁に内周環状き裂を有する 電導体の定常電流による特異応力*

竹内 淳^{*1}, 進藤 裕英^{*2}, 渥美 光^{*3}

Singular Stresses for a Circumferential Edge Crack in a Cylindrical Cavity under Uniform Axial Electric Current Flow and Magnetic Field

Atsushi TAKEUCHI, Yasuhide SHINDO, and Akira ATSUMI

This paper deals with the electromagnetoelastic problem of a circumferential edge crack in a cylindrical cavity under a uniform axial electric current flow and a constant axial magnetic field. The current flow is disturbed by the presence of the edge crack and the torsional stresses are caused by the interactions between the magnetic field and the disturbed current. Two problems concerning the electric current density field and the electromagnetoelastic field are formulated by means of integral transforms and reduced to two singular integral equations of the first kind. Numerical calculations are carried out and stress intensity factors are obtained for several values of geometric parameters.

Key Words: Elasticity, Electro-Magneto-Fracture Mechanics, Conductor, Edge Crack, Cylindrical Cavity, Stress Intensity Factor, Integral Transform, Singular Integral Equation

1. 緒 言

新しいエネルギー源の一つとして期待されている核融合炉の最も有力な方式としてトカマク形磁気閉込め方式が考えられている。この方式では強磁場が必要となるため超電導マグネットが使用され、極めて強大な電磁学的負荷が構造機器に作用する。例えば、超電導マグネットのトロイダルコイルには大電流・強磁場の相互作用による強大な電磁力が作用し、また第1壁や真空容器などのブランケット構造物では炉のパルス運転やプラズマのディスラプション(消滅)に伴う渦電流と強磁場との相互作用による非定常電磁力も作用している⁽¹⁾⁽²⁾。したがって強磁場・大電流下で作動する磁気閉込め核融合炉構造機器の設計および健全性評価には、電磁固体力学による構造材の力学的挙動の解明が肝要となる^{(3)~(6)}。

破壊力学はこれまで原子炉压力容器および配管系の健全性評価に盛んに用いられ^{(7)~(9)}、またその基礎とな

るき裂の静・動的解析も活発に行われているが^{(10)~(13)}、これを強磁場利用機器の安全性評価に直接用いることはできない。したがって従来の破壊力学を電磁固体力学を基盤とする破壊力学に拡張し、電磁破壊力学的観点から構造健全性評価を行うことが必要となる⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾。

強磁場の作用を受ける構造材に電流が流れると、空孔・き裂などの欠陥の存在により電流が乱され電流こう配に変化が生ずる。この電流場は強磁場と相互作用して新しいローレンツ形電磁物体力を発生させ、き裂先端に特異応力を誘起する⁽⁶⁾⁽¹⁶⁾。

そこで本報では、円柱状空か縁に内周環状き裂を有する電導体の電磁弾性解析を行い、特異応力を求めて詳細に検討した。定常電流はき裂面に垂直に流れ、磁場も同方向に作用するものとする。またき裂面および円柱状空か面は電氣的絶縁の場合を考える。解析はフーリエ変換およびハンケル変換を用い、電流場および電磁弾性場に関する第1種特異積分方程式に導いて解く方法によった⁽¹⁷⁾。第1種特異積分方程式を数値解析し、円柱状空か面の影響を考慮して、電磁力による応力拡大係数を明らかにした。本報の解法は渦電流(非定常電流)に関する非定常応答問題へも拡張可能である。

* 昭和62年10月3日 東北支部仙台地方講演会において講演、原稿受付 昭和62年2月27日。

^{*1} 准員, (株)大林組 (〒101 東京都千代田区神田司町2-3)。

^{*2} 正員, 東北大学工学部 (〒980 仙台市荒巻字青葉)。

^{*3} 正員, 宮城職業訓練短期大学校 (〒987-22 宮城県栗原郡築館町字萩沢土橋26)。

2. 問題の呈示および電流解析

図1に示すように円柱座標系 (r, θ, z) を採用し z 軸を半径 a の円柱状空かの対称軸にとる。 $z=0$ 面上の空かまわりに深さ c の内周環状縁き裂をもつ均質等方性電導体を仮定し、磁束密度 B_0 の一様軸方向磁場と軸方向定常電流が作用する場合の電磁弾性問題を設定する。このとき、き裂の存在により電流場はじょう乱され軸方向磁場と相互作用してき裂先端にねじりの特異応力を誘起する。

いま誘電ポテンシャルを $\Phi_e(r, z)$ 、そのじょう乱項を $\varphi_e(r, z)$ とすると、

$$\Phi_e(r, z) = -\frac{J_0}{\sigma} z + \varphi_e(r, z) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 σ は電気伝導率、 J_0 は内周環状縁き裂が存在しない場合の一定の軸方向定常電流である。じょう乱ポテンシャル φ_e に関する支配方程式は

$$\frac{1}{r}(r\varphi_{e,r})_{,r} + \varphi_{e,zz} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、コンマは座標変数に関する偏微分を示す。式(2)はラプラスの方程式である。電流密度ベクトル $\mathbf{J}$ の r, z 方向成分 J_r, J_z は

$$\left. \begin{aligned} J_r &= -\sigma\varphi_{e,r} \\ J_z &= J_0 - \sigma\varphi_{e,z} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

内周環状縁き裂面および円柱状空か縁は電氣的に絶縁されているものとする。じょう乱ポテンシャル φ_e に関する境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{e,z} &= \frac{J_0}{\sigma} (z=0, a < r < d) \\ \varphi_e &= 0 (z=0, r \geq d) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\varphi_{e,r} = 0 (r=a, -\infty < z < \infty) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $d=c+a$ である。フーリエ変換・ハンケル変

図1 円柱状空か縁に内周環状き裂を有する電導体

換を用いると式(2)を満足する φ_e は

$$\varphi_e = \int_0^\infty A(s)e^{-sz}J_0(sr)ds + \int_0^\infty C(s)K_0(sr) \times \sin(sz)ds \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $J_n(\)$ は n 次の第1種ベッセル関数、 $K_n(\)$ は n 次の第2種変形ベッセル関数、 $A(s), C(s)$ は境界条件より決定される未知関数であり、無限遠の条件を考慮した。式(3)より電流密度成分は

$$\left. \begin{aligned} J_r &= \sigma \int_0^\infty \{sA(s)e^{-sz}J_1(sr) \\ &\quad + sC(s)K_1(sr)\sin(sz)\} ds \\ J_z &= J_0 + \sigma \int_0^\infty \{sA(s)e^{-sz}J_0(sr) \\ &\quad - sC(s)K_0(sr)\cos(sz)\} ds \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

境界条件式(4)を用いると、次の $A(s)$ に関する双積分方程式が得られる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty sA(s)J_0(sr)ds - \int_0^\infty sC(s)K_0(sr)ds \\ = -\frac{J_0}{\sigma} (a < r < d) \\ \int_0^\infty A(s)J_0(sr)ds = 0 \quad (r \geq d) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

また、境界条件式(5)より次の未知関数間の関係式が得られる。

$$C(s)K_1(sa) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta A(\eta)J_1(\eta a)}{\eta^2 + s^2} d\eta \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、次式で定義される新しい未知関数 $\psi(\xi)$ を導入する。

$$A(s) = \int_a^d \xi \psi(\xi) J_1(s\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(10)を式(8)に代入し式(9)を考慮すると次の $\psi(\xi)$ に関する第1種特異積分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \int_a^d \xi \psi(\xi) [R_0(r, \xi) + R_1(r, \xi)] d\xi \\ = -\frac{J_0}{\sigma} \quad (a < r < d) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに

$$R_0(r, \xi) = \int_0^\infty s J_1(s\xi) J_0(sr) ds \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$R_1(r, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty s \frac{I_1(sa)}{K_1(sa)} K_1(s\xi) K_0(sr) d\xi \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $I_n(\)$ は n 次の第1種変形ベッセル関数である。式(12)のフレドホルム核 $R_0(r, \xi)$ はコーシーおよび対数特異核を有しており、これらを分離すると、

$$\left. \begin{aligned} \xi r R_0(r, \xi) &= \frac{r}{\pi(\xi-r)} - \frac{3}{2\pi} \log \left| \frac{2(\xi-r)}{c} \right| \\ &\quad + M_0(r, \xi) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $M_0(r, \xi)$ は特異性をもたないフレドホルム核

で,

$$M_0(r, \xi) = \frac{r}{\pi(\xi-r)} \left\{ E\left(\frac{\xi}{r}\right) - 1 \right\} - \frac{r}{\pi(\xi+r)} E\left(\frac{\xi}{r}\right) + \frac{2}{\pi} K\left(\frac{\xi}{r}\right) + \frac{3}{2\pi} \log \left| \frac{2(\xi-r)}{c} \right| \quad (r > \xi) \\ = \frac{r}{\pi(\xi-r)} \left\{ E\left(\frac{r}{\xi}\right) - 1 \right\} + \frac{r}{\pi(\xi+r)} E\left(\frac{r}{\xi}\right) + \frac{3}{2\pi} \log \left| \frac{2(\xi-r)}{c} \right| \quad (r < \xi) \quad \dots\dots\dots (15)$$

上式中, K, E は第1種, 第2種完全な円積分である. ここで, 次の変数および関数変換を行う.

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \frac{r}{c}, \xi_0 = \frac{\xi}{c}, a_c = \frac{c}{a} \\ r &= \frac{1}{2}(c\zeta + d + a), \xi = \frac{1}{2}(c\tau + d + a) \quad \dots\dots\dots (16) \\ \phi(\xi) &= \frac{J_0}{\sigma} \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2} \phi(\tau) \end{aligned} \right\}$$

結局, 第1種特異積分方程式(11)は

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2} \phi(\tau) \left[\frac{1}{\tau-\zeta} - \frac{3}{4r_0} \log |\tau-\zeta| + L(\zeta, \tau) \right] d\tau = -1 \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに

$$L(\zeta, \tau) = \frac{\pi}{2r_0} [M_0(r, \xi) + r_0 \xi_0 c^2 R_1(r, \xi)] \quad \dots\dots\dots (18)$$

数値的評価を容易にするため式(13)を次のように書き換える.

$$c^2 R_1(r, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[s \frac{I_1(s a_c)}{K_1(s \xi_0)} K_1(s \xi_0) K_0(s r_0) - A_0(s, r_0, \xi_0) \right] ds + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_0(s, r_0, \xi_0) ds \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに

$$A_0(s, r_0, \xi_0) = a_1 e^{-(r_0 + \xi_0 - 2a_c)s} + \frac{a_2}{s} \{ e^{-(r_0 + \xi_0 - 2a_c)s} - e^{-\delta_0 s} \} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\int_0^\infty A_0(s, r_0, \xi_0) ds = \frac{a_1}{r_0 + \xi_0 - 2a_c} + a_2 \log \left[\frac{\delta_0}{r_0 + \xi_0 - 2a_c} \right] \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに, a_1, a_2 は $s \frac{I_1(s a_c)}{K_1(s \xi_0)} K_1(s \xi_0) K_0(s r_0)$ の $s \rightarrow \infty$ における漸近展開から得られる関数であり,

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2(r_0 \xi_0)^{1/2}} \\ a_2 &= \frac{a_1}{8} \left(-\frac{1}{r_0} + \frac{3}{\xi_0} - \frac{6}{a_c} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

また, δ_0 は s の大きい場合の被積分関数の値に影響し

ないように選ばれるものであり, ここでは $\delta_0 = 2 + 2a_c$ とした.

積分方程式(17)の解 $\phi(\tau)$ をヤコビ多項式で展開すると

$$\phi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n^{(-1/2, 1/2)}(\tau) \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに, $P_n^{(-1/2, 1/2)}(\tau)$ は n 次のヤコビ多項式である. また, 未知係数 B_n は次の無限連立1次方程式の解である.

$$\theta_k^{(1/2, -1/2)} B_k + \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_{kn} + C_{kn}) B_n = -\pi \delta_{k0} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに, δ_{kn} はクロネッカーのデルタ, $\theta_k^{(1/2, -1/2)}, \gamma_{kn}, C_{kn}$ は

$$\left. \begin{aligned} \theta_0^{(1/2, -1/2)} &= \pi \\ \theta_k^{(1/2, -1/2)} &= \frac{2(2k)!(2k+2)! \pi}{(1+2k)(k!)^3 (k+1)! 2^{2(k+1)}} \quad \dots\dots\dots (25) \\ &\quad (k=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\}$$

$$\gamma_{kn} = \int_{-1}^1 P_k^{(1/2, -1/2)}(\zeta) w_n(\zeta) \left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta} \right)^{1/2} d\zeta \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$C_{kn} = \int_{-1}^1 P_k^{(1/2, -1/2)}(\zeta) p_n(\zeta) \left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta} \right)^{1/2} d\zeta \quad \dots\dots\dots (27)$$

$w_n(\zeta), p_n(\zeta)$ は

$$\left. \begin{aligned} w_0(\zeta) &= \frac{3}{4r_0} (\zeta + \log 2) \\ w_n(\zeta) &= \frac{3}{4r_0} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \left\{ \frac{T_n(\zeta)}{n} + \frac{T_{n+1}(\zeta)}{n+1} \right\} \quad \dots\dots\dots (28) \\ &\quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\}$$

$$p_n(\zeta) = \int_{-1}^1 L(\zeta, \tau) P_n^{(-1/2, 1/2)}(\tau) \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2} d\tau \quad \dots\dots\dots (29)$$

上式中, $T_n(\zeta)$ は第1種チェビシエフ多項式である. また式(26), (27), (29)の積分は次のガウス・ヤコビの数値積分公式により容易に評価できる.

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^{1/2} f_p(\tau) d\tau &\doteq \frac{2\pi}{2N_p+1} \sum_{i=1}^{N_p} (1-\xi_i) f_p(\xi_i) \\ \xi_i &= \cos \left(\frac{2i}{2N_p+1} \right) \pi \\ \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2} f_q(\tau) d\tau &\doteq \frac{2\pi}{2N_q+1} \sum_{j=1}^{N_q} (1+\tau_j) f_q(\tau_j) \\ \tau_j &= \cos \left(\frac{2j-1}{2N_q+1} \right) \pi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここに, N_p, N_q は分点数である.

3. 電磁弾性解析

2章で得られた電流密度成分 J_r と軸方向磁場 B_0 はねじり電磁物体力 $-B_0 J_r$ を生ずる. 軸対称ねじり変形を仮定すると, r, θ, z 方向の変位 u_r, u_θ, u_z は,

$$u_r = u_z = 0 \quad u_\theta = u_\theta(r, z) \quad \dots\dots\dots (31)$$

変位場に対応する応力場は

$$\sigma_{r\theta} = \mu r (u_{\theta}/r)_{,r} \quad \sigma_{z\theta} = \mu u_{\theta,z} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 μ は横弾性係数、他の応力成分は零である。電磁物体力を考慮して u_{θ} に関する平衡方程式を求めると、

$$u_{\theta,rr} + \frac{1}{r} u_{\theta,r} - \frac{1}{r^2} u_{\theta} + u_{\theta,zz} - \frac{B_0 J_r}{\mu} = 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

き裂面、円柱状空か面の応力自由を考慮すると、境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z\theta} &= 0 \quad (z=0, a < r < d) \\ u_{\theta} &= 0 \quad (z=0, r \geq d) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (r=a, -\infty < z < \infty) \quad \dots\dots\dots (35)$$

無限遠の条件を考慮し、フーリエ変換・ハンケル変換を用いると、 θ 方向変位成分 u_{θ} は

$$\begin{aligned} u_{\theta} &= \int_0^{\infty} D(s) e^{-sz} J_1(sr) ds \\ &+ \int_0^{\infty} F(s) K_1(sr) \sin(sz) ds \\ &- \frac{\sigma B_0}{2\mu} \int_0^{\infty} A(s) z e^{-sz} J_1(sr) ds \\ &- \frac{\sigma B_0}{2\mu} \int_0^{\infty} C(s) r K_0(sr) \sin(sz) ds \quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

ここに、 $D(s)$ 、 $F(s)$ は境界条件式より決定される未知関数である。応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r\theta} &= - \int_0^{\infty} s D(s) e^{-sz} J_2(sr) ds \\ &- \int_0^{\infty} s F(s) K_2(sr) \sin(sz) ds \\ &+ \frac{\sigma B_0}{2\mu} \int_0^{\infty} s A(s) z e^{-sz} J_2(sr) ds \\ &+ \frac{\sigma B_0}{2\mu} \int_0^{\infty} s r C(s) K_1(sr) \sin(sz) ds \\ \sigma_{z\theta} &= - \int_0^{\infty} s D(s) e^{-sz} J_1(sr) ds \\ &+ \int_0^{\infty} s F(s) K_1(sr) \cos(sz) ds \\ &- \frac{\sigma B_0}{2\mu} \int_0^{\infty} A(s) (1-sz) e^{-sz} J_1(sr) ds \\ &- \frac{\sigma B_0}{2\mu} \int_0^{\infty} s r C(s) K_0(sr) \cos(sz) ds \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (37)$$

境界条件式(34)を用いると、次の未知関数 $D(s)$ に関する双積分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} s D(s) J_1(sr) ds &= \int_0^{\infty} s F(s) K_1(sr) ds \\ &- \frac{\sigma B_0}{2\mu} \int_0^{\infty} A(s) J_1(sr) ds \\ &- \frac{\sigma B_0}{2\mu} \int_0^{\infty} C(s) s r K_0(sr) ds \quad (a < r < d) \\ \int_0^{\infty} D(s) J_1(sr) ds &= 0 \quad (r \geq d) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

また式(35)より、未知関数間の関係式は

$$\begin{aligned} F(s) K_2(sa) &= - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta D(\eta) J_2(\eta a)}{\eta^2 + s^2} d\eta \\ &+ \frac{\sigma B_0}{2\mu} \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 A(\eta) J_2(\eta a)}{(\eta^2 + s^2)^2} d\eta \\ &- \frac{\sigma B_0}{2\mu} C(s) a K_1(sa) \quad \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

ここで、次式で定義される新しい未知関数 $\Psi(\xi)$ を導入する。すなわち

$$D(s) = \int_a^d \xi \Psi(\xi) J_2(s\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (40)$$

式(40)を用いると、双積分方程式(38)より次の $\Psi(\xi)$ に関する第1種特異積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} &\int_a^d \xi \Psi(\xi) [R_0'(r, \xi) + R_1'(r, \xi)] d\xi \\ &= - \frac{\sigma B_0}{2\mu} \int_a^d \xi \psi(\xi) [R_2(r, \xi) + r R_1(r, \xi) \\ &- \xi R_1'(r, \xi)] d\xi \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

ここに

$$R_0'(r, \xi) = \int_0^{\infty} s J_2(s\xi) J_1(sr) ds \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$R_1'(r, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s \frac{I_2(sa)}{K_2(sa)} K_2(s\xi) K_1(sr) ds \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$R_2(r, \xi) = - \int_0^{\infty} J_1(s\xi) J_1(sr) ds \quad \dots\dots\dots (44)$$

式(42)、(44)のフレドホルム核 $R_0'(r, \xi)$ 、 $R_2(r, \xi)$ のコーシーおよび対数特異核を分離すると、

$$\begin{aligned} \xi^2 R_0'(r, \xi) &= \frac{r}{\pi(\xi-r)} - \frac{3}{2\pi} \log \left| \frac{2(\xi-r)}{c} \right| \\ &+ M_0'(r, \xi) \quad \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} M_0'(r, \xi) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{r^2}{(\xi+r)\xi} - 2 \right\} E\left(\frac{\xi}{r}\right) \\ &+ \frac{r \left\{ \frac{r}{\xi} E\left(\frac{\xi}{r}\right) - 1 \right\}}{\pi(\xi-r)} \\ &+ \frac{4}{\pi} K\left(\frac{\xi}{r}\right) + \frac{3}{2\pi} \log \left| \frac{2(\xi-r)}{c} \right| \quad (r > \xi) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{r}{\xi+r} - 2 \frac{\xi}{r} \right) E\left(\frac{r}{\xi}\right) + \frac{r \left\{ E\left(\frac{r}{\xi}\right) - 1 \right\}}{\pi(\xi-r)} \\ &+ \frac{2}{\pi} \frac{\xi}{r} K\left(\frac{r}{\xi}\right) + \frac{3}{2\pi} \log \left| \frac{2(\xi-r)}{c} \right| \quad (r < \xi) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$\begin{aligned} \xi R_2(r, \xi) &= - \frac{3}{2\pi} \log \left| \frac{2(\xi-r)}{c} \right| + M_2(r, \xi) \\ &\quad \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

$$M_2(r, \xi) = \frac{2}{\pi} \left\{ E\left(\frac{\xi}{r}\right) - K\left(\frac{\xi}{r}\right) \right\} + \frac{3}{2\pi} \log \left| \frac{2(\xi-r)}{c} \right| \quad (r > \xi) \\ = \frac{2}{\pi} \frac{\xi}{r} \left\{ E\left(\frac{r}{\xi}\right) - K\left(\frac{r}{\xi}\right) \right\} + \frac{3}{2\pi} \log \left| \frac{2(\xi-r)}{c} \right| \quad (r < \xi) \quad \dots\dots\dots (48)$$

ここで、式(16)に加え次の関数変換を行う。

$$\frac{\Psi(\xi)}{\xi} = \frac{\sigma B_0}{2\mu} \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2} \Phi(\tau) \quad \dots\dots\dots (49)$$

結局、第1種特異積分方程式(41)は

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2} \Phi(\tau) \left[\frac{1}{\tau-\xi} - \frac{3}{4r_0} \log |\tau-\xi| + L_1(\xi, \tau) \right] d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2} \phi(\tau) \times \left[-\frac{3}{4r_0} \log |\tau-\xi| + L_2(\xi, \tau) \right] d\tau \quad \dots\dots\dots (50)$$

ここに

$$L_1(\xi, \tau) = \frac{\pi}{2r_0} [M_0(r, \xi) + \xi_0^2 c^2 R_1(r, \xi)] \quad \dots\dots\dots (51)$$

$$L_2(\xi, \tau) = \frac{\pi}{2r_0} [M_2(r, \xi) + r_0 \xi_0 c^2 R_1(r, \xi) - \xi_0^2 c^2 R_1(r, \xi)] \quad \dots\dots\dots (52)$$

数値的評価を容易にするため、式(43)の $R_1(r, \xi)$ を次のように書き換える。

$$c^2 R_1(r, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[s \frac{I_2(s a_c)}{K_2(s a_c)} K_2(s \xi_0) K_1(s r_0) - A_0(s, r_0, \xi_0) \right] ds + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_0(s, r_0, \xi_0) ds \quad \dots\dots\dots (53)$$

$$A_0(s, r_0, \xi_0) = a_1' e^{-(r_0 + \xi_0 - 2a_c)s} + \frac{a_2'}{s} \{ e^{-(r_0 + \xi_0 - 2a_c)s} - e^{-\delta_0 s} \} \int_0^\infty A_0(s, r_0, \xi_0) ds = \frac{a_1'}{r_0 + \xi_0 - 2a_c} + a_2' \log \left[\frac{\delta_0}{r_0 + \xi_0 - 2a_c} \right] \quad \dots\dots\dots (54)$$

ここに、 a_1' , a_2' は $s \frac{I_2(s a_c)}{K_2(s a_c)} K_2(s \xi_0) K_1(s r_0)$ の $s \rightarrow \infty$ における漸近展開から得られる関数であり、

$$a_1' = a_1 \\ a_2' = \frac{a_1}{8} \left(\frac{3}{r_0} + \frac{15}{\xi_0} - \frac{30}{a_c} \right) \quad \dots\dots\dots (55)$$

積分方程式(50)の解は

$$\Phi(\tau) = \sum_{n=0}^\infty B_n' P_n^{(-1/2, 1/2)}(\tau) \quad \dots\dots\dots (56)$$

ここに B_n' は次の無限連立1次方程式の解である。

$$\theta_k^{(1/2, -1/2)} B_k' + \sum_{n=0}^\infty (\gamma_{kn} + C_{1kn}) B_n' = \sum_{n=0}^\infty B_n (\gamma_{kn} + C_{2kn}) \quad \dots\dots\dots (57)$$

上式中 B_n は式(24)より求め、 C_{1kn} , C_{2kn} は

$$C_{1kn} = \int_{-1}^1 P_k^{(1/2, -1/2)}(\xi) p_{1n}(\xi) \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{1/2} d\xi \quad \dots\dots\dots (58)$$

$$C_{2kn} = \int_{-1}^1 P_k^{(1/2, -1/2)}(\xi) p_{2n}(\xi) \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{1/2} d\xi \quad \dots\dots\dots (59)$$

$p_{1n}(\xi)$, $p_{2n}(\xi)$ は、

$$p_{1n}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 L_1(\xi, \tau) P_n^{(-1/2, 1/2)}(\tau) \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2} d\tau \quad \dots\dots\dots (60)$$

$$p_{2n}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 L_2(\xi, \tau) P_n^{(-1/2, 1/2)}(\tau) \left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2} d\tau \quad \dots\dots\dots (61)$$

式(58)～(61)の積分は前節同様ガウス・ヤコビの数値積分公式より容易に評価できる。

4. 応力拡大係数

き裂先端近傍の応力の特異項を求めると

$$\sigma_{r\theta} \sim \frac{K_3}{(2r_1)^{1/2}} \cos \frac{\theta_1}{2} \\ \sigma_{z\theta} \sim \frac{K_3}{(2r_1)^{1/2}} \sin \frac{\theta_1}{2} \quad \dots\dots\dots (62)$$

ここに、 r_1 , θ_1 はき裂先端を原点とする極座標であり、

$$r_1 = \{(r-d)^2 + z^2\}^{1/2}, \quad \theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{z}{r-d} \right) \quad \dots\dots\dots (63)$$

また、 K_3 は次式で定義される応力拡大係数である。

$$K_3 = \lim_{r \rightarrow d^+} \{2(r-d)\}^{1/2} \sigma_{z\theta}(r, 0) \\ = K_{3p} 3\pi \left(\frac{1-a_0}{2} \right)^{1/2} \sum_{n=0}^\infty B_n' P_n^{(-1/2, 1/2)}(1) \quad \dots\dots\dots (64)$$

上式中、 K_{3p} は半径 d の円板状き裂を有する無限電導体の応力拡大係数⁽¹⁶⁾であり、

$$K_{3p} = \frac{1}{3\pi} B_0 J_0 d^{3/2} \quad \dots\dots\dots (65)$$

また、 a_0 , $P_n^{(-1/2, 1/2)}(1)$ は

$$a_0 = a/d \quad \dots\dots\dots (66)$$

$$P_n^{(-1/2, 1/2)}(1) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \quad \dots\dots\dots (67)$$

5. 数値結果および考察

無限連立1次方程式(24), (57)を数値解析し、円柱状空か縁に内周環状き裂を有する電導体の応力拡大係数を明らかにする。図2は半径比 a_0 に対する無次元応力拡大係数 K_3/K_{3p} の値を示したものである。応力拡大係数は半径 d の円板状き裂の場合の応力拡大係数 $K_{3p} = (1/3\pi) B_0 J_0 d^{3/2}$ によって無次元化し、 K_3/K_{3p} として求めた。応力拡大係数 K_3/K_{3p} は半径比 a_0 により変化し、 $a_0 \rightarrow 0.0$ の時円板状き裂の解に、 $a_0 \rightarrow 1.0$ のとき長さ c の縁き裂を有する半無限体の解に漸近する。

図2 半径比 a_0 に対する応力拡大係数 K_3/K_{3p} の変化

また、 a_0 の増大に伴い減少し零に漸近する。 a_0 の影響は電流じょう乱の影響も含むため顕著である。

ここで、 $a_0 \rightarrow 1.0$ の解を二次元縁き裂を有する半無限体の解と比較するため、機械的ねじりせん断負荷が作用する場合の応力拡大係数について検討する。この場合の境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z\theta} &= -\tau_0(r/d) & (z=0, a < r < d) \\ u_\theta &= 0 & (z=0, r \geq d) \\ \sigma_{r\theta} &= 0 & (r=a, -\infty < z < \infty) \end{aligned} \right\} \dots (68)$$

ここに τ_0 は応力の次元を有する定数である。 $a_0=0.95$, 0.99 の応力拡大係数を求めると、

$$K_3/\tau_0 c^{1/2} = 0.932(a_0=0.95), 0.984(a_0=0.99)$$

となる。 $a_0=1.0$ の解は厳密解が得られており、 $K_3/\tau_0 c^{1/2}=1.0$ となる。 $a_0=0.99$ の応力拡大係数は二次元縁き裂を有する半無限体の応力拡大係数の良い近似的評価を与えている。 $a_0=0.95, 0.99$ の電磁力による応力拡大係数の値を求めると、

$$K_3/(B_0 J_0 c^{3/2}/4) = 1.661(a_0=0.95), 1.852(a_0=0.99)$$

となる。 $a_0=0.99$ の応力拡大係数は長さ c の縁き裂を有する半無限電導体の応力拡大係数の近似解とみなすことができる。

6. 結 言

き裂を有する電導体のモデルとして、円柱状空か縁に内周環状き裂を有する無限体を考え、電磁力によるき裂先端近傍の特異応力を理論解析した。解析は積分変換法を用い、電流場および電磁弾性場に関する第1種特異積分方程式に導き、その解をヤコビ多項式で展開して高精度な解を得た。定常電流および磁場による応力拡大係数を各種電導体形状について定量的に明らかにし、電磁場下のき裂の挙動特性を詳細に検討した。

終わりに、本研究の一部は昭和61年度文部省科学研究費の助成によるものであることを記し、謝意を表する。

文 献

- (1) 矢川・吉村, 機械の研究, 35-3 (昭58), 359.
- (2) 矢川・吉村, 機械の研究, 35-4 (昭58), 487.
- (3) Parkus, H. ed., *Electromagnetic Interactions in Elastic Solids*, (1979), Springer-Verlag.
- (4) Yamamoto, Y. and Miya, K. eds., *The Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures*, (1987), 1, North-Holland.
- (5) 進藤, 機論, 49-448, A (昭58), 1467.
- (6) 進藤, 機械の研究, 37-5 (昭60), 577.
- (7) 高橋・庄子・鈴木, 防食技術, 28-5 (昭54), 292.
- (8) 小林, 機誌, 87-786 (昭59), 448.
- (9) 庄子, 機誌, 89-807 (昭61), 165.
- (10) 青木, 機誌, 84-748 (昭56), 243.
- (11) 伊藤, 機論, 49-446, A (昭58), 1185.
- (12) Murakoshi, Y., Shindo, Y. and Atsumi, A., *Comput. Struct.*, 21-6 (1985), 1137.
- (13) Nozaki, H., Shindo, Y. and Atsumi, A., *Eng. Fract. Mech.*, 23-6 (1986), 943.
- (14) 高橋・宮, 機誌, 89-807 (昭61), 178.
- (15) Shindo, Y., Shoji, T. and Saka, M., *The Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures*, (1987), North-Holland, 131.
- (16) Shindo, Y., *Eng. Fract. Mech.*, 23-6 (1986), 349.
- (17) 渥美・進藤・三ヶ田, 機論, 51-462, A (昭60), 349.

討 論

〔質問〕 矢川 元基・吉村 忍

〔東京大学工学部〕

ローレンツ形電磁物体力によるき裂まわりの特異応力について詳細に検討されたことに敬意を表する。さて、以下の点についてご教示願いたい。

現在き裂の問題では、表面き裂のような三次元き裂前縁の応力拡大係数など破壊パラメータの分布が大き

な注目を集めているが、本手法をそうした三次元問題に適用することを考えておられるか。

〔回答〕 本研究は、例えば半だ円状表面き裂の中央部付近の破壊パラメータ評価に用いることもできる。著者らも表面き裂のような三次元問題解明を目指しており、現在本手法の三次元表面き裂問題への拡張を検討中である。