無限円柱の非定常熱応力における最適加熱問題*

野 田 直 剛*¹Optimal Heating Problem for Transient Thermal Stress in
a Long Circular Cylinder

Noaotake NODA

This paper treats an optimal heating problem for transient thermal stress in a long circular cylinder so as to determine the temperature of the surrounding medium under prescribed mechanical boundary conditions. In the present investigation, the Laplace transform is used, and the exact solutions for the surrounding temperature and thermal stresses are obtained. The numerical results for the temperature and thermal stresses are shown in figures.

Key Words: Elasticity, Thermoelasticity, Optimal Heating Problem, Cylinder, Unsteady State, Axisymmetry.

1. 結 言

現在まで膨大な数の熱応力に関する研究がなされているが、与えられた温度の初期条件・境界条件のもとに熱伝導方程式を解いて温度分布を求め、その温度分布によって生ずる熱応力を求めるのが普通である。しかし最近になり、いわゆる最適加熱問題あるいは最適冷却問題と呼ばれる研究が始められている。これは、ある力学的条件を満足するように最適加熱方法あるいは最適冷却方法を求める問題である。例えばWeitsman⁽¹⁾とHerper⁽²⁾はおのおの別々に粘弾性体に生じる残留応力を最小にする最適冷却過程について研究を行っている。また、Meric⁽³⁾は定常状態における熱弾性体の最適加熱問題を有限要素法を用いて解析を行っている。

本研究は最適加熱問題の一つとして、円柱の境界で垂直変位が与えられた場合、その変形を生じさせる周囲媒質の最適加熱温度を決定する円柱の非定常熱応力を理論解析したものである。解析にはラプラス変換を用い、周囲媒質の最適加熱温度と円柱内に生ずる温度

ならびに熱応力を決定した。また数値計算を実行し、周囲媒質の最適加熱温度と円柱内に生じる温度と熱応力を図示した。

2. 解 析

半径 a の無限円柱の軸対称非定常熱応力問題について考える。軸対称熱応力問題は熱弾性変位ポテンシャル ϕ とラプの変位関数 L を用いて解析することができる。このとき、変位と応力成分は

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \phi_{,r} - L_{,rz} \\ u_z &= \phi_{,z} + 2(1-\nu)\nabla^2 L - L_{,zz} \\ \sigma_{rr} &= 2\mu[\phi_{,rr} - \nabla^2 \phi + (\nu\nabla^2 L - L_{,rr})_{,z}] \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu[r^{-1}\phi_{,r} - \nabla^2 \phi + (\nu\nabla^2 L - r^{-1}L_{,r})_{,z}] \\ \sigma_{zz} &= 2\mu[\phi_{,zz} - \nabla^2 \phi + \{(2-\nu)\nabla^2 L - L_{,zz}\}_{,z}] \\ \sigma_{rz} &= 2\mu[\phi_{,rz} + \{(1-\nu)\nabla^2 L - L_{,zz}\}_{,r}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 μ はラーメの定数、 ν はポアソン比、 $'$ は後に続く変数での偏微分を表し、 $\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$ である。この場合、 ϕ と L が満足すべき基礎方程式は

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= KT \\ K &= (1+\nu)a/(1-\nu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 L = 0 \dots\dots\dots (3)$$

* 昭和62年11月3日 北陸信越支部北陸地方学術講演会において講演、原稿受付 昭和62年5月28日。

*¹ 正員、静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北三)。

ただし, α は線膨張係数, T は温度である.

次に力学的境界条件について考える. 半径 $r=a$ 上の垂直変位が規定されるとすると

$$r=a \text{ にて } \sigma_{rr}=0 \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

$$r=a \text{ にて } \sigma_{rz}=0 \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

$$r=a \text{ にて } u_r=u_0 f(z) g(t) \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

ここで, u_0 は一定な変位, 関数 $f(z)$, $g(t)$ は与えられるものとし, t は時間である.

さて, 解析にあたり, 次式で定義されるラプラス変換を用いる.

$$L^*(p)=\int_0^\infty L(t)e^{-pt}dt \quad \cdots \cdots \cdots (7)$$

基礎式(2), (3)および境界条件(4)~(6)をラプラス変換すれば

$$\nabla^2 \phi^* = K T^* \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 L^* = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

$$r=a \text{ にて } \sigma_{rr}^* = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

$$r=a \text{ にて } \sigma_{rz}^* = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

$$r=a \text{ にて } u_r^* = u_0 f(z) g^*(p) \quad \cdots \cdots \cdots (12)$$

式(9)を満足する関数 L として次式を採用する.

$$L^* = K \int_0^\infty s^{-2} \{ A I_0(sr) + B s r I_1(sr) \} \sin sz ds \quad \cdots \cdots \cdots (13)$$

ただし, $I_n(\)$ は n 次の変形ベッセル関数である. 式(1)をラプラス変換し, その式に式(13)を代入すると

$$u_r^* = -K \int_0^\infty \{ A I_1(sr) + B s r I_0(sr) \} \cos sz ds + \phi_{,r} \quad \cdots \cdots \cdots (14)$$

$$u_z^* = K \int_0^\infty [A I_0(sr) + B \{ 4(1-\nu) I_0(sr) + s r I_1(sr) \}] \sin sz ds + \phi_{,z} \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

$$\frac{\sigma_{rr}^*}{2\mu} = K \int_0^\infty \left[A s \left\{ \frac{I_1(sr)}{sr} - I_0(sr) \right\} - B s \{ (1-2\nu) I_0(sr) + s r I_1(sr) \} \right] \cos sz ds$$

$$-2\nu) I_0(sr) + s r I_1(sr) \} \times \cos sz ds + \phi_{,rr} - \nabla^2 \phi \quad \cdots \cdots \cdots (16)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}^*}{2\mu} = -K \int_0^\infty \left\{ A s \frac{I_1(sr)}{sr} + B s (1-2\nu) I_0(sr) \right\} \times \cos sz ds + r^{-1} \phi_{,r} - \nabla^2 \phi \quad \cdots \cdots \cdots (17)$$

$$\frac{\sigma_{zz}^*}{2\mu} = K \int_0^\infty [A s I_0(sr) + B s \{ 2(2-\nu) I_0(sr) + s r I_1(sr) \}] \cos sz ds + \phi_{,zz} - \nabla^2 \phi \quad \cdots \cdots \cdots (18)$$

$$\frac{\sigma_{rz}^*}{2\mu} = K \int_0^\infty [A s I_1(sr) + B s \{ 2(1-\nu) I_1(sr) + s r I_0(sr) \}] \sin sz ds + \phi_{,rz} \quad \cdots \cdots \cdots (19)$$

よって, 境界条件式(10)~(12)より, 未知係数 A と B および熱弾性変位ポテンシャル ϕ^* を決定すればよい. しかし, 直接 ϕ^* を決定することは困難であるので, 式(8)により ϕ^* と直接関係する温度 T^* について考える.

さて, 内部熱発生のない熱伝導方程式は

$$\kappa \nabla^2 T = T_{,t} \quad \cdots \cdots \cdots (20)$$

ただし, κ は熱拡散率である. 式(20)をラプラス変換すると

$$\kappa \nabla^2 T^* = p T^* \quad \cdots \cdots \cdots (21)$$

式(21)の一般解として次式を用いる.

$$T^* = \int_0^\infty C I_0(\sqrt{s^2 + p/\kappa} r) \cos sz ds \quad \cdots \cdots \cdots (22)$$

式(8)より, ϕ^* の特解は

$$\phi^* = \frac{\kappa}{p} K \int_0^\infty C I_0(\sqrt{s^2 + p/\kappa} r) \cos sz ds \quad \cdots \cdots \cdots (23)$$

式(23)を式(14)~(19)に代入すると, 変位および応力は

$$u_r^* = -K \int_0^\infty \left[A I_1(sr) + B s r I_0(sr) - \frac{\kappa}{p} C \sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} I_1\left(\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} r\right) \right] \cos sz ds \quad \cdots \cdots \cdots (24)$$

$$u_z^* = K \int_0^\infty \left[A I_0(sr) + B \{ 4(1-\nu) I_0(sr) + s r I_1(sr) \} - \frac{\kappa}{p} C \cdot s I_0\left(\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} r\right) \right] \sin sz ds \quad \cdots \cdots \cdots (25)$$

$$\frac{\sigma_{rr}^*}{2\mu K} = \int_0^\infty \left[s A \left\{ \frac{I_1(sr)}{sr} - I_0(sr) \right\} - s B \{ (1-2\nu) I_0(sr) + s r I_1(sr) \} + \frac{\kappa}{p} C \left\{ s^2 I_0\left(\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} r\right) - \frac{\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}}}{r} I_1\left(\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} r\right) \right\} \right] \cos sz ds \quad \cdots \cdots \cdots (26)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}^*}{2\mu K} = -\int_0^\infty \left[s A \frac{I_1(sr)}{sr} + s B (1-2\nu) I_0(sr) + \frac{\kappa}{p} C \left\{ \frac{p}{\kappa} I_0\left(\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} r\right) - \frac{\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}}}{r} I_1\left(\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} r\right) \right\} \right] \cos sz ds \quad \cdots \cdots \cdots (27)$$

$$\frac{\sigma_{zz}^*}{2\mu K} = \int_0^\infty \left[s A I_0(sr) + s B \{ 2(2-\nu) I_0(sr) + s r I_1(sr) \} - \frac{\kappa}{p} C \left(s^2 + \frac{p}{\kappa} \right) I_0\left(\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} r\right) \right] \cos sz ds \quad \cdots \cdots \cdots (28)$$

$$\frac{\sigma_{rz}^*}{2\mu K} = \int_0^\infty \left[s A I_1(sr) + s B \{2(1-\nu)I_1(sr) + sr I_0(sr)\} - \frac{\kappa}{p} C s \sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} I_1\left(\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} r\right) \right] \sin sz ds \quad \dots\dots\dots (29)$$

式(24)～(29)の未知数を境界条件(10)～(12)より決定すると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{u_0 \bar{f}(s) g^*(p)}{2(1-\nu) I_1(sa) K} \left\{ -2(1-\nu) + \frac{1}{D} \left[s^2 a I_0(sa) I_0\left(\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} a\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{sa} \{s^2 a^2 + 2(1-\nu)\} I_1(sa) \sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} I_1\left(\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} a\right) \right] \right\} \\ B &= \frac{u_0 \bar{f}(s) g^*(p)}{2(1-\nu) I_1(sa) K} \\ C &= \frac{u_0 \bar{f}(s) g^*(p)}{2(1-\nu) I_1(sa) K} \cdot \frac{p}{\kappa} E_2(s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(z) \cos sz dz \\ D &= I_0(sa) \sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} I_1\left(\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} a\right) - sa I_1(sa) I_0\left(\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} a\right) \\ E_2(s) &= sa \{I_0^2(sa) - I_1^2(sa)\} - \frac{2(1-\nu)}{sa} I_1^2(sa) \end{aligned}$$

次に式(6)で与えられた変形を生じさせる媒質の温度分布 Θ を決定することを考える。境界上に熱発生がない場合、温度の境界条件は

$$r=a \text{ にて } T_r + h(T - \Theta) = 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

ただし, Θ は決定されるべき周囲媒質の最適加熱温度, h は相対熱伝達率である。式(31)をラプラス変換し, 式(22)を用いると, 像空間での最適加熱温度 Θ^* は

$$\Theta^* = \frac{u_0 g^*(p)}{2(1-\nu) K} \cdot \frac{p}{\kappa} \int_0^\infty \frac{\bar{f}(s)}{I_1(sa)} E_2(s) \left\{ I_0\left(\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} r\right) + \frac{\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}}}{h} I_1\left(\sqrt{s^2 + \frac{p}{\kappa}} r\right) \right\} \cos sz ds \quad \dots\dots\dots (32)$$

以上により, 像空間における最適加熱温度 Θ^* , 温度 T^* , 変位 u_r^* , u_z^* および応力 σ_{ij}^* が求められた。

次にラプラス逆変換を行う。そこで, 式(6)の $g(t)$ の具体的な式表示として

$$g(t) = 1 - \exp(-bxt/a^2) \quad \dots\dots\dots (33)$$

と仮定する。式(33)をラプラス変換すると

$$g^*(p) = \frac{bx/a^2}{p(p + bx/a^2)} \quad \dots\dots\dots (34)$$

式(34)を式(30)と式(32)に代入し, 式(22), (24)～(29)をラプラス逆変換すると, 最適加熱温度 Θ , 温度 T , 変位 u_r , u_z , 応力 σ_{ij} は次式となる。

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{u_0}{2(1-\nu) K a} \int_0^\infty \frac{\bar{f}(s)}{I_1(sa)} \left[\frac{2}{E_1(s)} \{sa E_1(s) - 2(1-\nu) I_1(sa)\} \left\{ I_0(sa) + \frac{s}{h} I_1(sa) \right\} \right. \\ &\quad + b E_2(s) e^{-bxt/a^2} \left[\frac{H(b-s^2 a^2)}{E_4(s, b)} \left\{ J_0(\sqrt{b-s^2 a^2}) - \frac{\sqrt{b-s^2 a^2}}{h} J_1(\sqrt{b-s^2 a^2}) \right\} + \frac{H(s^2 a^2 - b)}{E_6(s, b)} \left\{ I_0(\sqrt{s^2 a^2 - b}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sqrt{s^2 a^2 - b}}{h} I_1(\sqrt{s^2 a^2 - b}) \right\} \right] - 2b E_2(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{E_8(s, \beta_n)} \left\{ J_0(\beta_n a) - \frac{\beta_n}{h} J_1(\beta_n a) \right\} e^{-\kappa(s^2 + \beta_n^2)t} \left. \right] \cos sz ds \quad \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{u_0}{2(1-\nu) K a} \int_0^\infty \frac{\bar{f}(s)}{I_1(sa)} \left[\frac{2}{E_1(s)} \{sa E_1(s) - 2(1-\nu) I_1(sa)\} I_0(sr) + b E_2(s) e^{-bxt/a^2} \right. \\ &\quad \times \left\{ \frac{H(b-s^2 a^2)}{E_4(s, b)} J_0\left(\frac{r}{a} \sqrt{b-s^2 a^2}\right) + \frac{H(s^2 a^2 - b)}{E_6(s, b)} I_0\left(\frac{r}{a} \sqrt{s^2 a^2 - b}\right) \right\} \\ &\quad \left. - 2b E_2(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{J_0(\beta_n r)}{E_8(s, \beta_n)} e^{-\kappa(s^2 + \beta_n^2)t} \right] \cos sz ds \quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{u_0}{2(1-\nu)} \int_0^\infty \frac{\bar{f}(s)}{I_1(sa)} \left[\frac{2(1-\nu)}{E_1(s)} \{E_1(s) + I_0(sa) I_1(sa)\} I_1(sr) - I_1^2(sa) \frac{r}{a} I_0(sr) \right. \\ &\quad + e^{-bxt/a^2} \{sr I_0(sr) - 2(1-\nu) I_1(sr)\} \\ &\quad \left. + \frac{H(b-s^2 a^2)}{E_4(s, b)} \{E_3(s, b) I_1(sr) + E_2(s) \sqrt{b-s^2 a^2} J_1\left(\frac{r}{a} \sqrt{b-s^2 a^2}\right)\} \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{H(s^2 a^2 - b)}{E_6(s, b)} \{E_5(s, b)I_1(sr) - E_2(s)\sqrt{s^2 a^2 - b}I_1\left(\frac{r}{a}\sqrt{s^2 a^2 - b}\right)\} \\ - 2b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_7(s, \beta_n)I_1(sr) + E_2(s)\beta_n J_1(\beta_n r)}{(s^2 + \beta_n^2)E_8(s, \beta_n)} e^{-\kappa(s^2 + \beta_n^2)t} \cos szdz \dots (37)$$

$$u_z = \frac{u_0}{2(1-\nu)} \int_0^{\infty} \frac{\bar{f}(s)}{I_1(sa)} \left[\frac{2(1-\nu)}{E_1(s)} \{I_1(sa) - I_0(sa)I_1(sa)\}I_0(sr) + I_1^2(sa)\frac{r}{a}I_1(sr) \right] \\ - e^{-b\kappa t/a^2} [2(1-\nu)I_0(sr) + srI_1(sr) + \frac{H(b-s^2 a^2)}{E_4(s_1 b)} \\ \times \{E_3(s, b)I_0(sr) - E_2(s)saJ_0\left(\frac{r}{a}\sqrt{b-s^2 a^2}\right)\} + \frac{H(s^2 a^2 - b)}{E_6(s, b)} \{E_5(s, b)I_0(sr) - E_2(s)saI_0\left(\frac{r}{a}\sqrt{s^2 a^2 - b}\right)\} \\ + 2b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_7(s, \beta_n)I_0(sr) - E_2(s)saJ_0(\beta_n r)}{(s^2 + \beta_n^2)E_8(s, \beta_n)} e^{-\kappa(s^2 + \beta_n^2)t}] \sin szds \dots (38)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu u_0}{2(1-\nu)} \int_0^{\infty} \frac{sa\bar{f}(s)}{I_1(sa)} \left[\frac{2(1-\nu)}{E_1(s)} \left\{ I_1(sa) \left\{ I_0(sa) + \frac{I_1(sa)}{sa} \right\} I_0(sr) - \{E_1(s) + I_0(sa)I_1(sa)\} \frac{I_1(sr)}{sr} \right. \right. \\ \left. \left. - I_1^2(sa)rI_1(sr) \right\} - e^{-b\kappa t/a^2} \left[-2(1-\nu) \frac{I_1(sr)}{sr} + I_0(sr) - srI_1(sr) + \frac{H(b-s^2 a^2)}{E_4(s, b)} [E_3(s, b)\{I_0(sr) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{I_1(sr)}{sr}\} - E_2(s) \left\{ saJ_0\left(\frac{r}{a}\sqrt{b-s^2 a^2}\right) + \frac{\sqrt{b-s^2 a^2}}{sr} J_1\left(\frac{r}{a}\sqrt{b-s^2 a^2}\right) \right\} + \frac{H(s^2 a^2 - b)}{E_6(s, b)} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[E_5(s, b) \left\{ I_0(sr) - \frac{I_1(sr)}{sr} \right\} - E_2(s) \left\{ saI_0\left(\frac{r}{a}\sqrt{s^2 a^2 - b}\right) - \frac{\sqrt{s^2 a^2 - b}}{sr} \right\} - I_1\left(\frac{r}{a}\sqrt{s^2 a^2 - b}\right) \right] \right] \right] \\ - 2b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_7(s, \beta_n)\{I_0(sr) - I_1(sr)/(sr)\} - E_2(s)saJ_0(\beta_n r) + \beta_n aJ_1(\beta_n r)/(sr)}{a^2(s^2 + \beta_n^2)E_8(s, \beta_n)} e^{-\kappa(s^2 + \beta_n^2)t}] \cos szds \dots (39)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2\mu u_0}{2(1-\nu)} \int_0^{\infty} \frac{sa\bar{f}(s)}{I_1(sa)} \left[\frac{2(1-\nu)}{E_1(s)} \left\{ \{E_1(s) + I_0(s)I_1(s)\} \frac{I_1(sr)}{sr} - \{E_1(s) - \frac{I_1^2(s)}{sa}\} I_0(sr) \right\} \right. \\ \left. - e^{-b\kappa t/a^2} [2(1-\nu) \frac{I_1(sr)}{sr} - (1-2\nu)I_0(sr) + \frac{H(b-s^2 a^2)}{E_4(s, b)} \left[E_3(s, b) \frac{I_1(sr)}{sr} + E_2(s) \frac{\sqrt{b-s^2 a^2}}{sr} \right. \right. \\ \left. \left. \times J_1\left(\frac{r}{a}\sqrt{b-s^2 a^2}\right) + bE_2(s) \frac{1}{sa} J_0\left(\frac{r}{a}\sqrt{b-s^2 a^2}\right) \right] + \frac{H(s^2 a^2 - b)}{E_2(s, b)} \left[E_5(s, b) \frac{I_1(sr)}{sr} \right. \right. \\ \left. \left. - E_2(s) \frac{\sqrt{s^2 a^2 - b}}{sr} I_1\left(\frac{r}{a}\sqrt{s^2 a^2 - b}\right) + bE_2(s) \frac{1}{sa} I_1\left(\frac{r}{a}\sqrt{s^2 a^2 - b}\right) \right] \right] \\ - 2b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_7(s, \beta_n)I_1(sr) + E_2(s)\{\beta_n aJ_1(\beta_n r) - (s^2 + \beta_n^2)rJ_0(\beta_n r)\}}{a^2(s^2 + \beta_n^2)E_8(s, \beta_n) \cdot sr} e^{-\kappa(s^2 + \beta_n^2)t}] \cos szds \dots (40)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\mu u_0}{2(1-\nu)} \int_0^{\infty} \frac{sa\bar{f}(s)}{I_1(sa)} \left[-\frac{2(1-\nu)}{E_1(s)} I_1(sa) \left\{ I_0(sa) - \frac{2}{sa} I_1(sa) \right\} I_0(sr) - I_1(sa)srI_1(sr) \right] \\ - e^{-b\kappa t/a^2} [2I_0(sr) + srI_1(sr) + \frac{H(b-s^2 a^2)}{E_4(s, b)} \{E_3(s, b)I_0(sr) - E_2(s)(sa + \frac{b}{sa}) \\ \times J_0\left(\frac{r}{a}\sqrt{b-s^2 a^2}\right) + \frac{H(s^2 a^2 - b)}{E_6(s, b)} \{E_5(s, b)I_0(sr) - E_2(s)(sa + \frac{b}{sa})I_0\left(\frac{r}{a}\sqrt{s^2 a^2 - b}\right)\} \\ + 2b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_7(s, \beta_n)saI_0(sr) + E_2(s)\beta_n^2 a^2 J_0(\beta_n a)}{sa^3(s^2 + \beta_n^2)E_8(s, \beta_n)} e^{-\kappa(s^2 + \beta_n^2)t}] \cos szds \dots (41)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{2\mu u_0}{2(1-\nu)} \int_0^{\infty} \frac{sa\bar{f}(s)}{I_1(sa)} \left[\frac{2(1-\nu)}{E_1(s)} I_1(sa) \left\{ I_1(sa) \frac{r}{a} I(sr) - I_0(sa)I_1(sr) \right\} - e^{-b\kappa t/a^2} [srI_0(sr) \right. \\ \left. + \frac{H(b-s^2 a^2)}{E_4(s, b)} \{E_3(s, b)I_1(sr) \right. \\ \left. + E_2(s)\sqrt{b-s^2 a^2}J_1\left(\frac{r}{a}\sqrt{b-s^2 a^2}\right) + \frac{H(s^2 a^2 - b)}{E_6(s, b)} \{E_5(s, b)I_1(sr) - E_2(s)\sqrt{s^2 a^2 - b}I_1\left(\frac{r}{a}\sqrt{s^2 a^2 - b}\right)\} \right. \\ \left. + 2b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_7(s, \beta_n)I_0(sr) + E_2(s)\beta_n aJ_1(\beta_n r)}{a^2(s^2 + \beta_n^2)E_8(s, \beta_n)} e^{-\kappa(s^2 + \beta_n^2)t}] \sin szds \dots (42)$$

ただし, $J_n(\quad)$ は n 次のベッセル関数, $H(\quad)$ はヘビサイドの単位ステップ関数,

$$E_1(s) = sa\{I_0^2(sa) - I_1^2(sa)\}, \quad E_2(s) = E_1(s) - 2(1-\nu)I_1^2(sa)/(sa)$$

$$E_3(s) = sa\{saI_0(sa)J_0(\sqrt{b-s^2 a^2}) + I_1(sa)\sqrt{b-s^2 a^2}J_1(\sqrt{b-s^2 a^2})\}$$

$$+ 2(1-\nu)I_1(sa)\sqrt{b-s^2 a^2}J_1(\sqrt{b-s^2 a^2})/(sa)$$

図 1 与えられた境界上の垂直変位

図 4 境界上の温度分布

図 2 最適加熱温度の時間変化

図 5 境界上の円周応力分布

図 3 ビオ数が最適加熱温度に及ぼす影響

図 6 境界上の軸応力分布

$$E_4(s) = -I_0(sa)\sqrt{b-s^2a^2}J_1(\sqrt{b-s^2a^2}) - saI_1(sa)J_0(\sqrt{b-s^2a^2})$$

$$E_5(s) = sa\{saI_0(sa)I_0(\sqrt{s^2a^2-b}) - I_1(sa)\sqrt{s^2a^2-b}I_1(\sqrt{s^2a^2-b})\} \\ - 2(1-\nu)I_1(sa)\sqrt{s^2a^2-b}I_1(\sqrt{s^2a^2-b})/(sa)$$

$$E_6(s) = I_0(sa)\sqrt{s^2a^2-b}I_1(\sqrt{s^2a^2-b}) - saI_1(sa)I_0(\sqrt{s^2a^2-b})$$

$$E_7(s) = saE_2(s)J_0(\beta_na)/I_0(sa), \quad E_8(s) = (s^2a^2 + \beta_n^2a^2 - b)I_0(sa)\{J_0^2(\beta_na) + J_1^2(\beta_na)\}/J_0(\beta_na)$$

なお, β_n は次式を満足する正根である.

$$saI_1(sa)J_0(\beta_na) + \beta_naI_0(sa)J_1(\beta_na) = 0$$

以上より, 最適加熱温度 θ , 温度 T , 変位 u_r, u_z , 応力 σ_{ij} が求まった.

3. 数値計算結果と考察

数値計算にあたり、円柱の半径 a を代表長さにとり次式で示される無次元量を導入する。

$$\rho = \frac{r}{a}, \zeta = \frac{\xi}{a}, t' = \frac{\kappa t}{a^2}, B_i = ah$$

$$(\bar{\theta}, \bar{T}) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{aa}{u_0} (\theta, T), (u_r, u_t) = \frac{1}{u_0} (u_r, u_z)$$

$$\bar{ij} = \frac{a\sigma_{ij}}{2\mu u_0}$$

ただし、 t' はフーリエ数、 B_i はビオ数である。

境界条件式(6)の垂直変位の関数 $f(r)$ は無次元表示で

$$f(\zeta) = e^{-\zeta^2}$$

として数値計算を実行した。なお、式(33)の b の値は1とした。

図1に与えられた境界上の垂直変位の分布を示す。図2にビオ数 $B_i=1$ にした場合の媒質の最適加熱温度 $\bar{\theta}$ をフーリエ数 t' をパラメータにとり示す。図3に定常状態における最適加熱温度 $\bar{\theta}$ を示す。図2と図3より、垂直変位が時間とともに増大するにつれ、加熱温度は一般的に時間とともに高くなるが、垂直変位の軸方向分布が正であるにもかかわらず、定常状態付

近のフーリエ数のとき、冷却しなければならない領域が生ずる。また、加熱温度はビオ数に大きく影響される。

図4～6に境界上の温度、円周応力、軸応力を示す。図4より、定常状態に近くなると、 ζ が約1.7より大きいところで、温度は初期温度よりも低くなっている。これは加熱温度が定常付近で、かつ ζ が約1より大きいところで冷却域に変化しているのに対応している。また、式(36)～(42)より、物体内の温度、応力、変位はビオ数には無関係である。

4. 結 論

本研究で取扱った範囲内で次のことが結論される。

- (1) ラプラス変換を用いて、変位が規定された場合の無限円柱非定常熱応力の最適加熱温度を理論的に求めることができる。
- (2) 与えられた垂直変位は正にもかかわらず、冷却領域が存在する。

文 献

- (1) Weitsman, Y., *J. Appl. Mech.*, 47-1(1980), 35-39.
- (2) Harper, B. D., *J. Appl. Mech.*, 52-3(1985), 634-638.
- (3) Meric, R. A., *J. Thermal Stresses*, 8-3(1985), 333-347.

討 論

〔質問〕 谷川 義信〔大阪府立大学工学部〕

大多尾 義弘〔大阪府立工業技術研究所〕

(1) 本問題の実際的应用として、どのような例が考えられるか。

(2) 規定された変位として、 $g(t)=1-\exp(-bxt/a^2)$, $f(\zeta)=e^{-\zeta^2}$ を与えているが、どのような理由でこのように与えたか。また、他の関数系で与えても、同様に解析可能かどうか。

(3) 表題を「最適問題」と表現されているが、本論文は変位を与えた場合の温度分布に対する逆問題と思われる。変位場とともに重要な応力場に対する逆問題についてどのように考えておられるか。ご教示願いたい。

〔回答〕 (1) 例えば、工作機械のベットの熱変形がある。モータ・切削熱によるベットの熱変形をおさえるための冷却または加熱方法への応用が可能と考えられる。

(2) $g(t)$ は $t=0$ で $g(t)=0$, $t=\infty$ で $g(t)=$ 一定の条件を満足する関数のひとつとして選び、 $f(\zeta)$ は $\zeta=0$ で対称、 $\zeta=\infty$ で $f(\zeta)=0$ になる関数のひとつとして与えた。物理的条件を満足し、かつ、例えば式(32)がラプラス逆変換が可能で、フーリエ積分が収束する関数系ならば解析可能である。

(3) ご指摘のとおり、Grysa^(付1)らはこの種の問題を熱弾性逆問題と呼んでいる。一方、Weitsman⁽¹⁾, Harper⁽²⁾, Meric⁽³⁾らは最適設計の立場から、最適加熱と呼んでいる。応力場に対する逆問題も非常に重要であるので、解析の可能性を含め今後の研究課題とさせていただきます。

〔質問〕 五嶋 孝仁〔富山大学工学部〕

変位を規定した最適加熱問題を始めて解析されたことに敬意を表す。

(1) 境界条件として変位が規定される問題としては、例えば接触問題などのように拘束条件として変位が与えられていることが多いと思われるが、このよう

〔付1〕 Cialkowski, M. J. and Grysa, K., *Acta Mech.*, 36 (1980), 169-185.

な場合はもし拘束応力分布が概知ならば式(4), (5)の応力の境界条件を変えるだけで同様に解析が可能か。

(2) 式(21)より判断すると初期条件として温度が零の解析をされているようだが, $g(t)$ の形によっては必ずしも本初期条件を満足しない場合もありうるかと思うが, いかがか。

〔回答〕 (1) 応力場が規定された場合についても非常に興味ある問題であるので, 解析の可能性を含め今後の研究課題とさせていただく。

(2) ご指摘のとおり, $g(t)$ の与え方によっては当然初期温度を考慮しなければならない。本研究では初期状態は自然状態であるとの暗黙の仮定のもとに解析した。

53 巻 496 号, A 編 (昭 62-12) 正誤表

執筆者名	ページ	欄	行	誤	正
浅山 泰 ほか	2232	英文概要	9	authors	authors'
	2233	左	21	焼なまし	焼ならし
	2234	左	31	Coffin-	Coffin-
	2236	左	19	破面凹凸	破面は凹凸
小林 謙一 ほか	2300		Key Words	2.25 Cr-1 Mo Steel Eleuated Temperature	2.25 Cr-1 Mo Steel, Elevated Temperature
神宮 利夫 ほか	2334	右	式(10)	$\frac{1}{K} \mathcal{L}\{F(t)\} = V_0 \mathcal{L}\{t\} - \frac{1}{W/g}$ $\times \{F(t) \mathcal{L}\{t\} - \frac{1}{8\sqrt{\gamma h D/g}}\}$ $\times \mathcal{L}\{F(t)\} \mathcal{L}\{1\} \dots\dots\dots (10)$	$\frac{1}{K} \mathcal{L}\{F(t)\} = V_0 \mathcal{L}\{t\} - \frac{1}{W/g}$ $\times \mathcal{L}\{F(t)\} \mathcal{L}\{t\} - \frac{1}{8\sqrt{\gamma h D/g}}$ $\times \mathcal{L}\{F(t)\} \mathcal{L}\{1\} \dots\dots\dots (10)$
渋谷 嗣 ほか	2361	左	17	式(17)	式(10)
斎藤 廣 作	2401	左	13	- Ψ_B で Laplace 方程式を	- Ψ_B で φ が Laplace 方程式を
北條 英典 ほか	2453	図 3	図中	Steady steady	Steady state