マクロな弾性係数がボイド率に依存する材料の
弾塑性変形挙動*富田 佳宏^{*1}, 進藤 明夫^{*1}, 藤根 敬司^{*2}

Elastic-plastic Deformation Behavior of Void Materials with Void Volume Fraction Dependent Macroscopic Elasticity Moduli

Yoshihiro TOMITA, Akio SHINDO, and Keiji TONE

A constitutive equation taking into account the effect of the void volume fraction on the macroscopic elasticity moduli has been developed. An additional strain rate is derived from the partial differentiation of the elastic stress-strain relation with respect to the void volume fraction and is added to the strain rate obtained from the original Gurson type constitutive equation. The deformation behavior of a plane strain block with both ends fixed subjected to tension has been analyzed. The comparison between the results obtained by employing the present constitutive equation and the original one clarified that the void volume fraction dependency of macroscopic elasticity moduli has a substantial effect on the residual stress, but not on global deformation behavior.

Key Words: Plasticity, Void Containing Material, Macroscopic Elasticity Moduli, Strain Localization, Plane Strain Tension

1. 緒 言

大きな引張りひずみ下での延性材料の破壊は、ボイドの発生と成長、および合体によって発生することが、破面などの観察から確かめられている⁽¹⁾。これまでにそのような材料の挙動を表現するために多くの構成式が提案されている。なかでも Gurson の降伏関数⁽²⁾から導出される構成式⁽³⁾は、最近延性材料の前破壊挙動や塑性加工性を検討するのに、しばしば用いられている。しかしながらこれまでのところ、構成式は剛塑性体に対して定式化されたひずみ速度に Hooke の法則による弾性ひずみ速度を加え合わせて得られる全ひずみ速度と応力速度の関係として表現されている⁽³⁾。このような構成式においては、ボイドの発生によりマクロな弾性係数が影響を受けることが考慮されていない。

本論文では、マクロな弾性係数のボイド率依存性がボイド材の変形挙動に及ぼす影響を調べるために、Gurson 形ボイドモデルに対してボイド率がマクロな

弾性係数に及ぼす影響を考慮にいたしたボイド材の構成式を新しく提案する。次にこれまでに提案されたボイド率とマクロな弾性係数との間の関係⁽⁴⁾を新しく導出した構成式に導入し、平面ひずみ下で引張りを受けるブロックの変形挙動を解析することにより、ボイドの発生によるマクロな弾性係数の変化が変形の局所化、応力分布などに及ぼす影響を調べる。

2. 基 礎 理 論

従来のボイド材の弾塑性解析では、ボイドの発生後もマクロな弾性係数は変化しないと仮定されてきた。しかしながら実際にはボイドの発生、成長のために材料の中実部分が減少するためにマクロな弾性係数が変化することが考えられる。事実、焼結合金のようなボイドを含む材料のボイド率がマクロな弾性係数に影響を及ぼすことは早くから知られており、ボイド率とマクロな弾性係数との間の関係も一部実験的に調べられ、いくつかの形でボイド率の関数として与えられている⁽⁴⁾。

ここでは Gurson 形の構成式⁽³⁾をもとにマクロな弾性係数がボイド率 f によって変化することを考慮した構成式を導出する。全ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_0$ は弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_e$ 、塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_p$ とボイドによってもた

* 昭和62年11月19日 第949回講演会において講演、原稿受付 昭和62年5月25日。

^{*1} 正員、神戸大学大学院自然科学研究科 (〒657 神戸市灘区六甲台町)。

^{*2} 学生員、神戸大学大学院。

らされる弾性係数の変化により発生するひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ との和として次式のように表されたと仮定する。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^f \quad \dots\dots\dots (1)$$

上式中、塑性ひずみ速度は、ポイド材に対する降伏関数⁽³⁾

$$\phi = \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_M^2} + 2fq_1 \cosh\left(\frac{q_2}{2} \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_M}\right) - (1 + q_3 f^2) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

と、ポイド率に対する発展方程式

$$\dot{f} = (1-f)\dot{\epsilon}_{ii}^p + A\dot{\sigma}_M + B\frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3} + C\dot{\sigma}_M \quad \dots\dots\dots (3)$$

から求めることができ、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p &= (1/\bar{H}) m_{ij}^e m_{kl}^f \dot{\sigma}_{kl} \\ m_{ij}^e &= \frac{3\sigma'_{ij}}{2\sigma_M} + \alpha \delta_{ij}, \quad m_{ij}^f = \frac{3\sigma'_{ij}}{2\sigma_M} + \beta \delta_{ij} \\ \alpha &= \frac{f}{2} q_1 q_2 \sinh\left(\frac{q_2 \sigma_{kk}}{2\sigma_M}\right) \\ \beta &= \alpha + \frac{B\sigma_M}{6} \frac{\partial \phi}{\partial f} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 σ_M , $\bar{\sigma}$ はそれぞれ実質部およびポイド材の相当応力、 q_1, q_2, q_3 は定数。ポイド率 f の発展方程式中、右辺第1, 第2, 3, 第4項はそれぞれ、ポイドの成長、発生、合体に対応している。パラメータ A, B, C はポイドの発生形態、限界ポイド率などに依存している⁽³⁾。また $\bar{H}$ は硬化パラメータで、応力、ポイド率等によって表すことができる。

一方、弾性ひずみ速度とポイドによって生じる弾性係数の変化により発生するひずみ速度は次の形で表される弾性ひずみと応力関係式の速度形から導出する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^e &= B_{ijkl}^e \dot{\sigma}_{kl} \\ B_{ijkl}^e &= \frac{1}{E^*} \left\{ \frac{1+\nu^*}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \nu^* \delta_{ij}\delta_{kl} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで E^*, ν^* はマクロな弾性係数とポアソン比で一般にはポイド率 f の関数である。いま、弾性係数マトリックス B_{ijkl}^e がポイド率 f の関数であることに注意して、その速度形を求めると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^f &= B_{ijkl}^e \dot{\sigma}_{kl} + \bar{B}_{ijkl}^e f \dot{\sigma}_{kl} \\ \bar{B}_{ijkl}^e &= \frac{\partial B_{ijkl}^e}{\partial f} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(6)の右辺第2項がポイドによってもたらされる弾性係数の変化によって生ずるひずみ速度で、 $\dot{f}$ は式(3)によって評価できる。本研究では式(6)の $\dot{f}$ は前ステップのもので近似した。式(4), (6)を式(1)に代入することによって全ひずみ速度は次式で表すことができる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = B_{ijkl}^e \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\mu}{\bar{H}} m_{ij}^e m_{kl}^f \dot{\sigma}_{kl} + \bar{B}_{ijkl}^e \dot{f} \dot{\sigma}_{kl} \quad \dots\dots\dots (7)$$

この逆関係を求めると次のようになる。

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^f) \quad \dots\dots\dots (8)$$

上式の $\dot{\sigma}_{ij}$ と $\dot{\epsilon}_{kl}$ を Cauchy の応力 σ_{ij} の Jaumann 速度 $\overset{\Delta}{\sigma}_{ij}$ とひずみ速度 d_{kl} で置き換え一般化すると

$$\overset{\Delta}{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} (d_{kl} - d_{kl}^f) \quad \dots\dots\dots (9)$$

上式を仮想仕事の原理式⁽⁵⁾⁽⁶⁾に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \int_V \delta v_{i,j} [(D_{jikh} - F_{jikh} + R_{jikh}) d_{kl} + \sigma_{mi} v_{j,m}] dV \\ = \int_{S_F} \dot{P}_i \delta v_i dS + \int_V \delta v_{i,j} D_{ijkl} d_{kl}^f dV \\ F_{ijkl} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \delta_{kl} + \sigma_{kj} \delta_{li} + \sigma_{il} \delta_{kj} + \sigma_{ki} \delta_{lj}) \\ R_{ijkl} = \sigma_{ij} \delta_{kl} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

これよりポイド率の変化がマクロな弾性係数に及ぼす影響は、物体力のような形で入ってくることが理解できる。式(10)を弾塑性有限要素法プログラム EPLAN2D⁽⁷⁾に導入し有限要素解析を行う。

3. 解析対象のモデル化

本研究では、ポイドの発生、成長によるマクロな弾性係数の変化が変形に及ぼす影響を調べるために図1に示すブロックの平面ひずみ条件下でのくびれ挙動を解析した。初期長さ $2L$ 、幅を $2W$ 、板厚を単位とするブロックが両端固着の状態に変位が加えられる。なお、変形の対称性を考慮して図1の第1象限のみを解析した。要素は Crossed Triangles 要素とし解析領域を図1に示すように四つの三角形によってできる四角形で分割した。このような分割で変形の局所化を解析できることが検討されている⁽⁸⁾。

ブロックの実質部の応力 σ_M とひずみ ϵ_M の関係として次式を用いる。

図1 引張りを受けるブロックと有限要素分割

$$\left. \begin{aligned} \sigma_M &= E_0 \varepsilon_M & (\sigma_M \leq \sigma_y) \\ \sigma_M &= \sigma_y (\varepsilon_M / \varepsilon_y)^m & (\sigma_M > \sigma_y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$\varepsilon_y = \sigma_y / E_0$$

なお、上式中に含まれる材料定数値を $E_0=200$ GPa, $\sigma_0=400$ MPa, $m=0.0625$ とする。さらに、ポイドの発生は応力によって制御されるものとし、式(2)～(4)に含まれる定数は Tvergaard が示した手法⁽³⁾を用いて $\varepsilon_N=0.3$, $s=0.4\sigma_y$, $f_u=2/3$, $f_c=0.15$, $f_N=0.04$, $\sigma_N=2.1\sigma_y$, $\Delta\varepsilon=0.6$, $q_1=1.5$, $q_2=1.0$, $q_3=q_1^2$ として決定した。これらの記号は文献(3)に対応させている。

一方ポイド率とマクロな弾性係数の間の関係として以下の四つのモデルを仮定した。

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad E^* &= E_0 \\ (2) \quad E^* &= E_0 \exp \{ -(1.46f + 9.82f^2) \} \\ (3) \quad E^* &= E_0 \exp (-5.16f) \\ (4) \quad E^* &= E_0 \{ (1 - 33.396f) / (1 + 32.396f) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

このうち(2)～(4)は Springgs, Wang, Hashin-hasselman によって提案された式⁽⁴⁾で、図2に E^* と f の関係を表示している。一方マクロなポアソン比については、ポイド率によって変化しないことが報告されているので⁽⁴⁾、本研究では一定値 $\nu^*=1/3$ を用いた。

4. 解析結果と考察

ここでは、比較のため前出の(1)～(4)に対応した解析に加え、同じ要素分割でポイドを全く含まない材料(本論文では J2F 材と呼ぶ)の解析も行った。図3はブロックの変位 u と荷重 F 、くびれ量 v と最大ポイド率 $f_{\max}$ の関係を示したものである。なお図3中の $f_{\max}$ となる要素を図1の要素分割で A と示している。図3中の $F_{\max}$ は最高荷重点を示す。いずれの解析結果においても変位が小さい時差はなく、 $u/L=0.0510$ のときに $F_{\max}=1.37$ を示した。しかしながら、 $u/L=$

図2 マクロな弾性係数 E^* とポイド率 f の関係

0.15 を過ぎたあたりから解析結果に徐々に差が現れ始める。マクロな弾性係数がポイド率に影響を受けやすいと仮定したモデル(4)のほうが従来のポイド材の解析に比べて荷重が小さくまたくびれ量も大きい。このことはポイド率 f が $u/L=0.15$ 付近を境にその差が大きくなることによると考えられる。

全体の形状変化の特徴を調べるために自由表面の曲率半径の変化を図4に示している。曲率の正負は図4のように定義している。曲率が小さいとき自由表面の形状が急変していないことを示している。図4よりポイド率の影響が大としたモデルにおけるくびれの進行が速いことがわかる。

次に $u/L=0.20$ のときのくびれ部最小断面上での応力、ひずみの分布状態を検討する。図5に実質部応力 σ_M とマクロな相当応力 $\bar{\sigma}$ 、見掛け上の相当塑性ひず

図3 荷重 F 、くびれ量 v 、最大ポイド率 $f_{\max}$ と端面変位 u の関係

図4 自由表面の曲率 $1/R_c$ の変化

(a) 実質部応力 σ_M , マクロな相当応力 $\bar{\sigma}$, 実質部ひずみ ϵ_M , マクロな相当ひずみ $\bar{\epsilon}$

(b) ボイド率 f

図5 くびれ部最小断面上の応力, ひずみ, ボイド率の分布

図6 くびれ部最小断面上の主応力分布 ($u/L=0.20$)

み $\bar{\epsilon}$ と実質部の相当塑性ひずみ ϵ_M , 最小断面上のボイド率 f の分布の関係を示している。 σ_M は(1)~(4)のいずれの場合にもほぼ同じ値を示しているが, マクロな弾性係数に対するボイドの影響が大きい材料の $\bar{\sigma}$ は中心部で大きく減少している。これは主として最小断面上のボイド率分布に大きな差があるためである。図6は見掛け上の主応力 σ_1, σ_2 と, $u/L=0.20$ まで引っ張った後除荷した状態におけるくびれ部最小断面上での残留応力分布を示している。負荷時の最大応力点が中心からはなれたところにあるのは実質部の面積の減少による応力の低下と中心部にいくに伴う応力の増加がバランスしたためと考えられる。一方, 残留応力 σ_1 は(1)から(4)になると, 高くなる傾向にある。またボイドの発生により, 負荷時の応力分布の特徴と同様中間部での高い残留応力が見られる。(1)とそれ以外の応力の最大差の割合は従来の解析結果に対してボイド含有率を超える可能性があることを示している。その他, 相当応力, 相当ひずみ, ボイド率のブロック全体の分布などを検討した結果, 変形量に関する影響は少なかった。

このような一連の解析結果より, ボイドがマクロな弾性係数に及ぼす影響を考慮にいたした場合, その影響は, 応力分布, 特に残留応力分布に大きく現れてくることがわかる。

5. 結 言

ボイドによるマクロな弾性係数の変化を考慮できる構成式を定式化し, 平面ひずみ条件下でブロックの引張問題の解析を行った。得られた結果をまとめると次のようである。

ボイドの発生, 成長によるマクロな弾性係数の変化を考慮した場合, 従来の構成式によるボイド材の解析と比べて中心部でのボイド率は高くなり, くびれが進み全体として荷重が低下した。くびれ部最小断面上ではボイドの成長により中心部での見掛け上の応力は低くなりその周辺部では逆に高くなった。一方除荷時の残留応力において, 従来の結果と比べ応力の最大差の割合は, 発生しているボイド率よりも大きくなった。しかしながら, 応力分布を除いてブロック全体のひずみや形状はほとんど同じであった。

このようにボイド材を従来の構成式を用いて弾塑性解析した場合, 変形が増加するに伴って, 中心部(危険断面上)でのボイド率をかなり低く見積もってしまうため, 負荷時には応力を高く, 逆に除荷時には低く見積もる傾向が見られた。以上よりボイド率が大きくなった状態下で応力を評価するとき, 本研究で提案した構成式を用いることが望ましい。

文 献

- (1) McClintock, F. A., *J. Appl. Mech.*, 35-2 (1968), 363.
 - (2) Gurson, A. L., *J. Eng. Mater. Tech.*, 99-1 (1977), 2.
 - (3) Tvergaard, V., *J. Mech. Phys. Solids*, 30-6 (1982), 399.
 - (4) Wang, J. C., *J. Mater. Sci.*, 19-3 (1984), 801.
 - (5) 北川・富田, 材料, 29-322 (昭55), 663.
 - (6) 富田, 塑性と加工, 22-244 (昭56), 410.
 - (7) 富田, 大阪大学大型計算機センターニュース, 14-1 (昭59), 59.
 - (8) 神馬・富田, 第103回塑性加工シンポジウム論文集, (昭61), 59, 日本塑性加工学会.
-