速度形剛塑性有限要素法の提案*

富田佳宏^{*1}, 進藤明夫^{*1}
後藤広和^{*2}, 秋萬錫^{*1}Rigid-Plastic Finite Element Method Using
Rate Type Constitutive EquationYoshihiro TOMITA, Akio SHINDO,
Hirokazu GOTOH, and Man-Seok CHU

The rigid plastic finite element method is frequently used to predict the deformation behaviour of the materials during the forming processes. The constitutive equation employed is usually restricted to flow type one so that the normality of the strain rate to the yield surface is entailed. Then the deformation can not follow the abrupt change in stress history. This often yields the over stabilization of the deformation. In this paper, to overcome this situation, a rate type constitutive equation with a one-to-one relation between stress rate and strain rate is employed, and the formulation of the rigid plastic finite element method is presented. The method is applied to the prediction of the flow localization of the strip under tension. The feature of the present results is clarified by comparing the results with those due to J2 flow and corner theory.

Key Words: Plasticity, Rate Type Constitutive Equation, Rigid Plastic Finite Element Method, Strain Localization

1. 緒 言

金属材料が外力を受けて変形した場合全変形に占める塑性変形の割合が極めて大きく、変形の拘束が大でしかも除荷がないとき弾性変形による効果を見逃しても要請される精度をもつ情報を得ることができる場合が多い。このような限定された場合に効率よく変形状態を解析する方法として剛塑性有限要素法がある^{(1)~(4)}。周知のようにこの手法は最近極めて広範に各種塑性加工の解析に用いられているが、剛塑性解析に伴う問題点および適用限界があることも事実である。

ここではLevy-Mises形の構成式を用いた通常の剛塑性解析について今一度検討を加えその問題点を指摘する。つぎに従来の剛塑性解析では対処できないと考えられる、応力経路あるいはひずみ経路が急に変化する場合に対して応力速度とひずみ速度との間に1対1対応を有する構成式を導入した速度形剛塑性有限要素法を提案し、それを用いて平面ひずみ下で、ブロックの単軸引張りにおけるくびれの解析を行う。得られた

結果とJ2流れ理論⁽⁵⁾およびJ2コーナ理論⁽⁶⁾による構成式を用いて得られた結果を比較検討することにより、速度形剛塑性有限要素法解析により得られた結果の特徴を明らかにする。

2. Levy-Mises 形構成式を用いた剛塑性解析

ここでは周知の事項を含めてLevy-Mises形ひずみ硬化構成式を用いた剛塑性解析の問題点を図1を参照して検討する⁽⁷⁾。連合流れ則に従う剛塑性材料が変形を受け自然状態を表すO点からCauchyの応力 σ_{ij} の偏差成分 σ'_{ij} で表される応力点 P_1 に到達した場合を考える。応力経路を OP_1 、それに対応するひずみ経路を OP_2 で表す。 P_2 における偏差ひずみ速度 $\dot{\epsilon}'_{ij}$ がひずみ経路 OP_2 に接するような場合、偏差応力のJaumann速度 $\sigma^{v'_{ij}}$ の方向は応力経路 OP_1 に対して大きく変化しない。このとき P_1 点で降伏曲面に立てた法線方向を P_1Q_3 とすると $P_1Q_3 \parallel P_2Q_2$ となる。これに対して P_2 においてひずみ経路を P_2R_2 のように変化させると、応力点 P_1 は、降伏曲面に立てた法線 P_1Q_3 が $P_1Q_3 \parallel P_2R_2$ になる点 P_1' まで移動する。すなわち応力に不連続が生じることになり、現実の現象を忠実に表現できないことになる。

これとは逆に、応力速度 $\sigma^{v'_{ij}}$ の方向を OP_1 の P_1 点

* 昭和62年11月28日 関西支部第247回講演会において講演、原稿受付 昭和62年4月30日。

*¹ 正員、神戸大学大学院自然科学研究科 (〒657 神戸市灘区六甲台町)。

*² 准員、神戸大学大学院。

における接線方向から外した場合においても、ひずみ速度方向は P_2Q_2 方向を向くことになり、これも現実の現象から外れたものになる。

以上のように連合流れ則を用いた剛塑性解析は、ひずみが大きく弾性部分が無視でき、塑性変形が続行し、かつ応力経路あるいはひずみ経路が急に变化しない場合にのみ妥当であると言える。したがって応力経路あるいはひずみ経路が急に变化する場合、剛塑性解析においても応力速度とひずみ速度が1対1対応する構成式⁽⁶⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾の使用が望ましい。

3. 速度形剛塑性有限要素法

ここではいわゆる J2 変形理論による剛塑性体の構成式(J2DR)⁽¹⁰⁾を用いる。このとき偏差ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ と応力速度 σ'_{ij} の関係はつぎのように表される。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{1}{E_s} \sigma'_{ij} + \frac{1}{4\sigma^2} \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_s} \right) \sigma'_{ij} \sigma'_{mn} \sigma'_{mn} \dots (1)$$

ここで $\bar{\sigma}$ は相当応力、 $\bar{\epsilon}$ は相当ひずみ、 E_s, E_t はそれぞれ割線および接線係数で $E_s = \bar{\sigma}/\bar{\epsilon}$ 、 $E_t = d\bar{\sigma}/d\bar{\epsilon}$ のように表すことができる。式(1)の逆関係を求め⁽¹¹⁾、それに平均応力速度を加えることにより応力速度 σ'_{ij} とひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ の関係を得る。

$$\sigma'_{ij} = \left[\frac{1}{3} E_s (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{\sigma^2} (E_s - E_t) \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \dot{\epsilon}_{kl} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \dots (2)$$

ただし λ は

$$\lambda = \lambda_1 - \frac{2}{9} E_s \left\{ \dots (3) \right.$$

$$\sigma'_{ii} = 3\lambda_1 \dot{\epsilon}_{ii}$$

これに対して J2 変形理論による弾塑性体の構成式

(J2D)⁽¹²⁾はつぎのようになる。

$$\sigma'_{ij} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{mm} = \left[G_s \left[\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \frac{2\nu_s}{1-2\nu_s} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] - \frac{3G_s \sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\sigma^2 (H_s/3G_s + 1)} \right] \dot{\epsilon}_{kl} \dots (4)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} E_s &= 2G_s(1+\nu_s) \\ 1/E_t &= 1/E_s + 1/H_s \\ \nu_s/E_s &= \nu/E + \frac{1}{2}(1/E_s - 1/E) \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

ν : ポアソン比, E : 弾性係数

式(4)と J2DR 式(2)の対応関係を調べるために、次式で表される塑性域における相当応力 $\bar{\sigma}$ -相当ひずみ $\bar{\epsilon}$ 関係を導入する。

$$\bar{\sigma} = \sigma_Y (\bar{\epsilon}/\epsilon_Y)^n \dots (6)$$

σ_Y は降伏応力、 ϵ_Y は降伏ひずみ、この場合、式(4)の各量は次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} E_t &= nE\alpha \\ E_s &= E\alpha \\ H_s &= \frac{n}{1-n} E\alpha \\ \nu_s &= 1/2 + (\nu - 1/2)\alpha \\ H &= \frac{nE\alpha}{1-n\alpha} \\ \alpha &= (\bar{\epsilon}/\epsilon_Y)^{n-1} \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

J2D で、ひずみが大きくなると、 $\alpha \rightarrow 0$ なることを考慮すると、上式より式(4)の各項はその極限において

$$\left. \begin{aligned} G_s &\rightarrow E_s/3 \\ 2G_s\nu_s/(1-2\nu_s) &\rightarrow \infty \\ 3G_s/(H_s/3G_s + 1) &\rightarrow E_s - E_t \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

となる。したがって J2DR 中 λ は J2D のひずみが大きくなったときの $2\nu_s E_s/3(1-2\nu_s)$ の値とみなすことができる。これより、Penalty 形の有限要素法を用いて解析する場合、Penalty の大きさとして正の大きな数値を用いる代わりに、上記事実を考慮して、 $\lambda = 2\nu_s E_s/3(1-2\nu_s)$ とすることにより変形が大きくなるに伴ってより拘束が強くなる Penalty を導入することができる。なお以上の議論は相当応力-相当ひずみ関係が式(6)で表される場合についてのものであるが、他の場合においても同様の結論を得ることができる。ところでこのような構成式を用いた場合、相当ひずみ速度 $\dot{\bar{\epsilon}} = (2/3 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2}$ は式(1)より求めることができる⁽¹³⁾。

図1 応力およびひずみ経路

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\epsilon}}^2 &= \left(\frac{1}{E_t^2} - \frac{1}{E_s^2} \right) \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{E_s^2} \dot{\sigma}^2 \\ \dot{\sigma} &= \frac{2}{3\sigma} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \\ \dot{\sigma} &= \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

また応力点における σ'_{ij} と σ'_{ij} および σ'_{ij} と $\dot{\epsilon}'_{ij}$ のなす角を θ, δ とすると

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \\ \cos \delta &= \left\{ 1 + \left(\frac{E_t}{E_s} \right)^2 (\cos^2 \theta - 1) \right\}^{-1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

降伏曲面の応力点において、円すい角 β のとがり点の形成を許容した場合、Budiansky の全負荷条件⁽¹⁴⁾はつぎのように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E_s} \dot{\sigma}^2 + \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_s} \right) \dot{\sigma}^2 &> 0 \\ \theta &\leq \beta \\ \delta + \beta &\leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

上式の第1式は、硬化材のとき満足する。第2式は応力速度方向角 θ が円すい角 β より大きくなってはいけないという制約で、第3式はひずみ速度方向が降伏曲面に立てた法線で形成される円すい内に限定されることを表している。応力速度あるいはひずみ速度方向が式(11)の第2、3式を満足しない領域に式(1)を用いると材料の剛性を低く評価する傾向になる。すなわち除荷に対しても亜弾性的な挙動となる。

いっぽう式(2)はポテンシャル W を定義するとつぎのように表示できる。

図2 平面ひずみ下でのブロックの引張りにおけるくびれの解析モデル

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \partial W / \partial \epsilon'_{ij} \\ W &= \frac{1}{2} D_{ijkl} \epsilon'_{ij} \epsilon'_{kl} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

これに対して Updated Lagrange 表示の変分原理⁽¹⁵⁾が導出できる。

$$\left. \begin{aligned} \delta \Phi &= 0 \\ \Phi &= \frac{1}{2} \int_V [(D_{ijkl} - F_{ijkl}) \dot{\epsilon}'_{ij} \dot{\epsilon}'_{kl} + \sigma_{mj} v_{i,m} v_{i,j}] dV \\ &\quad - \int_{A_t} \dot{t}_i v_i dA \\ F_{ijkl} &= \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \delta_{jl} + \sigma_{ji} \delta_{ik} + \sigma_{il} \delta_{jk} + \sigma_{jk} \delta_{il}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで v_i は変位速度、 $\dot{t}_i$ は外力の変化率を表す。ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ 、変位速度 v 、変位速度こう配 g など文献(15)において定義したベクトル、マトリックスを導入して式(13)をマトリックス表示すると

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \int_V [\dot{\epsilon}^T (D - F) \dot{\epsilon} + g^T Q g] dV \\ &\quad - \int_{A_t} v^T \dot{t} dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

変位速度 v 、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ 、変位速度こう配 g を有限要素近似して節点変位速度 $\dot{\delta}$ により表示すると

$$\left. \begin{aligned} v &= \psi \dot{\delta} \\ \dot{\epsilon} &= B \dot{\delta} \\ g &= E \dot{\delta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

上式でマトリックス ψ, B, E などの具体形については文献(15)を参照されたい。これを式(14)に代入して Φ を有限要素表示すると

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \dot{\delta}^T \int_V [B^T (D - F) B + E^T Q E] dV \dot{\delta} \\ &\quad - \dot{\delta}^T \int_{A_t} \psi^T \dot{t} dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

Φ の $\dot{\delta}$ についての停留条件を求めると剛塑性体の速度形有限要素方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} K \dot{\delta} &= \hat{t} \\ K &= \int_V [B^T (D - F) B + E^T Q E] dV \\ \hat{t} &= \int_{A_t} \psi^T \dot{t} dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

上式は通常の弾塑性有限要素法の場合と同形であるので、弾塑性有限要素法プログラムに容易に組み込むことができる^{**1}。

^{**1} なお、上記解析で応力が降伏応力以下の領域のマトリクス D は、 $E_s = E_t = E$ 、 λ_1 を $\nu = 0.499$ の場合の体積弾性係数で近似して評価するとよい。

4. 引張りを受けるブロックの 平面ひずみ下での変形解析

提案した速度形剛塑性有限要素法による解の性質を検討するために図2に示すような両端が固着されたブロックが平面ひずみ下で単軸引張りを受けた場合の変形解析を行った。解析モデルはCrossed Triangles要素を用い、図3に示すような2種類の要素分割とした。この要素では四角形の対角線の交点に節点があると非圧縮性変形による拘束が通常の分割よりも緩和され好ましい結果を与えることが知られている⁽¹⁶⁾。以下変形前に四角形の対角線の交点に一致していた節点は変形とともに移動し変形後対角線の交点でなくなる場合をCT、増分計算の各ステップにおいて四角形内の節点が常に対角線の交点となるように位置を修正した場合をCTMとする。ただし、位置の修正にあたり応力、ひずみなどの再配分は行っていない。なおブロッ

a1, a2

b1, b2

図3 Crossed Triangles要素による分割
a1, b1: CT要素
a2, b2: CTM要素

図5 変形形状 $u/L=0.15$

クの材料の構成式は式(6)で $E=200$ GPa, $\sigma_y/E=0.002$, $n=0.0625$ としたものである。

図4に端面の平均応力 $\bar{\sigma}$ を降伏応力 σ_y で正規化した値 $\bar{\sigma}/\sigma_y$ 、くびれ部の変位 v/W と端面の変位 u/L の関係を示す。最高荷重点の約2倍の変位に到達した後、変形に差が出てくる。特にCTMを用いたb2の結果における荷重の低下は著しい。しかしながらくびれ部の変位の増加は抑えられている。これは塑性変形の非圧縮性による変形拘束がCTM要素を用いることにより緩和されたためであると考えられる。参考までにCT要素とJ2流れ理論(J2F)、低減積分を用いた8節点四角形要素とJ2コーナ理論(J2C)によって同じ問題を解析した結果⁽¹⁷⁾を図示している。J2Fおよび

図4 荷重 $\bar{\sigma}$ 、くびれ部の変位 v/W と
端面の変位 u/L 関係

図 6 相当塑性ひずみ分布 $u/L=0.15$

J2C とも極めて多自由度モデルであるので今回の結果と直接の比較は困難であると思われるが, J2DR の結果は J2C の結果に近いようである。

図 5 は $u/L=0.15$ のときの変形形状を示している。これより J2DR の結果は J2C の結果によく対応し, せん断帯の発生が明らかに見られる。特に b2 は顕著である。なお図 5 において CTM 要素を用いると要素境界線が滑らかになり, CT 要素を用いると四角形の中の節点を連ねた曲線(破線)が滑らかになることが明らかとなった。このことは非圧縮性に近い変形の解析を行った場合, 得られた結果を検討するとき考慮しなければならない事項である。

図 6 は $u/L=0.15$ のときの相当塑性ひずみ分布である。低いひずみ域の等高線の形状に差はない。高いひずみ域の等高線については比較的自由度が多い b2 と J2C との対応がよいようである。

以上平面ひずみ下でのブロックのくびれ問題の解析を通じて提案した速度形剛塑性有限要素法による解の性質が明らかになった。もちろん通常の剛塑性有限要素法同様, 除荷域の応力計算についての妥当性に関する問題は残るが, 増分解析を行うことから初期速度を仮定しなくても解析を続行できることは, 初期速度の良否が解の収束性と密接に関係している通常の剛塑性有限要素法には見られない長所であると言える。

5. 結 言

流れ理論を用いた剛塑性有限要素法解析の問題点を指摘しそれを一部解決するために, 応力速度とひずみ速度の間に 1 対 1 関係が存在する構成式を用いた速度形剛塑性有限要素法を提案した。つぎに提案した手法を平面ひずみ下で単軸引張りを受けるブロックのくび

れ問題の解析に適用し, 得られた解の性質を検討した。その結果, 本解析結果は J2C 形の構成式を用いて得られる結果に近く, 変形の局所化を追跡するのに適していることがわかった。また本手法は初期変形速度場を仮定する必要はないので, 初期速度の良否が解の収束性に大きく影響する従来の剛塑性有限要素法と比較して使いやすいことなどの特徴を有している。

文 献

- (1) Lung, M. and Mahrenholtz, O., *Trans. CSME.*, 2(1973/4), 31.
- (2) Lee, C. H. and Kobayashi, S., *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 95-3(1973), 865.
- (3) Tomita, Y. and Sowerby, R., *Int. J. Mech. Sci.*, 20-6(1978), 361.
- (4) 森・ほか 2 名, 機論, 45-396, A (昭 54), 965.
- (5) Budiansky, B., Lavrenter, M. A. ほか編, *Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics*, (1969), 77, SIAM.
- (6) Christoffersen, J. and Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 25-5/6(1979), 465.
- (7) 進藤, 塑性力学討論会論文集, (1985), 1, 日本材料学会.
- (8) 後藤, 機論 47-424, A (昭 56), 1389.
- (9) Itoh, K., *Tech. Rep. Tohoku Univ.*, 44-2(1979), 199.
- (10) Stören, S. and Rice, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, 23-6(1975), 421.
- (11) 富田・ほか 3 名, 機論, 51-467, A (昭 60), 1872.
- (12) Needleman, A. and Tvergaard, V., *J. Mech. Phys. Solids*, 25-3(1977), 159.
- (13) Tomita, Y. and Shindo, A., *Proc. Int. Symp. Plastic Instability, Considere Memorial* (1985), 203. Ponts et Chaussees.
- (14) Budiansky, B., *J. Appl. Mech.*, 26-2(1959), 259.
- (15) 富田, 塑性と加工, 22-244(昭 56), 410.
- (16) Nagtegaal, D. M., ほか 3 名, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 4-2(1974), 153.
- (17) 神馬・富田, 変形問題に関するベンチマークテスト結果の概要, 第 103 回塑性加工シンポジウム (昭 61-5), 59. あるいは日本塑性加工学会資料集 No. 2(昭 61-8).