加熱された剛体円環がはめ込まれた無限円柱の非定常熱応力*

(第3報, 非軸対称加熱の場合)

野田 直 剛^{*1}, 玉村 克 喜^{*2}

Transient Thermal Stresses in a Long Circular Cylinder Inserted into a Rigid Heated Ring (3rd Report, The Asymmetrically Heated Condition)

Naotake NODA and Katsuki TAMAMURA

This work is concerned with the determination of transient thermal stresses in a long circular cylinder inserted into a short rigid heated ring. It is assumed that the heating condition is asymmetrical with respect to θ . The problem is formulated in terms of a integral equation using the Fourier series, Fourier transform and Neumann series. The radial, hoop and axial stresses have singularities at the end of a short rigid ring on a cylindrical surface. The factors are defined to evaluate the singularity of stresses, and the relation between these factors is derived.

Key Words: Elasticity, Thermelasticity, Asymmetric Heating, Contact Problem, Unsteady State, Stress Singularity, Integral Equation, Cylinder

1. 結 言

各種機械, 構造物において, 部材が他の部材と接合したり接触するときの熱応力問題は圧延ロール, 軸受, 軸圧入部に多くみられ, 例えば, 軸圧入部の場合, 接合部の摩擦による発熱現象と端近傍の応力集中により損傷する場合があります。重要問題となっている。そこで前報⁽¹⁾までは, 加熱された剛体円環がはめ込まれた無限円柱の軸対称非定常熱応力として, 接合面が滑らかに接触している場合⁽¹⁾と, 接合面が完全に固着している場合⁽²⁾を理論解析し, 剛体との接触端における特異応力の発生とその大きさを評価し, さらに円柱の長さの影響を考慮した有限長さの円柱⁽³⁾について理論解析を行った。しかしこれらの問題はいずれも軸対称加熱であり, 非軸対称加熱を受ける場合には適用できない。

そこで本研究では, 接触問題における軸対称加熱を受ける無限円柱の非軸対称加熱を受ける場合への拡張として, 非軸対称加熱を受ける無限円柱の非定常熱応力を理論解析した。解析法は前報までと同様であり, 数値計算を実行し, 応力分布を求め, かつ接触端での

応力の特異性について考察を行った。

2. 解 析

2・1 温度解析 図1のように, 半径 a の無限円柱に幅 $2c$ の剛体円環がはまり, 円環と円柱の間に単位時間, 単位面積あたりの非軸対称熱発生 $\bar{f}(\theta, z)$ があり, 温度零の周囲媒質へ相対熱伝達率 h で熱放散がある場合について考える。このとき, 温度場が満足すべき熱伝導方程式, 境界条件式, 初期条件式は, 無次元表示で

$$\Delta \bar{T} = \bar{T}_{,r} \dots\dots\dots (1)$$

$$[\bar{T}_{,r} + Bi\bar{T}]_{r=1} = f(\theta, \zeta) \dots\dots\dots (2)$$

$$[\bar{T}]_{r=0} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

図1 加熱された剛体円環がはめ込まれた無限円柱

* 昭和62年11月3日 北陸信越支部北陸地方学術講演会において講演, 原稿受付 昭和62年4月20日。

^{*1} 正員, 静岡大学工学部(〒422 浜松市城北3-5-1)。

^{*2} 准員, 静岡大学大学院。

ただし, $\hat{T}$ は無次元温度, τ はフーリエ数, Bi はビオ数で, $\Delta = \partial^2/\partial\rho^2 + \rho^{-1}\partial/\partial\rho + \rho^{-2}\partial^2/\partial\theta^2 + \partial^2/\partial\zeta^2$ である. 式(2), (3)を満足する式(1)の解は次式で表される.

$$\hat{T} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{f_{na} I_n(\alpha\rho)}{\{a I_{n+1}(\alpha) + (n+Bi) I_n(\alpha)\} \pi} - \frac{2\beta_{nk}^2 f_{na} J_n(\beta_{nk}\rho) e^{-(\alpha^2 + \beta_{nk}^2)\tau}}{(\alpha^2 + \beta_{nk}^2)(Bi^2 - n^2 + \beta_{nk}^2) J_n(\beta_{nk}) \pi} \right] \cos n\theta \cos \alpha\zeta da \quad (4)$$

ここで, $J_n(x)$, $I_n(x)$ はおのの第1種 n 次のベッセル関数および第1種 n 次の変形ベッセル関数であり, β_{nk} は

$$\beta_n J_{n+1}(\beta_n) - (n+Bi) J_n(\beta_n) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

の第 n 番めの正根であり, f_{na} は δ_{n0} をクロネッカーのデルタとすると, 次のように表される.

$$f_{na} = \frac{2}{(1+\delta_{n0})\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(\theta, \zeta) \cos n\theta \cos \alpha\zeta d\zeta d\theta \quad \dots\dots\dots (6)$$

なお, 上式は次式で表される無次元量を用い, $\bar{f}(\theta, z) = \bar{f}(-\theta, z)$, $\bar{f}(\theta, z) = \bar{f}(\theta, -z)$ と仮定した.

$$\rho = r/a, \zeta = z/a, \zeta_0 = c/a, Bi = ha, \tau = xt/a^2, f(\theta, \zeta) = \bar{f}(\theta, z)/Q_0, \hat{T} = \lambda T/Q_0 a \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで, x は熱拡散率, λ は熱伝導率, Q_0 は単位時間, 単位面積あたりの発熱量, T は温度である.

2・2 熱応力解析 円柱座標系 (ρ, θ, ζ) の三次元熱応力問題は次式を満足する熱弾性変位ポテンシャル Φ , Michell の関数 M , Boussinesq の関数 ψ を用いて解析することができる.

$$\Delta\Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_i a^2 T \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\Delta M = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\Delta\psi = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで, ν はポアソン比, α_i は線膨張係数である. G を横弾性係数とすると, 変位および熱応力は

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= a^{-2} \{ \Phi_{,\rho} - M_{,\rho\zeta} + 2\rho^{-1}\psi_{,\theta} \}, u_\theta = a^{-2} \{ \rho^{-1}\Phi_{,\theta} - \rho^{-1}M_{,\theta\zeta} - 2\psi_{,\rho} \} \\ u_\zeta &= a^{-2} \{ \Phi_{,\zeta} + 2(1-\nu)\Delta M - M_{,\zeta\zeta} \} \\ \sigma_{\rho\rho} &= 2Ga^{-2} \{ \Phi_{,\rho\rho} - \Delta\Phi + (\nu\Delta M - M_{,\rho\rho})_{,\zeta} + 2\rho^{-1}\psi_{,\rho\theta} - 2\rho^{-2}\psi_{,\theta} \} \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2Ga^{-2} \{ \rho^{-1}\Phi_{,\rho} + \rho^{-2}\Phi_{,\theta\theta} - \Delta\Phi + (\nu\Delta M - \rho^{-1}M_{,\rho} - \rho^{-2}M_{,\theta\theta})_{,\zeta} - 2\rho^{-1}\psi_{,\rho\theta} + 2\rho^{-2}\psi_{,\theta} \} \\ \sigma_{\zeta\zeta} &= 2Ga^{-2} \{ \Phi_{,\zeta\zeta} - \Delta\Phi + \{ (2-\nu)\Delta M - M_{,\zeta\zeta} \}_{,\zeta} \} \\ \sigma_{\rho\theta} &= 2Ga^{-2} \{ \rho^{-1}\Phi_{,\rho\theta} - \rho^{-2}\Phi_{,\theta} + \rho^{-1}(\rho^{-1}M - M_{,\rho})_{,\zeta\theta} - 2\psi_{,\rho\rho} - \psi_{,\zeta\zeta} \} \\ \sigma_{\rho\zeta} &= 2Ga^{-2} \{ \Phi_{,\rho\zeta} + \{ (1-\nu)\Delta M - M_{,\zeta\zeta} \}_{,\rho} + \rho^{-1}\psi_{,\theta\zeta} \} \\ \sigma_{\zeta\theta} &= 2Ga^{-2} \{ \rho^{-1}\Phi_{,\theta\zeta} + \rho^{-1} \{ (1-\nu)\Delta M - M_{,\zeta\zeta} \}_{,\theta} - \psi_{,\rho\zeta} \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

図1のように円環が滑らかに接触し, はく離も起こらないようにはまるときの力学的境界条件は

$$(\sigma_{\rho\rho})_{\rho=1} = 0 \quad (|\zeta| > \zeta_0), (u_\rho)_{\rho=1} = 0 \quad (|\zeta| \leq \zeta_0) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$(\sigma_{\rho\theta})_{\rho=1} = 0, (\sigma_{\rho\zeta})_{\rho=1} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(8)の特解 Φ は式(4)より, M, ψ は, 式(9), (10)と境界条件および問題の対称性を考慮して

$$\Phi = a^2 K \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_{na1} \rho I_{n+1}(\alpha\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nak} J_n(\beta_{nk}\rho) \right\} \cos n\theta \cos \alpha\zeta da \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$M = a^2 K \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \alpha^{-3} \{ B_{na} I_n(\alpha\rho) + C_{na} \alpha \rho I_{n+1}(\alpha\rho) \} \sin \alpha\zeta da \right] \cos n\theta \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\psi = a^2 K \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \alpha^{-2} D_{na} I_n(\alpha\rho) \cos \alpha\zeta da \right] \sin n\theta \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで, B_{na}, C_{na}, D_{na} は未知係数, $K = (1+\nu)\alpha_i Q_0 a / \lambda(1-\nu)$ かつ

$$A_{na1} = \frac{f_{na}}{\{a I_{n+1}(\alpha) + (n+Bi) I_n(\alpha)\} \pi}, A_{nak} = \frac{2\beta_{nk}^2 f_{na} e^{-(\alpha^2 + \beta_{nk}^2)\tau}}{(\alpha^2 + \beta_{nk}^2)^2 (Bi^2 - n^2 + \beta_{nk}^2) J_n(\beta_{nk}) \pi}$$

である.

式(14)~(16)を式(11)に代入すると, 変位および応力は次式となる.

$$\begin{aligned} u_\rho &= K \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_{na1} \left\{ \frac{\alpha \rho I_n(\alpha\rho) - n I_{n+1}(\alpha\rho)}{2\alpha} \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nak} \left\{ \frac{n}{\rho} J_n(\beta_{nk}\rho) - \beta_{nk} J_{n+1}(\beta_{nk}\rho) \right\} - \frac{B_{na}}{\alpha} \left\{ \frac{n}{\alpha\rho} I_n(\alpha\rho) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + I_{n+1}(\alpha\rho) \right\} - C_{na} \left\{ \rho I_n(\alpha\rho) - \frac{n}{\rho} I_{n+1}(\alpha\rho) \right\} + D_{na} \frac{2n}{\alpha^2 \rho} I_n(\alpha\rho) \right] \cos n\theta \cos \alpha\zeta da \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\widehat{\rho\rho} = \sigma_{\rho\rho} / 2GK = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_{na1} \left\{ \frac{-I_n(\alpha\rho)}{2} + \frac{\alpha^2 \rho^2 + n^2 + n}{2\alpha\rho} I_{n+1}(\alpha\rho) \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nak} \left\{ \left(\alpha^2 + \frac{n^2 - n}{\rho^2} \right) J_n(\beta_{nk}\rho) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta_{nk}}{\rho} J_{n+1}(\beta_{nk}\rho) \Big\} + B_{na} \{ ((n-n^2)/\alpha^2 \rho^2 - 1) I_n(\alpha\rho) + I_{n+1}(\alpha\rho)/\alpha\rho \} + C_{na} \{ (2\nu-1) I_n(\alpha\rho) \\
& - (\alpha\rho + (n^2+n)/\alpha\rho) I_{n+1}(\alpha\rho) \} + D_{na} \{ (2n^2-2n) I_n(\alpha\rho)/\alpha^2 \rho^2 + 2n I_{n+1}(\alpha\rho)/\alpha\rho \} \Big\} \cos n\theta \cos \alpha\zeta da \\
& \dots\dots\dots (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho\theta} = \sigma_{\theta\theta}/2GK = & \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \left[A_{na1} \left\{ \frac{-nI_n(\alpha\rho)}{2} + \frac{n^2+n}{2\alpha\rho} I_{n+1}(\alpha\rho) \right\} + \sum_{k=1}^\infty A_{nak} \left\{ \frac{n-n^2}{\rho^2} J_n(\beta_{nk}\rho) + \frac{n\beta_{nk}}{\rho} J_{n+1}(\beta_{nk}\rho) \right\} \right. \\
& + B_{na} \{ (n^2-n) I_n(\alpha\rho)/\alpha^2 \rho^2 + n I_{n+1}(\alpha\rho)/\alpha\rho \} + C_{na} \{ n I_n(\alpha\rho) - (n^2+n) I_{n+1}(\alpha\rho)/\alpha\rho \} \\
& \left. + D_{na} \{ ((2n-2n^2)/\alpha\rho - 1) I_n(\alpha\rho)/\alpha\rho + 2 I_{n+1}(\alpha\rho)/\alpha\rho \} \right] \sin n\theta \cos \alpha\zeta da \dots\dots\dots (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho\zeta} = \sigma_{r\zeta}/2GK = & \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \left[A_{na1} \left\{ \frac{-\alpha\rho I_n(\alpha\rho)}{2} + \frac{n}{2} I_{n+1}(\alpha\rho) \right\} + \sum_{k=1}^\infty A_{nak} \left\{ \frac{-n\alpha}{\rho} J_n(\beta_{nk}\rho) + \alpha\beta_{nk} J_{n+1}(\beta_{nk}\rho) \right\} \right. \\
& + B_{na} \{ n I_n(\alpha\rho)/\alpha\rho + I_{n+1}(\alpha\rho) \} + C_{na} \{ (2n(1-\nu)/\alpha\rho + \alpha\rho) I_n(\alpha\rho) + (2-2\nu-n) I_{n+1}(\alpha\rho) \} \\
& \left. - D_{na} n I_n(\alpha\rho)/\alpha\rho \right] \cos n\theta \sin \alpha\zeta da \dots\dots\dots (20)
\end{aligned}$$

ただし, $u_\theta, u_r, \widehat{\theta\theta}, \widehat{\zeta\zeta}, \widehat{\xi\theta}$ は省略した。

未知係数 B_{na}, C_{na}, D_{na} を決定するため, 式(17)-(20)を境界条件(12), (13)に代入し変形すると次式を得る。

$$\int_0^\infty \left\{ G_2(\alpha) + \frac{\eta_2(\alpha)}{\eta_1(\alpha)} (x_n(\alpha) - G_1(\alpha)) \right\} \cos \alpha\zeta da = 0 \quad |\zeta| \leq \zeta_0 \dots\dots\dots (21)$$

$$\int_0^\infty x_n(\alpha) \cos \alpha\zeta da = 0 \quad |\zeta| > \zeta_0 \dots\dots\dots (22)$$

ここで, $x_n(\alpha)$ は未知関数であり, $G_1(\alpha), G_2(\alpha), \eta_1(\alpha), \eta_2(\alpha)$ は既知関数で次式で与えられる。

$$x_n(\alpha) = G_1(\alpha) + D_{na} \eta_1(\alpha) \dots\dots\dots (23)$$

$$G_1(\alpha) = A_{na1} \{ E_{na} + (F_{na} G_{na} + H_{na} I_{na})/J_{na} \} + \sum_{k=1}^\infty A_{nak} \{ K_{nak} + (F_{na} L_{nak} + H_{na} M_{nak})/J_{na} \} \dots\dots\dots (24)$$

$$G_2(\alpha) = A_{na1} \{ N_{na} + (O_{na} G_{na} + P_{na} I_{na})/J_{na} \} + \sum_{k=1}^\infty A_{nak} \{ Q_{nak} + (O_{na} L_{nak} + P_{na} M_{nak})/J_{na} \} \dots\dots\dots (25)$$

$$\eta_1(\alpha) = R_{na} + (F_{na} T_{na} + H_{na} U_{na})/J_{na}, \quad \eta_2(\alpha) = S_{na} + (O_{na} T_{na} + P_{na} U_{na})/J_{na} \dots\dots\dots (26)$$

$$E_{na} = \{ -\alpha I_n(\alpha) + (\alpha^2 + n^2 + n) I_{n+1}(\alpha) \} / 2\alpha, \quad N_{na} = \{ \alpha I_n(\alpha) - n I_{n+1}(\alpha) \} / 2\alpha$$

$$K_{nak} = (\alpha^2 + n^2 - n) J_n(\beta_{nk}) + \beta_{nk} J_{n+1}(\beta_{nk}), \quad Q_{nak} = n J_n(\beta_{nk}) - \beta_{nk} J_{n+1}(\beta_{nk})$$

$$F_{na} = \{ (n - n^2)/\alpha^2 - 1 \} I_n(\alpha) + I_{n+1}(\alpha)/\alpha, \quad H_{na} = (2\nu - 1) I_n(\alpha) - \{ \alpha + (n^2 + n)/\alpha \} I_{n+1}(\alpha)$$

$$O_{na} = -n I_n(\alpha)/\alpha^2 - I_{n+1}(\alpha)/\alpha, \quad P_{na} = -I_n(\alpha) + n I_{n+1}(\alpha)/\alpha$$

$$R_{na} = (2n^2 - 2n) I_n(\alpha)/\alpha + 2n I_{n+1}(\alpha)/\alpha, \quad S_{na} = 2n I_n(\alpha)/\alpha^2$$

$$G_{na} = -n^2(1-\nu) I_n^2(\alpha)/\pi\alpha + (n^2+n)(1-\nu) I_{n+1}^2(\alpha)/\pi\alpha + \{ (n^3+n^2)(1-\nu)/\pi\alpha^2 + (-n+\nu n)/\pi \} I_n(\alpha) I_{n+1}(\alpha)$$

$$I_{na} = n I_n^2(\alpha)/2\pi\alpha - n I_{n+1}^2(\alpha)/2\pi\alpha - n^2 I_n(\alpha) I_{n+1}(\alpha)/\pi\alpha^2$$

$$\begin{aligned}
T_{na} = & \{ 4(1-\nu)(n^2-n^3)/\alpha^3 + (2\nu n - n^2)/\alpha - \alpha \} I_n^2(\alpha) + (4-4\nu-2n) I_{n+1}^2(\alpha)/\alpha \\
& + \{ 2\nu + n + (8n-7n^2+n^3-8\nu n+4\nu n^2)/\alpha^2 \} I_n(\alpha) I_{n+1}(\alpha)
\end{aligned}$$

$$U_{na} = \{ (n^3-n^2)/\alpha^3 + n/\alpha \} I_n^2(\alpha) - 2 I_{n+1}^2(\alpha)/\alpha + \{ (-4n+n^2)/\alpha^2 + 1 \} I_n(\alpha) I_{n+1}(\alpha)$$

$$J_{na} = \{ n/\alpha - 2(1-\nu)(n^3-n^2)/\alpha^3 \} I_n^2(\alpha) + (-3n+2\nu n) I_{n+1}^2(\alpha)/\alpha + (-6n^2+4\nu n^2+2n-2\nu n) I_n(\alpha) I_{n+1}(\alpha)/\alpha^2$$

$$\begin{aligned}
L_{nak} = & \{ 2(n^2-n^3)(1-\nu)/\alpha + \alpha n \} I_n(\alpha) J_n(\beta_{nk}) + 2n^2 \beta_{nk} (1-\nu) I_n(\alpha) J_{n+1}(\beta_{nk})/\alpha \\
& + (2n-4n^2-2\nu n+2\nu n^2) I_{n+1}(\alpha) J_n(\beta_{nk}) + \beta_{nk} (3n-2\nu n) I_{n+1}(\alpha) J_{n+1}(\beta_{nk})
\end{aligned}$$

$$M_{nak} = -n \beta_{nk} I_n(\alpha) J_{n+1}(\beta_{nk})/\alpha - n I_{n+1}(\alpha) J_n(\beta_{nk})$$

式(21), (22)の連立積分方程式を解くために, 未知関数 $x_n(\alpha)$ をノイマン級数を用いて次のように仮定する。

$$x_n(\alpha) = \zeta_0 \sum_{i=0}^\infty a_{in} J_{2i}(\alpha\zeta_0) \dots\dots\dots (27)$$

ここで, a_{in} は未知係数である。式(27)をフーリエ $\cos$ 変換すると

$$\int_0^\infty x_n(\alpha) \cos \alpha\zeta da = \begin{cases} \sum_{i=0}^\infty a_{in} \frac{(-1)^i T_{2i}(\zeta/\zeta_0)}{\sqrt{1-(\zeta/\zeta_0)^2}} & (0 \leq \zeta \leq \zeta_0) \\ 0 & (\zeta > \zeta_0) \end{cases} \dots\dots\dots (28)$$

となり, 式(22)が恒等的に満足されていることがわかる。ただし, T_n はチェビシェフの多項式である。

次に、式(21)において、 $\beta = \arcsin(\xi/\xi_0)$ とおき、ノイマン級数展開

$$\cos \alpha \xi = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j J_{2j}(\alpha \xi_0) \cos 2j\beta \quad (\varepsilon_0=1, \varepsilon_1=\varepsilon_2=\dots=2) \quad (29)$$

を用いて整理し、任意の β について成立することにより、未知係数 a_{in} を決定する無限連立一次方程式を得る。

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{in} C_{ji} = D_j \quad (j=0, 1, 2, \dots) \quad (30)$$

ただし

$$C_{ji} = \int_0^{\infty} \xi_0 \frac{\eta_2(\alpha)}{\eta_1(\alpha)} J_{2i}(\alpha \xi_0) J_{2j}(\alpha \xi_0) d\alpha, \quad D_j = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\eta_2(\alpha)}{\eta_1(\alpha)} G_1(\alpha) - G_2(\alpha) \right\} J_{2j}(\alpha \xi_0) d\alpha \quad (31)$$

したがって、式(30)より a_{in} が決定されると、式(23)より D_{na} が求まり順次 B_{na} , C_{na} が求まり式(17)~(20)より変位および応力成分が求まる。

2.3 応力の特異性の評価 境界上の $\widehat{\rho\rho}$, $\widehat{\theta\theta}$, $\widehat{\xi\xi}$ は次のように接触端で特異性を示す。 $(\widehat{\rho\rho})_{\rho=1}$ は

$$(\widehat{\rho\rho})_{\rho=1} = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\alpha) \cos n\theta \cos \alpha \xi d\alpha = H(\xi_0 - |\xi|) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} \frac{(-1)^i T_{2i}(\xi/\xi_0)}{\sqrt{1-(\xi/\xi_0)^2}} \cos n\theta \quad (32)$$

となり、 $\xi \rightarrow \xi_0 - 0$ のときオーダー $-1/2$ の特異性を示す。ただし、 $H(\)$ はヘビサイドのステップ関数である。次に、 $(\widehat{\theta\theta})_{\rho=1}$, $(\widehat{\xi\xi})_{\rho=1}$ のうち $x_n(\alpha)$ を含む項をおのおの I_θ , I_z とおき、これらを有限積分と漸近積分で表示すると

$$I_\theta = \int_0^{\alpha_0} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \Omega_\theta(\alpha) - \beta_0 \} x_n(\alpha) \cos n\theta \cos \alpha \xi d\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \xi_0^i \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} v_i(2i, \alpha_0 \xi_0) \cos n\theta \\ + H(\xi_0 - |\xi|) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0 \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} \frac{(-1)^i T_{2i}(\xi/\xi_0)}{\sqrt{1-(\xi/\xi_0)^2}} \cos n\theta \quad (33)$$

$$I_z = \int_0^{\alpha_0} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \Omega_z(\alpha) - \gamma_0 \} x_n(\alpha) \cos n\theta \cos \alpha \xi d\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \xi_0^i \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} v_i(2i, \alpha_0 \xi_0) \cos n\theta \\ + H(\xi_0 - |\xi|) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_0 \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} \frac{(-1)^i T_{2i}(\xi/\xi_0)}{\sqrt{1-(\xi/\xi_0)^2}} \cos n\theta \quad (34)$$

ただし

$$v_k(m, x_0) = \int_{x_0}^{\infty} \frac{J_m(x) \cos(x\xi/\xi_0)}{x^k} dx, \quad \bar{\Omega}_\theta(\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \alpha^{-i}, \quad \bar{\Omega}_z(\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \alpha^{-i} \\ \Omega_\theta(\alpha) = \{ V_{na} + (W_{na} T_{na} + X_{na} U_{na}) / J_{na} \} / \eta_1(\alpha), \quad \Omega_z(\alpha) = \{ (Y_{na} T_{na} + Z_{na} U_{na}) / J_{na} \} / \eta_1(\alpha) \\ V_{na} = (2n - 2n^2) I_n(\alpha) / \alpha^2 - 2n I_{n+1}(\alpha) / \alpha, \quad W_{na} = (n^2 - n) I_n(\alpha) / \alpha^2 - I_{n+1}(\alpha) / \alpha \\ X_{na} = (2\nu - 1) I_n(\alpha) + (n^2 + n) I_{n+1}(\alpha) / \alpha, \quad Y_{na} = I_n(\alpha), \quad Z_{na} = (4 - 2\nu) I_n(\alpha) + \alpha I_{n+1}(\alpha)$$

β_i, γ_i を $i=0 \sim 3$ まで表すと

$$\beta_0 = 2\nu, \quad \beta_1 = -4\nu^2 + \nu + 2, \quad \beta_2 = (-2\nu + 1)n^2 + 8\nu^3 - 6\nu^2 - (9/2)\nu + 2 \\ \beta_3 = (10\nu^2 - 17\nu/2 + 2)n^2 - 16\nu^4 + 20\nu^3 + 15\nu^2/2 - 95\nu/8 - 1/4 \\ \gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = -2\nu + 1, \quad \gamma_2 = (2\nu - 1)n^2 + 4\nu^2 - 4\nu - 1/2 \\ \gamma_3 = (-4\nu^2 + 10\nu - 5/2)n^2 - 8\nu^3 + 12\nu^2 - 3\nu/4 - 31/8$$

したがって、式(33), (34)から接触端で $(\widehat{\theta\theta})_{\rho=1}$, $(\widehat{\xi\xi})_{\rho=1}$ がおのおの特異性を示すことがわかる。そこで接触端での特異性を評価するために次で定義する係数 K_r, K_θ, K_z を導入する。

$$(K_r, K_\theta, K_z) \\ = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0 - 0} \sqrt{2(1 - \xi/\xi_0)} (\widehat{\rho\rho}, \widehat{\theta\theta}, \widehat{\xi\xi})_{\rho=1} \quad (35)$$

この係数を求めるために、式(32)~(34)を用いて変形整理し、計算すると

$$(K_r, K_\theta, K_z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_{in} (1, \beta_0, \gamma_0) \cos n\theta \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_{in} (1, 2\nu, 1) \cos n\theta \quad (36)$$

となる。したがって次の関係を得る。

$$K_r = K_z = K_\theta / 2\nu \quad (37)$$

3. 数値計算結果および考察

数値計算は図2のように、接触面でステップ状の熱発生がある場合について実行した。このとき

$$f(\theta, \xi) = f_1(\xi) \cdot f_2(\theta) \\ f_1(\xi) = H(\xi_0 - |\xi|) \\ f_2(\theta) = H(\theta_0 - \theta) + H(\theta + \theta_0 - 2\pi) \\ + H(\theta_0 - |\theta - \pi|)$$

$$f_{na} = 4\{1 + (-1)^n\} \sin \alpha \xi_0 \sin n\theta_0 / \{(1 + \delta_{n0}) n\pi \alpha\}$$

また数値計算では、 $\nu=0.3$, $\xi_0=1.0$, $\theta_0=\pi/4$ とし、式(31)の C_{ji} での無限積分は収束が遅いため有限積分と漸近積分に分離して計算を行った⁽¹⁾。

図3に $Bi=1.0$, $\tau=1.0$ での温度分布を示す。

図4~6に $Bi=1.0$ での境界上の半径応力、円周応

力と軸応力のフーリエ数 τ による変化を示す。いずれの垂直応力とも接触面の接触端で特異応力を示す。 $\theta = 0^\circ$ ではフーリエ数 τ が大きいとき、 $\zeta \rightarrow \zeta_0 \rightarrow 0$ で $(\rho\rho)_{\rho=1}$, $(\theta\theta)_{\theta=1}$, $(\zeta\zeta)_{\zeta=1}$ は圧縮の無限大となるが、 τ

図2 表面での熱発生の分布

図3 温度分布

図4 境界上の半径応力 ($\theta=0^\circ, 90^\circ$ でのフーリエ数 τ による変化) 図6 境界上の軸応力 ($\theta=0^\circ, 90^\circ$ でのフーリエ数 τ による変化) 図5 境界上の円周応力 ($\theta=0^\circ, 90^\circ$ でのフーリエ数 τ による変化) 図7 境界上の半径応力 ($\theta=0^\circ, 90^\circ$ でのビオ数 Bi による変化)

が小さいとき引張りの無限大となる。しかし、 $\theta=90^\circ$ ではすべて圧縮の無限大となり、角度 θ の影響が現れている。接触面での各垂直応力は、 τ が小さくかつ接触端近傍を除いて、圧縮応力場である。また、半径応力と円周応力は τ の増加とともにその絶対値は大きくなり、定常状態で最大値となる。軸応力は $\theta=0^\circ$ のとき、 τ の増加とともに圧縮応力は増加し $\tau=0.1$ 近傍で最大圧縮応力を示す。 $\theta=90^\circ$ では、全体的に引張応力が支配的となっており、 τ の増加に伴い引張応力は増加する。非接触面での円周応力と軸応力は、 τ が大きいほど引張応力が支配的である。また円周応力は接触端近傍で、 τ が大きいほど有限の圧縮応力を示すが、軸応力は τ が大きいとき有限の引張応力である。

図7～9に $\tau=1.0$ での境界上の半径応力、円周応力と軸応力のビオ数 Bi による変化を示す。いずれの垂直応力とも接触面の接触端で圧縮の特異応力を示す。接触面での各垂直応力は、 $\theta=90^\circ$ の場合の軸応力を除いて圧縮応力が支配的であり、ビオ数が小さいほどその絶対値は大きい。これはビオ数が小さいほど断熱状態に近くなり、温度上昇が大きくなることに起因すると思われる。非接触部の円周応力と軸応力は、ビ

図8 境界上の円周応力 ($\theta=0^\circ, 90^\circ$ でのビオ数 Bi による変化) 図9 境界上の軸応力 ($\theta=0^\circ, 90^\circ$ でのビオ数 Bi による変化) 図10 K_r のフーリエ数 τ による変化 ($\theta=0^\circ, 90^\circ$ の場合)

オ数が小さいほど応力の絶対値が大きくなる。また、軸応力は θ が 0° よりも 90° のほうが応力の絶対値は大きい。

図10に、 $\rho=1.0, \zeta \rightarrow \zeta_0 - 0$ における応力の特異性の大きさを評価する係数 K_r の時間変化を示す。 $\theta=0^\circ$ の場合、フーリエ数 τ が小さいとき正の値を示し、 τ の経過とともに負の値になり、定常状態で負の最大値となる。 $\theta=90^\circ$ の場合は、すべての τ に対して負で、定常状態で負の最大値となる。また、ビオ数が小さいほど K_r の絶対値は大きくなる。

4. 結 言

非軸対称加熱された剛体短円環が無限円柱にはめ込まれた場合の非定常熱応力を理論解析し、与えられた条件のもとで数値計算を実行し、次の結論を得た。

(1) 接触端で特異応力となり、その特異性の評価のために

$$(K_r, K_\theta, K_z) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0 - 0} \sqrt{2(1 - \zeta/\zeta_0)} (\widehat{\rho\rho}, \widehat{\theta\theta}, \widehat{\zeta\zeta})_{\rho=1}$$

なる係数を導入し、 $K_r = K_z = K_\theta/2\nu$ なる関係を得た。なお、この関係は軸対称問題と同一である。

(2) K_r の値はフーリエ数の小さいとき、 $\theta=0^\circ$ の場合正であるが、 $\theta=90^\circ$ の場合負となり角度の影響がある。フーリエ数が大きいとき、軸対称問題と同様に θ にかかわらず K_r は負となり、定常状態で負の最大値をとる。また、ビオ数が小さいほど K_r の絶対値は大きい。

(3) 接触面での応力は一般に圧縮応力が支配的であるが、 $(\widehat{\zeta\zeta})_{\rho=1}$ は $\theta=90^\circ$ の場合引張応力が支配的となり、非軸対称加熱の影響が表れている。

文 献

- (1) 野田・阿部, 機論, 49-444, A(昭58), 952.
- (2) 野田・小林, 機論, 52-481, A(昭61), 2194.
- (3) 野田, 機論, 51-471, A(昭60), 2465.

討 論

〔質問〕 長谷川 久夫〔明治大学工学部〕

(1) 無限円柱の非軸対称熱弾性問題のご研究、興味深く拝読させていただいた。本問題は、応力関数として、 $\phi + M + \psi$ ではなく、 $\phi + M$ あるいは $\phi + \psi$ でも取扱うことができると思われるがいかがか。

(2) この種の問題では、境界条件として、接触面が滑らかに接触している場合と固着している場合とでは、数値計算の際の解の収束性はどちらがよいか。また、本計算では、フーリエ級数の項数は最大でどの程度とられたのか。

(3) $\bar{f}(\theta, z)$ が $\bar{f}(\theta, z, t)$ の場合には何か解法上の困難が生じるか。

(4) 接触物体の連成問題すなわち円環が剛体ではなく弾性体の場合も同様に解析可能か。

〔回答〕 (1) 非軸対称問題であるので、 $\phi + M$ あるいは $\phi + \psi$ では取扱うことはできない(付1)。

(2) 固着の場合は取扱っていないので、解の収束

付表1 K の n による収束性 ($Bi=1.0, r=1.0$)

θ n	6	14	22	30
0°	-0.080 8	-0.081 0	-0.081 1	-0.981 1
90°	-0.071 6	-0.071 4	-0.071 3	-0.071 3

性の比較はできない。しかし、軸対称の場合、式(27)のノイマン級数に対する収束性は固着の場合⁽²⁾ $i=0 \sim 99$ 、滑らかな接触の場合⁽¹⁾ $i=1 \sim 9$ で収束しているので、滑らかに接触している場合が収束性は良い。

また本計算のフーリエ級数の収束性は付表1のとおりであり、 $n=0 \sim 30$ を採用した。

(3) 同様に処理できると考えられる。

(4) 現在検討中であり、解析の可能性をあると思われる。

(付1) 宮本, 3次元弾性論, (昭42), 21, 裳華房。