動的破壊力学における経路独立 J' 積分の
近傍場経路形状独立性について*西 岡 俊 久^{*1}On the Shape Independence for a Near-Field Path of the Path-Independent
 J' Integral in Dynamic Fracture Mechanics

Toshihisa NISHIOKA

Recently the authors have derived the path-independent J' integral, which gives the energy release rate for a dynamically propagating crack. The authors have also shown the existence of many path independent integrals which do not give the energy release rate. Using the asymptotic solutions for elastodynamic crack propagation, the relations between the various path-independent integrals and the instantaneous stress intensity factors can be determined. However, those relations may depend on the shape of the near-field path which shrinks to the crack-tip. In this paper, the shape independence of the J' integral was numerically verified. An analytical proof for the shape independence of the crack-axis component J'_I was also given. The present paper also shows the finite limits of apparent non-integrable singularities in the J' integral.

Key Words: Fracture, Dynamic Fracture Mechanics, Path Independent Integral, J' Integral, Energy Release Rate, Dynamic Crack Propagation, Near-field Path, Shape Independence

1. 緒 言

静的線形および非線形弾性き裂に対して Rice⁽¹⁾などにより提案されたいわゆる J 積分は静的破壊力学の進展に大きく貢献した。その特徴として解析的な、あるいは計算力学的な観点から次のものが考えられる。(i) (ポテンシャル) エネルギー解放率と等価である。(ii) き裂先端を囲む任意の積分経路に対して、同一の積分値をもつ、いわゆる経路独立性を有する。(iii) 経路をき裂先端に収縮させることにより応力拡大係数との関係を求めることができる。

一方、動的破壊力学に関して上記の三つの特徴をもつ経路独立積分は Rice や Freund など⁽²⁾により存在しないと考えられていた。近年、著者らは経路独立積分に関する一連の研究を行い、動的伝ば中のき裂を含めてエネルギー解放率と等価な経路独立 J' 積分を導き⁽³⁾、応力拡大係数との関係を求めた。さらに、エネルギー解放率と等価ではないが、経路独立な積分が無数あることを示した⁽⁴⁾。なお、その後 J' 積分を拡大し、さらに非線形(弾塑性)動的破壊力学に対して有用な

経路独立 T^* 積分を導いた⁽⁵⁾。

高速き裂に対しても、き裂先端近傍の一般解⁽³⁾を用いて、積分経路をき裂先端に収縮させることにより、 J' 積分やエネルギー解放率と等価でない各種積分と応力拡大係数の関係を求めることができる。しかし、経路をき裂先端に収縮させる仕方によって異なる関係が得られるようであれば、解析上極めて不都合である。

したがって、き裂先端に収縮する近傍場経路形状に無関係に唯一の積分値が得られることが重要である。この観点より、本研究では J' 積分やその他各種積分の近傍場経路形状独立性あるいは依存性について検討した。また、 J' 積分や各種積分は被積分関数がき裂先端で一見すると可積分でない特異性のオーダを持つが、本研究でそれらの有限性について明らかにした。

2. 高速き裂先端場の一般解

図 1 に示すように弾性体中を瞬間き裂速度 $C(t)$ で伝ば中のき裂を考える。この場合のき裂先端近傍の一般解は、Nishioka-Atluri⁽³⁾によって全モードに対して統一的に求められた。この一般解には、き裂先端からの距離 r に関する次数より次に分類されるものが含まれる。それらは(i)無応力・剛体変位場、(ii)特

* 昭和 62 年 11 月 21 日 第 949 回講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 1 月 14 日。

^{*1} 正員、神戸商船大学 (〒658 神戸市東灘区深江南町 5-1-1)。

異応力とそれに対応する変位場, (iii)一定応力・線形変位場, および(iv)高次の応力・変位場である. このうち r が極めて小さいき裂先端近傍では特異応力のみが支配的となる.

この特異応力場とそれに対応する変位場は動的伝ばき裂の各モードの応力拡大係数 K_M ($M = \text{I, II, III}$) に比例し次式で表される⁽³⁾.

$$\sigma_{11}^0 = \frac{K_{\text{I}} B_{\text{I}}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ (1+2\beta_1^2 - \beta_2^2) r_1^{-1/2} \cos \frac{\theta_1}{2} - \frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_2^2)} r_2^{-1/2} \cos \frac{\theta_2}{2} \right\} \\ + \frac{K_{\text{II}} B_{\text{II}}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -(1+2\beta_1^2 - \beta_2^2) r_1^{-1/2} \sin \frac{\theta_1}{2} + (1+\beta_2^2) r_2^{-1/2} \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \dots\dots\dots (1\cdot a)$$

$$\sigma_{22}^0 = \frac{K_{\text{I}} B_{\text{I}}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -(1+\beta_2^2) r_1^{-1/2} \cos \frac{\theta_1}{2} + \frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_2^2)} r_2^{-1/2} \cos \frac{\theta_2}{2} \right\} \\ + \frac{K_{\text{II}} B_{\text{II}}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ (1+\beta_2^2) r_1^{-1/2} \sin \frac{\theta_1}{2} - (1+\beta_2^2) r_2^{-1/2} \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \dots\dots\dots (1\cdot b)$$

$$\sigma_{12}^0 = \frac{K_{\text{I}} B_{\text{I}}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 2\beta_1 r_1^{-1/2} \sin \frac{\theta_1}{2} - 2\beta_1 r_2^{-1/2} \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} + \frac{K_{\text{II}} B_{\text{II}}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 2\beta_1 r_1^{-1/2} \cos \frac{\theta_1}{2} - \frac{(1+\beta_2^2)^2}{2\beta_2} r_2^{-1/2} \cos \frac{\theta_2}{2} \right\} \\ \dots\dots\dots (1\cdot c)$$

$$\sigma_{13}^0 = \frac{K_{\text{III}} B_{\text{III}}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -r_2^{-1/2} \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \dots\dots\dots (1\cdot d)$$

$$\sigma_{23}^0 = \frac{K_{\text{III}} B_{\text{III}}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \beta_2 r_2^{-1/2} \cos \frac{\theta_2}{2} \right\} \dots\dots\dots (1\cdot e)$$

$$\sigma_{33}^0 = \begin{cases} 0: \text{plane stress} \\ \frac{K_{\text{I}} B_{\text{I}}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 2\nu(\beta_1^2 - \beta_2^2) r_1^{-1/2} \cos \frac{\theta_1}{2} \right\} + \frac{K_{\text{II}} B_{\text{II}}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -2\nu(\beta_1^2 - \beta_2^2) r_1^{-1/2} \sin \frac{\theta_1}{2} \right\}: \text{plane strain} \end{cases} \dots\dots\dots (1\cdot f)$$

$$u_1^0 = \frac{K_{\text{I}} B_{\text{I}}(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ r_1^{1/2} \cos \frac{\theta_1}{2} - \frac{2\beta_1\beta_2}{(1+\beta_2^2)} r_2^{1/2} \cos \frac{\theta_2}{2} \right\} + \frac{K_{\text{II}} B_{\text{II}}(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ r_1^{1/2} \sin \frac{\theta_1}{2} - \frac{(1+\beta_2^2)^2}{2} r_2^{1/2} \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \\ \dots\dots\dots (2\cdot a)$$

$$u_2^0 = \frac{K_{\text{I}} B_{\text{I}}(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ -\beta_1 r_1^{1/2} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{2\beta_1}{(1+\beta_2^2)} r_2^{1/2} \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \\ + \frac{K_{\text{II}} B_{\text{II}}(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \beta_1 r_1^{1/2} \cos \frac{\theta_1}{2} - \frac{(1+\beta_2^2)}{2\beta_2} r_2^{1/2} \cos \frac{\theta_2}{2} \right\} \dots\dots\dots (2\cdot b)$$

$$u_3^0 = \frac{K_{\text{III}} B_{\text{III}}(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} r_2^{1/2} \sin \frac{\theta_2}{2} \dots\dots\dots (2\cdot c)$$

上式の一部は, 例えば Rice⁽¹⁵⁾ によるモード I 形特異応力場と一致する. その他の成分については文献(3)で詳述しているので参照されたい.

ここで $r_j e^{i\theta_j} = x_1^j + i\beta_j x_2^j$ ($j=1,2$) で i は虚数を表す. また β_j ($j=1,2$) はき裂速度に関するパラメータで, $\beta_1^2 = 1 - C^2/C_d^2$, $\beta_2^2 = 1 - C^2/C_s^2$ で表される. C_d および C_s はそれぞれ弾性波の縦波および横波速度であ

り, μ は横弾性係数である. き裂速度関数はそれぞれ,

図 1 高速き裂先端近傍の変形モードと座標系

図 2 積分経路の定義

$B_I(C) = (1 + \beta_2^2)/D(C)$, $B_{II}(C) = 2\beta_2/D(C)$, $B_{III}(C) = 1/\beta_2$ であり, $D(C) = 4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2$ である. 上添字 $()^0$ はき裂先端の局所座標系 x_k^0 に関するテンソル成分を表す. なおき裂速度が零になったとき, 式(1)および式(2)は停留き裂に対する応力, 変位場に一致する. また通常のテンソルの座標変換則を用いて, 式(1)および式(2)で与えられた局所座標系の応力, 変位成分を全体座標系の成分に変換することができる⁽⁶⁾.

3. 動的破壊力学における 経路独立積分

図2に示すようなき裂が伝ば中の物体を考える. 図1と同様 x_k^0 はき裂先端を常に原点とする局所座標系, X_k は全体座標系とする. き裂の方向は x_1^0 と一致し, X_1 と θ_0 の角度をなすものとする. き裂の速度を C とすると, き裂速度の X_k 方向成分 C_k は, ($C_1 = C \cos \theta_0$, $C_2 = C \sin \theta_0$) で表すことができる. このときのエネルギー解放率は次式で与えられる.

$$G = (C_k/C)G_k = G_1 \cos \theta_0 + G_2 \sin \theta_0 \quad \cdots \cdots (3)$$

ここに G_k はエネルギー解放率の X_k 成分である. 図2に示すようなき裂先端の微小な経路 Γ_c を用いて G_k は次のように表される⁽⁷⁾.

$$G_k \equiv \lim_{\Gamma_c \rightarrow 0} \int_{\Gamma_c} [(W + K)n_k - t_i u_{i,k}] dS \quad \cdots \cdots (4)$$

ここに W , K はそれぞれひずみエネルギー密度, 運動エネルギー密度であり, n_k は外向きの方向余弦, t_i は表面力で, $()_{,k}$ は $\partial()/\partial X_k$ を表す. なお上添字 $()^0$ が付かないものは全体座標系によるテンソル成分を意味する. エネルギー解放率と等価な経路独立積分は著者ら⁽⁸⁾によって導かれ, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} J_k &\equiv \lim_{\Gamma_c \rightarrow 0} \int_{\Gamma_c} [(W + K)n_k - t_i u_{i,k}] dS \\ &= \lim_{\Gamma_c \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma + \Gamma_c} [(W + K)n_k - t_i u_{i,k}] dS \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_r - \Gamma_c} [\rho \ddot{u}_i u_{i,k} - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,k}] dV \right\} \quad \cdots \cdots (5) \end{aligned}$$

ここで Γ はき裂下面で始まり, 上面で終わる任意の経路である. 議論を明確にするため, 以後 Γ_c を近傍場 (near-field) 経路, Γ を遠方場 (far-field) 経路と呼ぶ.

J_k 積分の遠方場経路積分の経路独立性は Gauss の発散定理と弾性体の基礎方程式より容易に証明することができる. 上記の J_k 積分では物体力や物体の非一様な温度分布はないものと仮定しているが, これらを考慮した経路独立 J_k 積分については文献(8)などを参照されたい.

文献(4)において著者らはこのほかに動的伝ばき裂

に対してエネルギー解放率と等価でない経路独立積分が無数にあることを示した. これらをまとめて示すと次のようになる.

$$\begin{aligned} I_k^{(m)} &\equiv \lim_{\Gamma_c \rightarrow 0} \int_{\Gamma_c} [(W + mK)n_k - t_i u_{i,k}] dS \\ &= \lim_{\Gamma_c \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma + \Gamma_c} [(W + mK)n_k - t_i u_{i,k}] dS \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_r - \Gamma_c} [\rho \ddot{u}_i u_{i,k} - m \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,k}] dV \right\} \quad \cdots \cdots (6) \end{aligned}$$

上式の遠方場経路積分の経路独立性は任意の m に対して証明できる. 特別な場合として, $m=1$ のとき $I_k^{(1)}$ は J_k と等しくなり (ポテンシャル) エネルギー解放率の物理的意味をもつ. また $m=0$ のとき $I_k^{(0)}$ の近傍場表示は静的 J 積分の表示と一致し, $m=-1$ のとき $I_k^{(-1)}$ は Atluri⁽⁹⁾ によって導かれた経路独立積分となる. なお $I_k^{(-1)}$ はラグランジアン解放率の物理的意味を有する. ここで強調すべき点は動的伝ばき裂 ($C \neq 0$) 先端では運動エネルギー密度 K に $O(1/r)$ の特異性が存在し, 停留き裂 ($C=0$) 先端では運動エネルギー密度の特異性が消滅することである⁽³⁾. したがって動的伝ばき裂に対してエネルギー解放率の物理的意味を有するものは $m=1$ のとき, すなわち J_k 積分のみである. なお停留き裂にたいしては, 式(6)で表されるすべての積分が停留き裂のエネルギー解放率と等価になる.

静的弾性き裂の場合, J_k 積分は Budiansky-Rice⁽¹⁰⁾ による J_k 積分と一致する. ただし文献(10)に示されている J_k 積分でき裂面上経路 Γ_c が考慮されていないのは誤りである. J_k 積分をき裂先端から発するベクトル積分 J' の成分と考えると, J_k 積分の成分は通常の座標変換ができる. 局所座標系 x_k^0 と全体座標系 X_k との関係は次式のように表される⁽⁶⁾.

$$J_k^0 = \alpha_{kj} J'_j \quad \cdots \cdots (7)$$

平面問題の場合, $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \cos \theta_0$, $\alpha_{12} = -\alpha_{21} = \sin \theta_0$ である.

4. J_k 積分の有限性

はじめに近傍場経路積分について考える. 式(5)の近傍場経路積分の被積分関数は式(1), (2)から容易にわかるように $O(1/r)$ の特異性をもつ. 例として円形経路を考えれば $dS = r d\theta$ であるので, r についての特異性は消滅し, 有限の積分値が得られ $\Gamma_c \rightarrow 0$ としたとき, 一定値に収束する.

次に遠方場経路について考える. 通常弾性き裂問題の解析では遠方場経路より J_k 積分を評価する. このとき, $\Gamma_c \rightarrow 0$ の極限を取り, $\Gamma_c = 0$ ($V_c = 0$) として計算する方が便利である. この場合 J_k 積分は次式で表され

る⁽⁴⁾⁽¹¹⁾。

$$J_k = \int_{\Gamma_c + \Gamma_e} [(W+K)n_k - t_i u_{i,k}] dS \\ + \int_{V_r} [\rho \ddot{u}_i u_{i,k} - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,k}] dV \quad \dots\dots\dots (8)$$

J_I の表示式については、同様のものが文献(9)において見られる。ただし文献(9)ではき裂先端とともに移動する移動経路について導かれている。上式では、 $\Gamma_e = 0$ のとき、近傍場経路積分は一定値に収束しているの、すなわち左辺は有限値であるので、理論的には等号で結ばれた遠方場経路積分も有限である。 J_k 積分の有限性の証明はこれで十分である。

しかし、式(8)の右辺の被積分関数のオーダーを調べると興味深い事実がある。簡単のため全体座標系と局所座標系が一致する $\theta_0 = 0$ の場合について考える。この場合き裂近傍で、 $\dot{u}_i \simeq -C_{u,i} = O(r^{-1/2})$ となり $\ddot{u}_i = O(r^{-3/2})$ となる。したがって、式(8)のゼロ以外の特異性のオーダーは次のようになる。

$$(W+K)n_2 = O(r^{-1}) \quad \dots\dots\dots (9\cdot a)$$

$$\rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,k} = O(r^{-2}) \quad \dots\dots\dots (9\cdot b)$$

$$\rho \ddot{u}_i u_{i,k} = O(r^{-2}) \quad \dots\dots\dots (9\cdot c)$$

式(8)の Γ_e および V_r はき裂端を含むので、一見すると式(9)で表される項は可積分(integrable)でないように考えられる。式(9・b)および(9・c)の体積積分の可積分性については文献(3)において示したので省略し、ここでは式(9・a)について考える。

一般に混合モードのとき、 Γ_e^+ および Γ_e^- 上で $(W+K)^+$ と $(W+K)^-$ は異なった分布を示す⁽⁶⁾。したがって一般には $(W+K)^+ - (W+K)^- \neq 0$ である。しかし、式(9・a)のき裂面上の積分が可積分であるためには、 $r \rightarrow 0$ に近づくとき $(W+K)^+ \rightarrow (W+K)^-$ になればよい。き裂の上下面で $\sigma_{12}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma_{23}^0 = 0$ を考慮して

$$(W+K) = \frac{1}{16\mu} [(x+1)(\sigma_{11}^0)^2 + 8(\sigma_{13}^0)^2] \\ + \frac{1}{2} \rho C^2 \left[\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right)^2 \right] \quad \dots\dots\dots (10)$$

がき裂先端近傍のき裂面上で成立する。ここで平面応力のときに $x = (3-\nu)/(1+\nu)$ で平面ひずみのときに $x = 3-4\nu$ である。式(10)の中の応力および変位こう配を式(1)、(2)を用いて評価すると次のようにな

(a) Circular Path

(b) Rectangular Path

図3 近傍場経路形状の代表例

る。

$$(\sigma_{11}^0)^{\pm} = \mp \frac{K_{II} B_{II}(C)}{\sqrt{2\pi r}} 2(\beta_1^2 - \beta_2^2) \quad \dots\dots\dots (11\cdot a)$$

$$(\sigma_{13}^0)^{\pm} = \mp \frac{K_{III} B_{III}(C)}{\sqrt{2\pi r}} \quad \dots\dots\dots (11\cdot b)$$

$$\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right)^{\pm} = \mp \frac{K_{II} B_{II}(C)}{\mu \sqrt{2\pi r}} \frac{(1-\beta_2^2)}{2} \quad \dots\dots\dots (11\cdot c)$$

$$\left(\frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right)^{\pm} = \pm \frac{K_I B_I(C)}{\mu \sqrt{2\pi r}} \frac{\beta_1(\beta_2^2 - 1)}{(1+\beta_2^2)} \quad \dots\dots\dots (11\cdot d)$$

式(11)と式(10)よりわかるように $(W+K)^+ = (W+K)^-$ がき裂先端近傍で成立する。したがって、 Γ_e 上の非可積分な特異性は消滅することになる。

以上より J_k 積分は有限の値をもつことがわかる。同様に式(6)で表された経路独立積分 $I_k^{(m)}$ も m が有限である限り有限であると言える。

5. 近傍場経路積分の経路形状依存性

ここでは J_k 積分および $I_k^{(m)}$ 積分の近傍場経路形状依存性について検討する。動的弾性き裂問題の数値解析では通常 $\Gamma_e = 0$ として式(8)で示した遠方場経路による積分を評価するほうが便利である。このとき、もし J_k 積分や $I_k^{(m)}$ 積分が $\Gamma_e \rightarrow 0$ の極限のとり方によって解が異なることは不都合であり、誤りを犯しやすい。したがって、近傍場経路が Γ_e 形状独立であることが重要である。

本研究では近傍場経路形状の代表例として図3に示すように円形経路と長方形経路を考えた。円形経路についてはすでに文献(3)において著者らにより、各種積分と応力拡大係数の関係が次のように与えられている。局所座標系と全体座標系が一致する $\theta_0 = 0$ の場合

$$I_1^{(1)} = J_1 = \frac{1}{2\mu} \{ A_I(C) K_I^2 + A_{II}(C) K_{II}^2 + A_{III}(C) K_{III}^2 \} \quad \dots\dots\dots (12\cdot a)$$

$$I_2^{(1)} = J_2 = -\frac{A_{IV}(C)}{\mu} K_I K_{II} \quad \dots\dots\dots (12\cdot b)$$

$$I_1^{(0)} = \frac{1}{2\mu} \{ \hat{F}_I(C) K_I^2 + \hat{F}_{II}(C) K_{II}^2 + \hat{F}_{III}(C) K_{III}^2 \} \quad \dots\dots\dots (13\cdot a)$$

$$I_2^{(0)} = -\frac{\hat{F}_{IV}(C)}{\mu} K_I K_{II} \quad \dots\dots\dots (13\cdot b)$$

$$I_1^{(-1)} = \frac{1}{2\mu} \{ F_I(C) K_I^2 + F_{II}(C) K_{II}^2 + F_{III}(C) K_{III}^2 \} \quad \dots\dots\dots (14\cdot a)$$

$$I_2^{(-1)} = -\frac{F_{IV}(C)}{\mu} K_I K_{II} \quad \dots\dots\dots (14\cdot b)$$

となる。ここで A_M , $\hat{F}_M$, F_M ($M = I \sim IV$) はき裂速度の関数である。例として $M = I$ の場合は次式で表される。

図 4 $I_I^{(m)}$ 積分値とアスペクト比の関係 (モード I)

図 6 $I_I^{(m)}$ 積分値とアスペクト比の関係 (モード III)

図 5 $I_I^{(m)}$ 積分値とアスペクト比の関係 (モード II)

図 7 J'_I の各項のアスペクト比依存性 (モード I)

図 8 二つの近傍場経路形状

$$A_1(C) = \beta_1(1 - \beta_2^2)/D(C) \dots \dots \dots (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_1(C) = & \frac{\beta_1(1 - \beta_2^2)}{\{D(C)\}^2} \left\{ 2\beta_1(1 + \beta_2) - \frac{(1 + \beta_1)}{2\beta_1} \right. \\ & \times (1 + \beta_2^2)^2 - 2(\beta_1 - \beta_2) \frac{(1 + \beta_2^2)}{\sqrt{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)}} \left. \right\} \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1(C) = & \frac{\beta_1(1 - \beta_2^2)}{\{D(C)\}^2} \left\{ 4\beta_1 - \frac{1}{\beta_1}(1 + \beta_2^2)^2 \right. \\ & \left. - 4(\beta_1 - \beta_2) \frac{(1 + \beta_2^2)}{\sqrt{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)}} \right\} \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

他のき裂速度関数の詳細は文献(3)を参照されたい。

長方形経路については、式(1)および(2)を式(6)で表される $I_k^{(m)}$ の近傍場経路積分に代入し、数値積分により求めた。この際、積分経路形状のアスペクト比 $k = \delta/\varepsilon$ を一定として、 $\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0$ のときの $I_k^{(m)}$ の値を求めた。長方形経路の微分要素は $dS = \varepsilon h(\theta) d\theta$ で表されるために、 $I_k^{(m)}$ の被積分関数は $O(\varepsilon^0)$ のオーダーになり、 θ のみの関数となる。したがって、実際には $\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0$ の計算は、式(1)および(2)の特異応力場および対応する変位場を用いれば1回のみで行うことができる。数値積分は各辺を50の区間に分割し、各区間で Gauss の積分法(11点)を用い、倍長精度で行った。アスペクト比 δ/ε は 2^n (n は正負の整数)として変化させた。なお分割数を100に Gauss 積分点を20にしても積分値が変化しないことを確認した。

図4~6にそれぞれ各モードの $I_k^{(m)}$ ($\theta_0 = 0$) 積分のアスペクト比による変化を示す。ここでは応力拡大係数は単位(1.0)を仮定し、またヤング率も単位(1.0)とし、ポアソン比は0.3とした。図中の○、□、△印は円形経路による結果で、正方形($\delta = \varepsilon$)の場合と比較した。 J_I 積分のみがアスペクト比によらず一定値をとり、近傍場経路形状独立であることがわかる。他の積分は形状独立ではないが、アスペクト比が零に近づくにつれて、 J_I の値に収束する様子がわかる。このことは Freund のエネルギー解放率評価法⁽¹²⁾と同様に $\int_{\Gamma_\varepsilon} (W + mK)n_1 dS$ が零になることから理解できる。図からわかるように各アスペクト比に対する積分値の評価に Freund の評価法を用いる場合、近傍場経路積分自体が経路(形状)独立であることが必要である。一方、

図 9 $I_2^{(m)}$ 積分値とアスペクト比の関係(混合モード)

アスペクト比が大きくなると、 $m=1$ 以外の積分は J_I より離れていき、 $\delta/\varepsilon \rightarrow \infty$ で一定値に収束する。

図7にモード I について、 J_I 積分の各項のアスペクト比依存性を示す。上述したようにアスペクト比が小さくなると J_I 積分の第1項(F)および第2項(S)は零に近づき、 J_I 積分への寄与は第3項(T)のみになる。結局、Freund の評価法では $\delta \rightarrow 0$ の操作を先に行い、第3項のみでエネルギー解放率を評価することになる。しかし一般の長方形に対して第3項のみでは、エネルギー解放率の意味を持たないことに注意が必要である。なお Freund の評価法を用いた研究に文献(13)、(14)などがあることを付記する。

次に J_I の近傍場経路(形状)独立性および $I_k^{(m)}$ ($m \neq 1$) の非独立性の証明を行う。いま $\theta_0 = 0$ の場合を考える。図8に示すように任意の二つの経路 Γ_{e1} 、 Γ_{e2} について $I_k^{(m)}$ の積分値の差 $R_k^{(m)}$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} R_k^{(m)} &= \int_{\Gamma_{e2} - \Gamma_{e1}} [(W + mK)n_k - t_i u_{i,k}] dS \\ &= \int_{V^*} [W_{,k} + mK_{,k} - (\sigma_{ij} u_{i,k})_{,j}] dV \\ &= \int_{V^*} [m \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,k} - \rho \dot{u}_i u_{i,k}] dV \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

ここで Gauss の発散定理、動的運動方程式 $\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i$ 、 $W_{,k} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k}$ 、 $K = 1/2 \rho \dot{u}_i \dot{u}_i$ などを用いた。また V^* の境界は $\partial V = \Gamma_{e2} + \Gamma_c - \Gamma_{e1}$ であるが、 Γ_c 上で $t_i = 0$ であることと、 $k=1$ のとき $n_1 = 0$ であり、 $k=2$

のとき前述したように $(W+K)^+ = (W+K)^-$ となることより Γ_c 上の積分は省略できる。 $\theta_0=0$ のとき $C_1=C, C_2=0$ となり、き裂先端近傍では次式が成立する。

$$\dot{u}_i \approx -Cu_{i,1} \dots\dots\dots (19\cdot a)$$

$$\ddot{u}_i \approx C^2 u_{i,11} \dots\dots\dots (19\cdot b)$$

式(19)を式(18)に代入すると次のようになる。

$$R_1^{(m)} = (m-1) \int_{V^*} \rho C^2 u_{i,11} u_{i,1} dV \dots\dots\dots (20)$$

$$R_2^{(m)} = \int_{V^*} \rho C^2 (mu_{i,1} u_{i,12} - u_{i,11} u_{i,2}) dV \dots\dots\dots (21)$$

したがって式(20)よりき裂方向成分 ($k=1$) については $m=1$ のとき $R_1^{(1)}$ が零になり、 J_1 積分の近傍場経路形状独立性が証明できる。また停留き裂 ($C=0$) についてはいずれも近傍場経路形状独立となる。なお Freund⁽¹²⁾ によつてき裂先端場へのエネルギー流入率に対して近傍場経路形状独立性の証明が行われていることを付記する。

一方、き裂垂直方向成分 ($k=2$) の場合、式(21)に $m=1$ を代入することのみでは近傍場経路形状独立性は証明できない。そこでき裂方向成分 ($k=1$) の場合と同様、長方形形状について数値積分を行い、アスペクト比との関係を求めた。図9に $K_I=1.0, K_{II}=0.5$ の場合の $I_2^{(m)}$ 積分 ($\theta_0=0$) とアスペクト比の関係を示す。図より、 $m=1$ のとき、すなわち J_2 積分のみが近傍場経路形状独立であることがわかる。アスペクト比が零に近づくと、各種積分値はそれぞれ異なる値に収束する。逆にアスペクト比が大きくなるにつれて各種積分値はすべて J_2 の値に収束する。これは $\int_{\Gamma_c} (W + mK) n_2 dS$ が $\varepsilon \rightarrow 0$ となったとき無視できるためである。

6. 結 言

本論文では、弾性高速き裂に対してエネルギー解放率と等価な経路独立 J' 積分の近傍場経路積分の経路形状独立性を明らかにした。他のエネルギー解放率と等価でない経路独立積分 $I_k^{(m)}$ ($m \neq 1$) については経路形状依存性を示した。また J' 積分や各種積分が非可積分の特異性のオーダーをもつにもかかわらず、可積分になることを示した。非線形 (弾塑性) 動的破壊力学に有用な経路独立 T^* 積分の近傍場独立性については次報において明らかにする。

最後に、本研究は昭和61年度文部省科学研究費および第25回東レ科学技術研究助成金の一部の援助を受けたことを付記する。

文 献

- (1) Rice, J. R., *J. Appl. Mech.*, **35** (1968), 376.
- (2) Freund, L. B., (Erdogan, F., 編), in *The Mechanics of Fracture*, AMD-19 (1976), 105.
- (3) Nishioka, T. and Atluri, S. N., *Eng. Fract. Mech.*, **18** (1983), 1.
- (4) Nishioka, T. and Atluri, S. N., 文献(3)の23ページ.
- (5) Atluri, S. N., Nishioka, T. and Nakagaki, M., *Eng. Fract. Mech.*, **20** (1984), 209.
- (6) Nishioka, T. and Atluri, S. N., 文献(5)の193ページ.
- (7) Atluri, S. N., *Eng. Fract. Mech.*, **16** (1983), 341.
- (8) Atluri, S. N., Nakagaki, M., Nishioka, T. and Kuang, Z. B., *Eng. Fract. Mech.*, **23** (1986), 167.
- (9) Kishimoto, K. Aoki, S. and Sakata, M., *Eng. Fract. Mech.*, **13** (1980), 841.
- (10) Budiansky, B. and Rice, J. R., *J. Appl. Mech.*, **40** (1973), 201.
- (11) Nishioka, T. and Atluri, S. N., *AIAA J.*, **22** (1984), 409.
- (12) Freund, L. B., *Journal of Elasticity*, **2** (1972), 341.
- (13) 矢富, 材料, **31-344** (昭57), 458.
- (14) 岸本・鈴木・青木・坂田, 機論, **52-474, A** (昭61), 440.
- (15) Rice, J. R., *Fracture II: Mathematical Fundamentals* (H. Liebowitz), (1968), 191, Academic Press, New York.

討 論

〔質問〕 矢 富 盟 祥 [京都大学工学部]

(1) “可積分” という語を誤用されてないか。可積分ならば積分値の有界性と Γ_c 形状独立性両方が要求される。文献(3)では Γ_c を円形に限った場合の式(9・b), (9・c)の積分値の有界性のみ示されている。もし両式が可積分なら $I_k^{(m)}$ が (m, k) によらず Γ_c 形状独立となる。

(2) J' 積分の形状独立性を明らかにしたと結言にあるが J_1 は文献(13)等ですでに証明してあり、 J_2

は長方形径路のみの数値例にすぎず、その一般的形状独立性を結論するには早計と思うがいかがか。

(3) 著者らの提案されている遠方場積分を実際に数値計算するには (二次元で) 線積分のみならず面積分および時間微分を実行せねばならない。本来の径路独立積分はそれらの面倒さを極力なくせしたところにも意義があったと思う。その面倒さをいといわぬなら例えば遠方場 J_1 は動的エネルギー解放率の定義式 [c. f. 文献(13)]

$$\varepsilon = \int_{\Gamma} t_i \dot{u}_i ds - \frac{d}{dt} \int_V (W + K) dV$$

を直接数値計算するのに比べどのような工学的利点があるのか。ちなみに上式は $\dot{W} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$ とすれば物質に無関係に経路独立な積分である。

〔回答〕 (1) ここでは、可積分 (integrable) という語を、単純に、積分ができるという意味で、すなわち、積分値が無限大にならず有限値になるという意味で用いている。ご指摘のとおり、厳密な数学的意味では有界性のみならず Γ_e 形状独立性が要求される。ご指摘に感謝する。

(2) 本論文では J' 積分表示式(5)について論述するのを目的としている。 J' 積分あるいは通常用いられているエネルギー解放率の次元は、(エネルギー/面積)である。本論文でも述べたように、(エネルギー/時間)表示のエネルギー解放率については、Freund⁽¹²⁾により証明が示されている。文献(13)も同じ次元のエネルギー解放率について証明されており、文献(13)も同じところで引用すべきだったと考えている。

また、 J_2 については、ご指摘のとおりであるが、現在、移動特異要素法では極座標を用いており、 $I_2^{(m)}$ の数値積分は円形 Γ_e のものに対応し、節点除荷法で用いる通常要素は長方形であり、 $I_2^{(m)}$ の数値積分は長方

形 Γ_e のものと関連があるものと考えている。このように実用的観点からは、本論文で得られた知見でも重要であると考えられる。

(3) き裂伝ば問題の有限要素解析の初期の研究では、ご指摘の ε のような計算が行われていた。しかしこの最大の欠点は、伝ば開始前や伝ば停止後の停留き裂では零となり用いることができない点である。また ε は各時間ステップの量としては求まらず、現ステップと前ステップの平均値的なものになる。これに対し、 J' 積分は、停留き裂および伝ばき裂に一貫して用いることができ、また各時間ステップの値が求まる。このことは、伝ば経路やき裂速度などの予測問題などに極めて重要と考えられる。

また面積分は有限要素法では剛性マトリックスの計算と同様に非常に簡単にできる。時間微分は $\dot{u}_i$, $\ddot{u}_i$ に必要であるが、これも動的有限要素法では各節点で解として得られているので、要素の形状関数を用いて必要な点で簡単に求まる。いずれにしろ、静的 J 積分の特徴を極力を極力保ちつつ、動的な場合に拡張したのが動的 J 積分 (J') であると考えている。なお、物質に無関係に経路独立な積分として、本研究者らは、 J' 積分を拡張した T^* 積分⁽⁶⁾を示している。