連続体損傷力学における損傷変数と有効応力*

村上 澄 男^{*1}Damage Variables and Related Effective Stresses
in Continuum Damage Mechanics

Sumio MURAKAMI

A systematic theory to describe the anisotropic damage states of materials and a consistent definition of effective stress tensors are developed. By introducing a fictitious undamaged configuration mechanically equivalent to the real damaged configuration, the classical creep damage theory is extended to the general three-dimensional states of material damage. It is shown that the damage state can be described in terms of a symmetric second rank tensor. The physical implications, mathematical restrictions and the limitations of this damage tensor, as well as the effects of finite deformation on the damage state are discussed in some detail. The notion of the fictitious undamaged configuration is then applied to the definition of effective stresses. Finally, the extension of the effective stresses incorporating the effects of crack closure is discussed. The resulting effective stress tensor is employed to analyze the stress-path dependence of the elastic behavior of a cracked material.

Key Words: Strength of Materials, Damage, Fracture, Creep Damage, Fatigue Damage, Elastic-Plastic Damage, Crack Closure, Damage Mechanics, Effective Stress, Modelling

1. は じ め に

微視的空げきの発達に伴う材料の破損過程を観察し、それを力学的に表現することは、これらの空げきの発生から最終破壊に至る過程を解析するだけではなく、材料の巨視的挙動に及ぼす材料損傷の力学的効果を議論する上で重要である。最近、このような分布空げきの問題に対する一つの系統的接近法として、連続体損傷力学が発達した^{(1)~(6)}。この方法の基本的概念は、分布空げきで特徴づけられる材料の損傷状態を適当な力学的変数(内部状態変数)で表現するとともに、これを用いて損傷の発展式と損傷材料の構成式を定式化することにより、初めに一次元のクリープ損傷問題に対してKachanov⁽⁷⁾とRabotnov⁽⁸⁾によって展開された。

材料の損傷過程で観察される空げきの生成と生長は、作用する応力あるいはひずみの方向に著しく依存し、したがって本質的に異方的である。このため古典的なKachanov-Rabotnovの概念を三次元的損傷状態に拡張する際の第1の問題は、方向性のある材料損傷状態を適切に表現しうるような損傷変数を見い出す

ことにあり、これまでも多くの研究が報告されている^{(3)~(5)(9)(10)}。このような材料損傷をモデル化するための損傷変数は、明確な物理的意味だけではなく、適切な数学的ならびに力学的特性を持つものでなければならない。この点に関しては、従来の材料損傷のモデル化にはさらに洗練の余地がある。

この論文では、損傷した材料要素の現在配置から対応する仮想的非損傷配置への仮想的変形こう配によって損傷状態を特徴づけ、上述のKachanov-Rabotnovの理論を一般の三次元的異方損傷に拡張するとともに、これによって材料損傷の系統的モデル化の方法を議論する。このとき材料損傷は主に、空げきの発達に伴う荷重負担有効面積の減少によって特徴づけうると仮定し、上述の仮想的変形こう配を用いて2種類の損傷テンソル D と $\bar{D}$ を定義する。つづいて、これらの損傷テンソルの間の関係とそれらの力学的制約について検討し、いずれも2階対称テンソルとなることを示す。さらに損傷テンソルの力学的解釈、対応する有効応力の系統的定義についても議論する。最後に、この理論をき裂開口の効果も表現しうるように拡張し、その応用例として分布微小き裂を含む弾性-脆性体の静水圧-せん断組合せ応力下の弾性挙動を解析する。

* 昭和62年11月21日 第949回講演会において講演、原稿受付 昭和62年4月8日。

^{*1} 正員、名古屋大学工学部 (〒464 名古屋市千種区不老町)。

2. 損傷状態の力学的表現

2.1 仮想的非損傷配置と仮想的変形こう配 図1のように、最初横断面積 A_0 の棒 [図1(a)] が、応力 σ の作用により損傷を受けるとともに変形し、横断面積が A になるものとする [図1(b)]。Kachanov⁽⁷⁾ によりはじめて提案され、後に Rabotnov⁽⁸⁾ によっていくぶん修正された古典的損傷理論によれば、図1(b)の損傷状態は次のような損傷変数(内部状態変数) D によって表現できる。

$$D=0 \quad (\text{初期非損傷状態}) \cdots \cdots (1 \cdot a)$$

$$D=1 \quad (\text{最終的破断状態}) \cdots \cdots (1 \cdot b)$$

式(1)の損傷変数 D は、損傷に伴う分布空けきの存在による有効断面積の減少率を表すものと解釈されることが多い⁽¹⁾⁽²⁾。すなわち、図1(b)の棒の荷重を負担する有効断面積は、分布空けきの存在により A よりも小さな値 A^* に減少し、 D は A^* と次の関係にあると仮定される。

$$1-D=A^*/A \cdots \cdots (2)$$

このような荷重負担有効面積の減少は、同時に、外力 t によってもたらされる応力 σ の効果を拡大する。その値は、式(2)から

$$\bar{\sigma}=t/A^*=\sigma/(1-D) \cdots \cdots (3)$$

で与えられ、有効応力と呼ばれている。

式(1)~(3)で与えられる Kachanov-Rabotnov の理論は、損傷力学のその後の発達に対する重要な基礎となり、これを多軸状態に一般化するためにこれまで多くの努力が払われてきた^{(3)~(6)}。しかし式(2)の概念をより一般的な損傷状態に拡張するためには、微視的空けきの三次元的分布によってもたらされる異方損傷状態を適切に記述することが必要となる。

いまこの議論のために、図1(c)のように外力 t を受け、断面積が A^* で、空けきを含まない仮想的な棒が存在し、力学的に図1(b)の棒と等価であると仮定する。このとき損傷変数 D 、すなわち図1(b)の損傷

図1 単軸引張りを受ける棒の損傷

状態は、力学的に等価な二つの状態における横断面積 A と A^* の間の関係がなんらかの方法で規定できれば、式(2)によってただちに定義できることになる。

2.2 三次元的損傷状態の力学的表現

2.2.1 現在損傷配置に関する損傷の表現 前節の議論を一般の損傷状態に拡張するために、まず図2(b)のように、損傷材料中の微小体積要素 B_i を考え、その中に任意の方向をもつ面積要素 PQR をとる。このとき微小要素の配置を現在損傷配置 B_i と呼び、 B_i の中では応力、ひずみおよび損傷状態は一様であるとする。線分 PQ , PR および面積要素 PQR を三次元 Euclid ベクトル空間 $\mathcal{E}$ 内のベクトル dx , dy および νdA で表す。また初期非損傷状態 [図2(a)] における微小体積要素の配置を B_0 、対応する量をそれぞれ P_0 , Q_0 , dx_0 , dy_0 および $\nu_0 dA_0$ とする。さらに配置 B_0 から B_i への変形こう配を F とする。

損傷に伴う三次元的空けき分布により、任意の面積要素 PQR の荷重負担有効面積は減少する。ここで前節と同様、配置 B_i と力学的に等価な仮想非損傷配置 B_f [図2(c)] が存在し、 PQR の有効面積は B_f における面積要素 $P^*Q^*R^*$ と等価であるとする。さらに線分 P^*Q^* , P^*R^* および面積要素 $P^*Q^*R^*$ をベクトル空間 $\mathcal{E}$ 中のベクトル dx^* , dy^* および $\nu^* dA^*$ で表す。損傷による有効面積の減少は、平面 PQR だけではなく、他の方位の面でも生じるから、ベクトル νdA と、 $\nu^* dA^*$ は一般に共線ではない。

式(2)の概念によれば、一般の損傷状態に対する損傷変数 D は、図2の配置 B_i および B_f における面積ベクトル νdA と $\nu^* dA^*$ の間の関係が規定できれば、ただちに定義できる。このような二つの配置における

(a) 初期非損傷配置 (b) 現在損傷配置 (c) 仮想非損傷配置

(d) 除荷損傷配置 (e) 除荷仮想非損傷配置

図2 三次元的損傷状態の定義

面積ベクトルの変換は、点 P において、現在損傷配置 B_i から仮想非損傷配置 B_f への仮想的変形を考えることによって規定される。配置 B_i から B_f への仮想的変形こう配を G とすれば、 B_f での微小線分ベクトル dx^* と dy^* は次のようになる。

$$dx^* = Gdx, dy^* = Gdy \quad (4)$$

Nanson の定理によれば、 B_f での面積ベクトル $\nu^* dA^*$ は B_i でのベクトル νdA と関連づけられ

$$\begin{aligned} \nu^* dA^* &= (1/2) dx^* \times dy^* \\ &= (1/2) (Gdx) \times (Gdy) \\ &= K(G^{-1})^T (\nu dA), K = \det G \quad (5) \end{aligned}$$

となる。ここで $(\)^T$ は 2 階テンソルの転置を表す。

以上の議論によれば、損傷状態は式 (5) の線形変換 $K(G^{-1})^T$ によって記述できることになる。テンソル $K(G^{-1})^T$ を新しいテンソルを用いて

$$K(G^{-1})^T = I - D \quad (6 \cdot a)$$

あるいは

$$G = K[(I - D)^T]^{-1} = K(I - D)^{-T} \quad (6 \cdot b)$$

で表すと、式 (5) は

$$\nu^* dA^* = (I - D)(\nu dA) \quad (7)$$

と書ける。ここで I は 2 階の単位テンソルである。上述の議論によれば、式 (7) の 2 階テンソル D は材料の一般的損傷(異方損傷)状態を表す内部状態変数であるから、これを現在損傷配置 B_i に関する損傷テンソルと呼ぶことにする。

2.2.2 除荷損傷配置に関する損傷の表現 以上の議論は配置 B_i を基準にしており、したがって物体は荷重の作用により損傷を受けると同時に、所定の変形状態にある。すなわち、式 (7) によって定義される損傷テンソル D は、与えられた瞬間の変形状態にも依存し、このため変形の大きな場合には、 D は損傷の内部状態を適切に表現し得なくなる。

微小体積要素の現在配置 B_i における損傷状態を考えるとき、初期非損傷配置 B_0 から B_i への不可逆的な内部構造変化だけが意味をもつ。このため図 2 のように、 B_i からの除荷配置 $\tilde{B}_i$ [図 2 (d)] を考え、このときの B_i から $\tilde{B}_i$ への弾性変形こう配を $(F^e)^{-1}$ とする。配置 $\tilde{B}_i$ の微小面積要素 $\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}$ の荷重負担有効面積は空げきの存在によって減少し、対応する除荷仮想非損傷配置 $\tilde{B}_f$ [図 2 (e)] の面積要素 $\tilde{P}^*\tilde{Q}^*\tilde{R}^*$ と等価になると仮定する。

このとき B_f から $\tilde{B}_f$ への除荷に伴う弾性変形こう配は、配置 B_i と B_f の等価性から、前と同じく $(F^e)^{-1}$ によって規定できる。

前節の議論と同じく、面積ベクトル $\nu d\tilde{A}$ と $\nu^* d\tilde{A}^*$ の間の関係は、配置 $\tilde{B}_i$ から配置 $\tilde{B}_f$ への仮想

的変形こう配 $\tilde{G}$ を導入することによって規定できる。このとき、式 (4)、(5) と同様な操作により

$$d\tilde{x}^* = \tilde{G}d\tilde{x}, d\tilde{y}^* = \tilde{G}d\tilde{y} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \nu^* d\tilde{A}^* &= (1/2) d\tilde{x}^* \times d\tilde{y}^* \\ &= \tilde{K}(\tilde{G}^{-1})^T (\nu d\tilde{A}), \tilde{K} = \det \tilde{G} \quad (9) \end{aligned}$$

を得る。ここで再び、2 階のテンソル $\tilde{K}(\tilde{G}^{-1})^T$ に対して

$$\tilde{K}(\tilde{G}^{-1})^T = I - \tilde{D} \quad (10)$$

のような新しいテンソル $\tilde{D}$ を導入すれば、式 (9) は

$$\nu^* d\tilde{A}^* = (I - \tilde{D})(\nu d\tilde{A}) \quad (11)$$

となる。このテンソル $\tilde{D}$ は、テンソル D とは異なり、配置 B_i の弾性変形には無関係にその損傷状態、つまり空げきの存在による有効面積の減少を表現する。今後 $\tilde{D}$ を損傷テンソル、あるいは除荷損傷配置 $\tilde{B}_i$ に関する損傷テンソルと呼ぶ。

最後に、配置 B_i から $\tilde{B}_i$ 、ならびに B_f から $\tilde{B}_f$ への変形を考慮すれば、テンソル $\tilde{G}$ と G および $\tilde{D}$ と D の間の関係を次のように導くことができる。

$$\tilde{K}(\tilde{G}^{-1})^T = (F^e)^T [KG^{-1}]^T (F^e)^{-T} \quad (12 \cdot a)$$

$$\tilde{D} = (F^e)^T D (F^e)^{-T} \quad (12 \cdot b)$$

さて、テンソル $\tilde{D}$ と D の主値と主方向をそれぞれ $\tilde{D}$, $\tilde{\nu}$ および D , ν とすれば、両テンソルの固有方程式 (proper equation) は

$$(\tilde{D} - \tilde{D}I)\tilde{\nu} = 0 \quad (13 \cdot a)$$

$$(D - DI)\nu = 0 \quad (13 \cdot b)$$

となる。式 (12 \cdot b) を (13 \cdot a) に代入して整理すれば

$$(D - \tilde{D}I)[(F^e)^{-T}\tilde{\nu}] = 0 \quad (14)$$

が成り立つ。式 (14) を式 (13 \cdot b) と比較すれば、テンソル $\tilde{D}$ と D の主方向の間の関係

$$\tilde{\nu} = (F^e)^T \nu / |(F^e)^T \nu| \quad (15)$$

を得る。

すでに述べたように、 B_i の弾性変形が大きい場合には損傷状態はテンソル $\tilde{D}$ によって規定しなければならない。しかし $\tilde{D}$ と D は式 (12 \cdot b) によって関係づけられ、特に変形こう配 F で表される変形のうち、弾性変形が微小の場合には、両者は一致する。

2.3 損傷テンソルの制約と解釈 上で述べたように、配置 B_i の弾性変形が大きい場合には、損傷状態はテンソル $\tilde{D}$ によって規定しなければならない。ここで、式 (11) で定義された損傷テンソル $\tilde{D}$ に対する制約について検討する。式 (11) の $\nu^* d\tilde{A}^*$ は、空げき分布のために $\tilde{B}_i$ の面積ベクトル $\nu d\tilde{A}$ から変換された等価面積ベクトルであるから、 $\nu^* d\tilde{A}^*$ と $\nu d\tilde{A}$ の内積は正、すなわち

$$(\nu^* d\tilde{A}^*) \cdot (\nu d\tilde{A}) > 0 [\forall \nu d\tilde{A} \text{ に対して}] \quad (16)$$

でなければならない。式(11)と式(16)から

$$[(I-\tilde{D})(\tilde{\nu}d\tilde{A})] \cdot (\tilde{\nu}d\tilde{A}) > 0 [\forall \tilde{\nu}d\tilde{A} \text{ に対して}] \quad (17)$$

となり、これから $(I-\tilde{D})$ は正値テンソルでなければならない。

次にテンソル $(I-\tilde{D})$ の対称部分と反対称部分を $(I-\tilde{D})^s, (I-\tilde{D})^a$ として、その Decartes 分解

$$(I-\tilde{D}) = (I-\tilde{D})^s + (I-\tilde{D})^a \quad (18)$$

を考える。このとき変換(11)における $(I-\tilde{D})^a$ の寄与は

$$\begin{aligned} (\tilde{\nu}^* d\tilde{A}^*) \cdot (\tilde{\nu} d\tilde{A}) &= [(I-\tilde{D})^a (\tilde{\nu} d\tilde{A})] \cdot (\tilde{\nu} d\tilde{A}) \\ &= -(\tilde{\nu} d\tilde{A}) \cdot [(I-\tilde{D})^a (\tilde{\nu} d\tilde{A})] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

となる。このことは、テンソル $(I-\tilde{D})^a$ は、損傷材料内の任意の方向の面積要素 $\tilde{\nu} d\tilde{A}$ を、その方向に関係なく常に、 $\tilde{\nu} d\tilde{A}$ と直交する方向の面積要素 $\tilde{\nu}^* d\tilde{A}^*$ に変換することを意味する。このような変換は、損傷による有効面積の減少を表す変換としては、物理的に不適切である。したがって以下の議論では、式(18)の反対称部分 $(I-\tilde{D})^a$ を除くことができ、これから損傷テンソル $\tilde{D}$ は対称となる。このとき $\tilde{D}$ は常に直交する三つの主方向 $\tilde{n}_i (i=1, 2, 3)$ と対応する実の主値 $\tilde{D}_i$ を持ち、その標準形は

$$\tilde{D} = \sum_{i=1}^3 \tilde{D}_i \tilde{n}_i \otimes \tilde{n}_i \quad (20)$$

と書ける。

さて、図2の $\tilde{B}_t, \tilde{B}_f$ における点 $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}$ および $\tilde{P}^*, \tilde{Q}^*, \tilde{R}^*$ を通る $\tilde{D}$ の主軸座標系 $\tilde{o}\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3, \tilde{o}^*\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ をとり、面積要素 $\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}, \tilde{P}^*\tilde{Q}^*\tilde{R}^*$ とそれぞれの座標面からなる図3(a), (b)のような微小四面体 $\tilde{O}\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}, \tilde{O}^*\tilde{P}^*\tilde{Q}^*\tilde{R}^*$ を考える。このとき、式(11)に式(20)を代入すれば

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}^* d\tilde{A}^* &= \sum_{i=1}^3 (1-\tilde{D}_i) d\tilde{A}_i \tilde{n}_i \\ &= \tilde{n}_1 d\tilde{A}_1^* + \tilde{n}_2 d\tilde{A}_2^* + \tilde{n}_3 d\tilde{A}_3^* \end{aligned} \quad (21 \cdot a)$$

$$d\tilde{A}_i^* = (1-\tilde{D}_i) d\tilde{A}_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (21 \cdot b)$$

を得る。ここで $d\tilde{A}_i = \tilde{\nu}_i d\tilde{A}$, $d\tilde{A}_i^* = \tilde{\nu}_i^* d\tilde{A}^*$ はそれぞれ、配置 $\tilde{B}_t$ と $\tilde{B}_f$ の微小四面体の座標面における面積である。式(21・b)によれば、テンソル $\tilde{D}$ の主値 $\tilde{D}_i$ は、配置 $\tilde{B}_t$ における三つの損傷の主面における有効面積減少、あるいは有効空けき面積密度を表すものと解釈できる。

以上の議論は、配置 B_t に関する損傷テンソル D に対してもそのまま成立する。すなわち、テンソル $(I-D)$ は正値テンソルであり、また式(20), (21)は次の形に書ける。

$$D = \sum_{i=1}^3 D_i n_i \otimes n_i \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \nu^* dA^* &= \sum_{i=1}^3 (1-D_i) dA_i n_i \\ &= n_1 dA_1^* + n_2 dA_2^* + n_3 dA_3^* \end{aligned} \quad (23 \cdot a)$$

$$dA_i^* = (1-D_i) dA_i, \quad (i=1, 2, 3) \quad (23 \cdot b)$$

ここで $dA_i = \nu_i dA$, $dA_i^* = \nu_i^* dA^*$ はそれぞれ配置 B_t と B_f に対する微小四面体(図4)の座標面の面積である。

これまでの議論によれば、材料の損傷状態を空けきによる有効面積の減少と関連づける場合には、どのように複雑な空けき分布による損傷状態も式(20), あるいは式(22)のような2階対称テンソル $\tilde{D}$, あるいは

図3 損傷テンソル $\tilde{D}$ の解釈

図4 現在配置と初期配置に関する有効応力テンソル

D によって表現できることになる。すなわち、このような場合、式(20)、(22)は損傷状態の一般的表現となる。しかし正準形の表示式(20)、(22)はまた、2階対称な損傷テンソル $\tilde{D}$ 、 D は、直交異方性よりも複雑な対称性をもつ損傷状態は表現し得ないことも意味する。

すでに村上と大野⁽¹¹⁾は、クリープにおける異方損傷理論を展開するのに、微小粒界空けきの効果を粒界要素の単位法線ベクトルのジアド積で表現することによって、現在配置 B_t を基準とする式(22)の2階対称テンソル D を導いた。彼らはまた、損傷材料中の Cauchy 四面体からこれと等価な仮想的非損傷材料中の Cauchy 四面体への有効面積の減少を議論し、式(7)の関係を示した。同様なテンソルは、き裂を含む弾性体の連続体模型を展開する際に Kachanov⁽¹²⁾ によっても用いられた。その後 Betten⁽¹³⁾は、村上らとは逆に、損傷配置の Cauchy 四面体から仮想的非損傷配置への面積要素の変換から出発して損傷変数を定義し、さらに損傷の発達によっても法線方向が変化しないような面積要素が材料中に存在すると仮定して式(22)を導いた。これに対して本論文では、空けき発生によってもたらされる一般の材料損傷を対象として、材料の損傷状態が微小空けきの存在による荷重負担有効面積の減少によって規定されるというより限定の少ない仮定を基礎とし、系統的な理論を展開した。

3. 有効応力の定義

3.1 現在配置に関する有効応力 材料の損傷状態を表す内部状態変数として、式(20)の損傷テンソル $\tilde{D}$ [あるいは、これと式(12・b)で関係づけられたテンソル D] を用いれば、損傷材料の構成式と損傷の発展式は内部状態変数に基づく通常の非弾性理論の枠組の中で展開できる。しかし連続体損傷力学では、損傷によって拡大された応力の効果を有効応力として表すとともに、ひずみ等価性の仮説⁽¹⁴⁾を用い、非損傷材料の構成式中の Cauchy 応力を、対応する有効応力で置き換えることによって損傷材料の構成式が導かれることが多い⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾。また損傷の発展式も、通常このような有効応力を用いて定式化されている。

式(3)の有効応力の概念によれば、一般の損傷状態での現在配置に関する有効応力 (Cauchy の応力テンソル σ に対する有効応力) は、図4(c)の仮想配置 B_f における任意の面積要素 $P^*Q^*R^*$ が同図4(b)の配置 B_t における要素 PQR に作用するのと同じの表面力ベクトル $^{(v)}t dA$ を受けるときに生じる応力 σ^* として定義できる。この応力は基準配置 B_f に関する第

1種 Piola-Kirchhoff テンソルに対応するから

$$\sigma^* = K^{-1} G \sigma \quad \dots\dots\dots (24)$$

と書ける。式(6)の関係を代入すると、この関係式は

$$\begin{aligned} \sigma^* &= K^{-1} K [(I-D)^{-T}] \sigma \\ &= (I-D)^{-1} \sigma \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

となる。ただし上式では、前節で議論した D の対称性を用いた。図4(c)には、 σ^* の力学的解釈を示す。

配置 B_f で定義した式(25)の有効応力 σ^* は非対称である。損傷材料の構成式、損傷の発展式を非対称な応力テンソルを用いて定式化するのは不都合であるから、これを適当な方法で対称化する必要がある。この目的のための一つの可能な方法は、式(25)のテンソル σ^* のデカルト分解の対称部分をとることであって、

$$S = [\sigma^*]^s = (1/2)[(I-D)^{-1}\sigma + \sigma(I-D)^{-1}] \quad \dots\dots\dots (26)$$

を得る^{**1}。

ここでは、配置 B_t における材料の力学的状態は B_f におけると等価であると仮定している。したがって、現在損傷配置 B_t における Cauchy 応力 σ の効果は、空けきの存在による有効面積の減少により、有効応力 S まで拡大されるものと解釈することができる。

3.2 初期配置に関する有効応力 初期配置 B_0 に関する第2種 Piola-Kirchhoff 応力テンソル

$$\Sigma = J F^{-1} \sigma (F^{-1})^T, J = \det F \quad \dots\dots\dots (28)$$

と同様、配置 B_0 に関する有効応力も定義できる。

現在損傷配置 B_t における拡大された応力の効果は有効応力 S で与えられる。まず図4(b)のように、これに対応する表面力ベクトル

$$^{(v)}t^* dA = S^T (v dA) \quad \dots\dots\dots (29)$$

を導入する。つづいて応力 Σ に対する通常の仮定と同じく、図4(a)の配置 B_0 の面積要素 $P_0Q_0R_0$ に、式(29)から変換された表面力ベクトル

$$^{(v)}t^* dA_0 = F^{-1} ^{(v)}t^* dA \quad \dots\dots\dots (30)$$

が作用するものとする。配置 B_0 に対する有効応力を T で表し、Cauchy の関係を使えば

$$^{(v)}t^* dA_0 = T^T (v_0 dA_0) \quad \dots\dots\dots (31)$$

式(30)、(31)とともに面積変化に対する Nanson の式を用いれば、配置 B_0 に対する有効応力は、式(28)と同一の形に求められ、次のようになる。

$$T = J F^{-1} S (F^{-1})^T \quad \dots\dots\dots (32)$$

^{**1} σ^* の対称化はこのほかにも可能である。例えば Cordebois と Sidoroff⁽¹⁵⁾は、非損傷材料の弾性ポテンシャル中の Cauchy 応力 σ と置き換えることによって損傷材料の弾性ポテンシャルを与えるような応力の一つとして、次のような有効応力テンソルを提案している。

$$S = (I-D)^{-1/2} \sigma (I-D)^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (27)$$

なお、有効応力 S , T は損傷に伴う応力拡大の効果を表す仮想的応力であるから、これらはそれぞれの配置における力の釣り合い条件を満たすものではないことに注意する必要がある**2。

4. き裂の閉口を含む場合への応用

4.1 有効応力テンソルの拡張 弾性変形に伴う形状変化が微小な場合、材料の損傷状態は式(22)の2階対称テンソル D で、また損傷に基づく応力拡大の効果は式(26), (27)の有効応力テンソルによって記述できる**3。この理論では、損傷によって生じた微小空げきは、応力を伝達しないと仮定している。しかし微小平面き裂を含み、しかも弾性変形のほかに非弾性変形も微小な問題では、圧縮応力の作用による微小き裂の閉口の効果が無視できない場合が多い^{(21)~(23)}。この現象は、コンクリート、岩石のような脆性材料での引張応力と圧縮応力のもとでの破壊強さ、弾性係数の違い、金属の疲労強度の平均応力依存性等として観察されている。

このような問題に対する前節の理論の一つの拡張は、圧縮応力の影響を考慮した新しい有効応力を定義することによって行いうる⁽²¹⁾。はじめに、Ladevezeら⁽²¹⁾と同じく、Cauchy 応力テンソル σ を次のように分解する。

$$\sigma = \langle \sigma \rangle - \langle -\sigma \rangle \quad \dots\dots\dots (33\cdot a)$$

$$\langle \sigma \rangle = \begin{bmatrix} \langle \sigma_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \sigma_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \sigma_3 \rangle \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (33\cdot b)$$

$$\langle -\sigma \rangle = \begin{bmatrix} \langle -\sigma_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle -\sigma_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle -\sigma_3 \rangle \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (33\cdot c)$$

ここで $\langle \rangle$ は Macauley の括弧であり、 $\sigma_i (i=1, 2, 3)$ は σ の主値である。圧縮応力の作用のもとでは、微小き裂の閉口の効果により、損傷 D に基づく有効面積の減少は、引張応力の場合よりも小さい。この比率を

**2 3.1, 3.2節で議論した有効応力 S および T は、損傷に伴う荷重負担有効面積の減少によって引き起こされる応力効果の増加を表す。よって厳密には、これらの有効応力は、損傷あるいは破壊のような局所的な分離 (decohesion) 効果を対象とするものである。
一般に材料の変形は特定の平面上での空げき分布だけではなく、その局所的な空間分布にも依存する。このため、変形に対しては S , T とは別の有効応力を定義するのが合理的な場合がある。この問題に関しては、文献⁽¹¹⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾で論じられている。

**3 式(22)の損傷テンソル D と式(26), (27)の有効応力テンソル S は、主に金属材料の異方クリープ損傷⁽¹¹⁾⁽¹⁸⁾、後続クリープ損傷過程への先行塑性損傷の影響⁽¹⁹⁾、非比例組合せ応力のもとでのクリープき裂進展⁽²⁰⁾、塑性損傷によって引き起こされる弾性定数の変化⁽¹⁹⁾等の解析に適用されている。

$C (0 \leq C \leq 1)$ とすれば、式(26)は

$$S = (1/2)[(I-D)^{-1}\langle \sigma \rangle + \langle \sigma \rangle (I-D)^{-1}] - (1/2)[(I-CD)^{-1}\langle -\sigma \rangle + \langle -\sigma \rangle (I-CD)^{-1}] \quad \dots\dots\dots (34)$$

のように拡張できる。ここで $C=0$ と $C=1$ はそれぞれ、き裂が完全に閉口する場合 (unilateral condition) と閉口のない場合 (bilateral condition) に対応する。

4.2 微視的分布き裂を含む弾性-脆性体の変形

拡張した有効応力(34)の応用の一例として、図5のようなき裂の二次元弾性変形を解析する。この弾性体は平面応力状態にあり、同図のような静水圧-せん断組合せ応力を受けるとする。物体中には、微視的き裂が無秩序に分布するとすれば、その損傷状態は等方であり、損傷テンソル

$$D = DI = D[n_1 \otimes n_1 + n_2 \otimes n_2] \quad \dots\dots\dots (35)$$

によって表される。

はじめに、図5(b)の経路①に沿う変形を考えると、座標系 ox_1x_2 と $ox_1\bar{x}_2$ に関する応力テンソルは

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -p & \tau \\ \tau & -p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(k/2)\tau_0 & k\tau_0 \\ k\tau_0 & -(k/2)\tau_0 \end{bmatrix} \quad (0 \leq k \leq 1; k = \tau/\tau_0) \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$[\hat{\sigma}] = \begin{bmatrix} (k/2)\tau_0 & 0 \\ 0 & -(3k/2)\tau_0 \end{bmatrix} = [\langle \hat{\sigma} \rangle - \langle -\hat{\sigma} \rangle] \quad \dots\dots\dots (37\cdot a)$$

$$[\langle \hat{\sigma} \rangle] = \begin{bmatrix} (k/2)\tau_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (37\cdot b)$$

$$[\langle -\hat{\sigma} \rangle] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (3k/2)\tau_0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (37\cdot c)$$

式(35), (37)を式(34)に代入すれば、座標系 $ox_1, \bar{x}_2$ に関する有効応力テンソル成分 $\bar{S}_{ij}$ が得られ、さらにこれに座標変換を施すことにより座標系 ox_1x_2 に関する有効応力テンソル成分が次のように求められる。

$$[S] = (k\tau_0/4) \begin{bmatrix} 1/(1-D) - 3/(1-CD) & \\ & 1/(1-D) + 3/(1-CD) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/(C/D) + 3(1-CD) & \\ & 1/(1-D) - 3/(1-CD) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (38)$$

(a) ランダムに分布する微視的き裂を含む二次元弾性体
(b) 応力経路
図5 き裂を含む弾性体と応力経路

図6 静水-せん断組合せ応力を受けるき裂体の弾性変形

最後に、ひずみ等価性の仮説を用いれば、き裂体の弾性変形はHookeの法則中のCauchy応力を式(38)の有効応力で置き換えて得られ、図5(b)の応力経路①に対するせん断応力-せん断ひずみ関係式は次のようになる。

$$\gamma/(\tau_0/G) = 1/4[1/(1-D) + 3(1-CD)](\tau/\tau_0) \quad \dots\dots\dots (39)$$

図6の実線は、 $D=0.4$, $C=0.2$ の場合に対する式(39)の結果を示す。また同図中の破線と一点鎖線は、図5(b)の応力経路②、③に対する同様な解析の結果である。図6において、比例負荷経路①に対しては全負荷過程において、閉口したままのき裂と開口したき裂が共存し、最終状態Pに至る。応力経路②に対しては点Qまでは経路①よりも開口したき裂が多く、したがって大きなせん断ひずみを与える。しかし点Q以後静水圧の作用とともにき裂の閉口が生じ、せん断ひずみは減少する。これに対して応力経路③では、点R以前では静水圧だけが作用し、せん断変形は生じない。つづく経路RSでは、すべてのき裂が閉口しており、三つの経路中最も小さなひずみ増加率を示す。最後に点S以後では、開口するき裂が生じ、ひずみの増加が容易になる。なお、HoriiとNemat-Nasser⁽²³⁾は、等方弾性体中に一様に分布する微小き裂のき裂閉口と負荷誘起異方性をセルフ・コンシステント法に基づくマイクロメカニックス的観点から解析し、図6と同様な結果を得ている^{**4}。

5. む す び

疲労損傷、クリープ損傷、弾塑性損傷を含む一般的材料損傷状態を系統的に記述するための連続体力学理論を展開した。

はじめに、クリープ損傷に対する古典的一次元損傷

理論を、一般の三次元的損傷に拡張し、材料の損傷状態は2階対称な損傷テンソルで表現できることを示した。この損傷テンソルの物理的解釈、力学的制約、妥当性の限界を明らかにするとともに、損傷状態に対する物体の有限変形の影響についても議論した。

つづいて、材料の損傷に伴う応力効果の拡大を適切に表現するための有効応力テンソルの合理的な定義について検討した。これにより、上述の損傷テンソルの関数として、損傷材料の現在配置と初期配置に関する2種類の有効応力テンソルを定義した。

一般に損傷材料中の微小き裂は、圧縮応力のもとで閉口し、その効果が無視できない場合がある。本論文では最後に、上述の損傷材料に対する有効応力を、き裂閉口の効果も含めるように拡張した。さらにその応用例として、静水圧とせん断組合せ応力を受ける弾性-脆性材料の弾性挙動の負荷履歴依存性を解析し、マイクロメカニックスによる解析と同様な結果を得た。これにより、本理論は、金属のクリープ損傷、弾塑性損傷のように大きな非弾性変形が生じる場合だけではなく、金属の高サイクル疲労、岩石、コンクリートのような脆性材料の損傷も合理的に記述できることがわかった。

最後に本研究は、昭和61年4月から7月までのパリ第6大学滞在中の議論を発展させたものであることを付記し、同大学への招へいと滞在に際して格別のご尽力とゆき届いたご配慮をいただいた同大学J. Lemaitre教授に深く感謝する。また、この研究は昭和61年度文部省科学研究費補助金一般研究(A)(課題番号61420024)の助成による研究の一部であり、ここに謝意を表す。

文 献

- (1) Lemaitre, J. and Chaboche, J. L., *J. Méc. Appl.*, 2-3(1978), 317.
- (2) Hult, J., (Easterling, K. E.編), *Mechanisms of Deformation and Fracture*, (1979), 233, Pergamon.
- (3) Krajcinovic, D., *Appl. Mech. Review*, 37-1(1984), 1.
- (4) 村上, 機論, 51-467, A(昭60), 1651.
- (5) Kachanov, L. M., *Introduction to Continuum Damage Mechanics*, (1986), Martinus Nijhoff.
- (6) Lemaitre, J. and Chaboche, J. L., *Mécanique des Matériaux Solides*, (1985), 343, Dunod.
- (7) Kachanov, L. M., *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekh. Nauk*, No. 8(1958), 26(in Russian).
- (8) Rabotnov, Yu. N., *Creep Problems of Structural Members*, (1969), 379, North-Holland.
- (9) Chaboche, J. L., *Nucl. Eng. Des.*, 79(1984), 309.
- (10) Murakami, S., (Boehler, J. P. 編), *Failure Criteria of Structured Media*, A. A. Balkema(in press).
- (11) Murakami, S. and Ohno, N., (Ponter, A. R. S. and Hayhurst, D. R. 編), *Creep in Structures*, (1981), 422, Springer.

^{**4} ただし彼らは、二次元平面ひずみ状態を仮定している。

- (12) Kachanov, M., *J. Eng. Mech. Division, Proc. ASCE*, 106-EM5(1980), 1039.
- (13) Betten, J., *J. Méc. Théor. Appl.*, 2-1(1983), 13.
- (14) Lemaitre, J., *Proc. ICM-1, Kyoto*, (1971).
- (15) Cordebois, J. P. and Sidoroff, F., (Boehler, J. P. 編), *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*, (1982), 761, Martinus Nijhoff.
- (16) Murakami, S. and Imaizumi, T., *J. Méc. Théor. Appl.*, 1-5(1982), 743.
- (17) Murakami, S., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, 105-2(1983), 105.
- (18) Murakami, S., Sanomura, Y. and Saitoh, K., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, 108-1(1986), 167.
- (19) Murakami, S. and Sanomura, Y., *Eng. Fract. Mech.*, 25-5/6(1986), 693.
- (20) Murakami, S., (Desai, C. S. ほか編), *Constitutive Laws for Engineering Materials*, (1987), 187, Elsevier.
- (21) Ladeveze, P. and Lemaitre, J., *IUTAM Congress, Lyngby*, (1984).
- (22) Kyoya, T., Ichikawa, Y. and Kawamoto, T., (Kawamoto, T., and Ichikawa, Y. 編), *Proc. Fifth Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics*, 1(1985), 469, A. A. Balkema.
- (23) Horii, H. and Nemat-Nasser, S., *J. Mech. Phys. Solids*, 31-2(1983), 155.

討 論

〔質問〕 川嶋 紘一郎〔名古屋工業大学〕

具体的な応用の場合には、損傷テンソル D をなんらかの物理量と関連させる必要があると思われる。どのような物理量が D として考えられるか。

〔回答〕 本論文2・3節で論じているように、 D (あるいは $\tilde{D}$) は微視的空げきの三次元的分布によって生じる有効空げき面積密度と解釈することができる。このほか解釈も可能である(付1)、(付2)。

またこの D を用いて損傷過程を記述するとき、 D をどのように定量化するかという問題が生じる。しかし、連続体力学的観点からは、この手順は明白である。すなわち、まず D を内部状態変数として用いて、損傷材料の構成式と D の発展式を適切に定式化する。

つづいてこれらの式が特定の較正試験の結果を記述するように材料関数あるいは材料定数を同定すれば、任意の損傷過程の各段階での D が定量化できる。このような D は決して特殊な力学変数ではなく、例えば塑性流れ理論における移動硬化変数と同様な内部状態変数とお考え願いたい。事実、 D の役割とその定量化の手順については、塑性理論の移動硬化変数のそれ思い出していただければわかりやすいと思う。損傷力学と損傷変数の概念の詳細については文献(付1)、(付2)をご参照いただきたい。

(付1) 村上, 材料, 31-340 (昭57), 1.

(付2) 村上, 機論, 51-467, A (昭60), 1651.